Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок јануар ПС
22.1.2022.

1. а) [15] Лебег-Стилтјесова мера.
   б) [5] Дати пример функције која не дефинише Лебег-Стилтјесову меру и објаснити.
   в) [5] Објаснити да ли функција $h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ дефинише Лебег-Стилтјесову меру. Ако да, одредити меру скупа $A = [-1, 1)$.
   г) [5] Дати пример Лебег-Стилтјесове мере у којој скуп $B = [0, 1)$ има меру 10.

2. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и функција $f : X \to \mathbb{R}$.
   а) [5] Ако је f мерљива, објаснити да ли тада важи $f^{-1}(\{2\}) \in \mathfrak{M}$.
   б) [5] Ако важи $f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$, за све $c \in \mathbb{R}$, објаснити да ли је тада f мерљива функција.

3. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.
   а) [5] Ако је $f : X \to [0, \infty)$ мерљива функција, показати $\int\limits_X f d\mu \geq 0$.
   б) [5] Ако је $\mu(A) = 0$, показати $\int\limits_A f d\mu = 0$.

4. а) [10] Формулисати и доказати Теорему о доминантној конвергенцији.
   б) [15] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x}\, dx$.

5. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са
$$f_n(x) = n\chi_{[0, \frac{1}{n^\alpha}]}(x),$$
   где је $\alpha > 0$. У зависности од α, испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
   а) [7] μ-скоро свуда;
   б) [11] у просторима $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ и $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$;
   в) [7] по мери μ,

   где је μ Лебегова мера на $\mathbb{R}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) 2.16 књига или 2. недеља на енастави.

   б) Свака опадајаћу функција као и свака функција која је прекидна с лева не дефинише Лебег-Стилтјесову меру. Ево два примера.

   Функција $h(x) = -x$ је опадајућа. Из дефиниције $\lambda_h([a,b)) = f(b) - f(a)$ следи $\lambda_h([0,1)) = -1 < 0$, а мера мора узимати само ненегативне вредности.

   Функција $h(x) = \text{sgn}x$ има прекид са леве стране (и са десне стране) у нули. Свака мера на σ-алгебри мора бити непрекидна одоздо, што значи да за сваки растући низ интервала E_n, мора да важи $\lambda_h(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_h(E_n)$. Нека је $E_n = [-1, -\frac{1}{n})$. Тада је $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = [-1, 0)$ и важи $\lambda_h(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0 - (-1) = 1$. Међутим, $\lambda_h([-1, -\frac{1}{n})) = 0 - 0 = 0$, па је и $\lim_{n\to\infty} \lambda_h([-1, -\frac{1}{n})) = 0$.

   в) Да, зато што је дата функција непрекидна с лева и растућа. Важи $\lambda_h([-1,1)) = h(1) - h(-1) = 2 - 1 = 1$.

   г) Нека је $h(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 10 & x > 0 \end{cases}$. Ова функција је растућа и непрекидна с лева, па дефинише Лебег-Стилтјесову меру и важи $\lambda_h([0,1)) = h(1) - h(0) = 10$.

2. а) Да. $f^{-1}(\{2\}) = f^{-1}((-\infty, 2]) \cap f^{-1}([2, \infty))$. Оба скупа на десној страни су у σ-алгебри $\mathfrak{M}$, зато што је f мерљива, па је и њихов пресек у σ-алгебри $\mathfrak{M}$.

   б) f може бити мерљива, али не мора. На пример, нека је дат скуп $[0,1] \subset \mathbb{R}$ са Лебеговом мером. Нека је $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in V, \\ x & x \notin V \end{cases}$, при чему је $V \subset [0,1]$ Виталијев скуп који не садржи нулу. Тада је $f^{-1}(\{c\}) = \begin{cases} \{-c\}, & c \in V, \\ \{c\} & c \notin V \end{cases}$, а једночлани скупови припадају Лебеговој σ-алгебри. Међутим, функција f није Лебег мерљива, јер је $f^{-1}((-\infty, 0)) = V$, а Виталијев скуп није Лебег мерљив.

3. а) У случају да је f проста функција, доказ важи на основу дефиниције. У том случају је $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$, за неке мерљиве скупове $E_1, \ldots, E_n$, и константе $c_1, \ldots, c_n \ge 0$, па је $\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) \ge 0$. Ако је f произвољна мерљива ненегативна функција, онда постоји растући низ простих ненегативних функција s_n који конвергира ка f, па на основу ТМК важи $\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu \ge 0$.

   б) Нека је f проста функција $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$. Тада важи $f\chi_A = (\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k})\chi(A) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k \cap A}$. Пошто је $\mu(A) = 0$ онда важи и $\mu(A \cap E_k) = 0$, за све $k = 1, \ldots, n$. Следи $\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k \cap A) = 0$. Ако је f произвољна мерљива ненегативна функција, онда је доказ исти као под а).

4. а) Теорема 3.24 у књизи или 9. недеља на енастави.

   б) Приметимо да је $\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+\frac{n^2x^2}{3}+\frac{n^2x^2}{3}+\frac{n^2x^2}{3}} \leqslant \frac{n^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt[4]{\frac{2}{27}n^6x^6}} = \frac{\sqrt{27}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Овако смо проценили наравно да бисмо изгубили n у доминанти. Други део израза процењујемо помоћу неједнакости $\ln(1+x) \leqslant x$ и $\cos x \leqslant 1$, па је $\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{27}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, што је интеграбилна функција на $[1, +\infty)$ јер је $\frac{3}{2} > 1$. Наравно, у граници можемо и да пустимо лимес, или да пишемо израз са χ. Све о свему, постоји интеграбилна доминанта па можемо применити ТДК. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x} \, dx = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \chi_{[1,n]}(x) \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x} \, dx = 0,$$

   јер је за фиксирано x $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{[1,n]}(x) = 1$, док је n^2 јаче од $n^{\frac{3}{2}}$, па је под интегралом вредност 0.

5. а) Приметимо да за $\alpha > 0$ израз $\frac{1}{n^\alpha}$ тежи 0. Најпре, да видимо чему низ тежи тачка по тачка. За фиксирано $x \neq 0$, постоји довољно велико n такво да $x \notin \left[0, \frac{1}{n^\alpha}\right]$, док за $x = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ Како је тачка скуп Лебегове мере нула, то низ функција тежи ка нула функцији μ скоро свуда за све $\alpha > 0$.

б) Једини кандидат за лимесе у оба случаја је нула функција. Тада је $\|f_n - 0\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n^\alpha}} n^p\,dx = n^{p-\alpha}$. Последњи лимес је једнак 0 ако је $p - \alpha < 0$, тј. $\alpha > p$. Ово разматрање пролази за све $p \in [1, +\infty)$, па је у случају L^2, низ конвергентан за $\alpha > 2$. У случају L^∞ конвергенције имамо да је $\|f_n\|_\infty = n$ за све n, јер за фиксирано n скуп $\left[0, \frac{1}{n^\alpha}\right]$ је мере веће од 0. Самим тим, и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_\infty = \infty$, тј. f_n не конвергира у L^∞ ни за једно $\alpha > 0$.

в) Фиксирајмо $\varepsilon > 0$. Тада је $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$. Како последњи израз конвергира ка нули, то по дефиницији закључујемо да низ конвергира у мери за све $\alpha > 0$.