ТМИ- испит (Р смер)

27. 9. 2019.

1. а) Лебегова мера-дефиниција. б) Доказати да за сваки Лебег мерљив скуп E постоје два Борелова скупа A и B једнаке мере таква да је $A \subset E \subset B$. в) Објаснити шта је комплетирање Борелове мере.

2. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. а) Дефинисати интеграл функције. б) Нека је f интеграбилна ненегативна функција. Доказати да је $f = 0$ скоро свуда ако и само ако је $\int_X f d\mu = 0$. в) Да ли исти закључак важи за произвољну интеграбилну функцију f?

3. а) Теорема о доминантној конвергенцији.
б) Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n\sin(2xn^{-1})}{(x^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}x^{1+\frac{1}{n}})^n} dx$.

4. а) Ако $f \in L^4(0,1)$ да ли $f \in L^3(0,1)$, $f \in L^5(0,1)$, $f \in L^\infty(0,1)$? б) У зависности од коначности мере испитати да ли из $f \in L^\infty(X,\mu)$ следи $f \in L^2(X,\mu)$?

Упутство за решавање задатака:

2. в) Не. Пример је $f(x) = x$, за $x \in [-1,1]$.

3. б) Искористити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(2xn^{-1})}{(x^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}x^{1+\frac{1}{n}})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(2xn^{-1})}{x(1+\frac{x}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{\sin(\frac{2x}{n})}{\frac{2x}{n}} \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{2}{e^x}.$$

4. а) Ако $f \in L^4(0,1)$ онда $f \in L^3(0,1)$: искористити Хелдерову неједнакост $\int_0^1 |f(x)|^3 dx \le (\int_0^1 |f(x)|^{3\frac{4}{3}} dx)^{\frac{3}{4}} (\int_0^1 dx)^{\frac{1}{4}}$.

Ако $f \in L^4(0,1)$ онда не мора да важи $f \in L^5(0,1)$. Пример је $f(x) = x^{-\frac{1}{5}}$. Исти пример показује и да из $f \in L^4(0,1)$ не следи $f \in L^\infty(0,1)$.

б) Ако је мера коначна онда важи: $\int_X |f|^2 d\mu \le ||f||_\infty^2 \mu(X) < \infty$. Ако је мера бесконачна, онда не мора да важи. Пример је константна функција на $\mathbb{R}$.