Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок септембар 3
30.9.2020.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

    а) [10] Доказати непрекидност одоздо и условну непрекидност одозго мере μ.

    б) [5] Примером показати да је услов коначности мере скупова неопходан услов за непрекидност мере одозго.

    в) [5] Доказати $\mu(\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$, где су $E_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$ произвољни скупови.

2. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ две функције.

    а) [5] Ако је f мерљива, а g непрекидна функција, показати да је $g \circ f$ мерљива функција.

    б) [5] Ако је f мерљива, а g непрекидна функција, мора ли $f \circ g$ бити мерљива функција.

    в) [5] Може ли композиција две немерљиве функције бити мерљива функција?

    г) [5] Може ли композиција две непрекидне функције бити немерљива функција?

3. а) [15] Теорема о доминантној конвергенцији (формулација и доказ).

    б) [5] Да ли се на низ функција $f_n(x) = \frac{x}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ може применити ТДК на простору са мером $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$, где су $\mathfrak{M}$ и μ редом Лебегова σ-алгебра, односно Лебегова мера?

    в) [10] Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{3n \sin^4 x \log(x+5)}{6 + 7n^2 x^{\frac{3}{2}}} \chi_{[0,1]}(x) dx.$$

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

    а) [5] Доказати Хелдерову неједнакост.

    б) [10] Нека је $L^p_\alpha(\mathbb{R}) = \{f \mid \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p (1+|x|)^{\alpha p}\, dx < +\infty\}$ (при чему функцију f поистовећујемо са њеном класом еквиваленције, по релацији $\sim$ као код L^p простора), где је $1 \leqslant p < +\infty$ и $\alpha q > 1$, где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказати да је

$$L^p_\alpha(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}).$$

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

    а) [5] Дефинисати конвергенцију низа функција $f_n : X \to \mathbb{R}$ по мери μ. Дати пример низа функција који конвергира по мери и доказати да је он исправан.

    б) [10] Описати везу између конвергенције по мери и равномерне конвергенције.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Став 2.20 (ii), (iii).

   б) Нека је $E_n = (n, \infty)$ и мера Лебегова. Тада је $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(\emptyset) = 0$. Са друге стране важи $m(E_n) = \infty$ па је и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) = \infty$.

   в) $\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Нека је $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Следи $A_n \subseteq A_{n+1}$. Тада на основу непрекидности мере одоздо важи $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Дакле

   $$\mu(\varliminf_{n\to\infty} E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \varliminf_{n\to\infty}\mu(A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

   Последња неједнакост важи због услова $A_n \subseteq E_n$.

2. а) Став 3.6. под (б).

   б) Не мора, ево примера (са вежби). Нека је $\psi : [0,1] \to [0,2]$ функција дефинисана са $\psi(x) = x + s(x)$, где је $s : [0,1] \to [0,1]$ Канторова сингуларна функција. Ако је $K \subset [0,1]$ Канторов скуп онда се може показати да је $m(\psi(K)) = 1$, где је m Лебегова мера. Зато постоји Лебег немерљив скуп $N \subset \psi(K)$. Сада нека је

   $$f = \chi_{\psi^{-1}(N)} \text{ и } g = \psi^{-1}.$$

   Пошто је $N \subset \psi(K)$ онда је $\psi^{-1}(N) \subset K$. Како је Канторов скуп мере нула, а Лебегова мера комплетна, онда је и скуп $\psi^{-1}(N)$ Лебег мерљив. Дакле, функција f је Лебег-мерљива. Пошто је функција ψ непрекидна и бијекција онда је и њена инверзна функција такође непрекидна. Дакле, функција g је непрекидна. Да је композиција $f \circ g$ Лебег мерљива функција, онда би и инверзна слика тачке била Лебег мерљив скуп. Међутим,

   $$(f\circ g)^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(f^{-1}(\{1\})) = g^{-1}(\psi^{-1}(N)) = \psi(\psi^{-1}(N)) = N,$$

   што је Лебег немерљив скуп. Дакле, композиција $f \circ g$ није Лебег мерљива функција.

   в) Узећемо пример најједноставнијег простора са мером $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$ и $\mu(X) = 1$. На овом простору једине мерљиве функције су константне. Нека је $X = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ и $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Дакле, функције f и g нису $\mathfrak{M}$-мерљиве, али композиција $f \circ g(x) = 1$ је константна функција, па јесте $\mathfrak{M}$-мерљива.

   г) Нека је опет $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ и $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Дакле, све непрекидне функције које нису константне су $\mathfrak{M}$-немерљиве. Нека је $f(x) = x$ и $g(x) = e^x$. Тада је и њихова композиција $\mathfrak{M}$-немерљива.

3. а) Теорема 3.24.

   б) Не може. Наиме, не постоји интеграбилна доминанта функције $f_n(x)$ (сви остали услови су задовољени). Можемо приметити да је $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \neq \int\limits_{\mathbb{R}}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Наравно, за све $x \in \mathbb{R}$ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ово је тривијално за негативне x, односно за $x = 0$. За $x > 0$, $\chi_{[0,n]}(x) \to 1$ када $n \to \infty$. Но, за фиксирано $x \in \mathbb{R}$, важи да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0$. Дакле, десна страна је једнака 0. Леву страну можемо израчунати по дефиницији:

   $$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \frac{x}{n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^n = \lim\frac{1}{n}\frac{n^2}{2} = +\infty.$$

   Из овога директно закључујемо да није могуће применити ТДК на наведени низ функција.

в) Приметимо најпре да наведени интеграл можемо заменити са $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{3n\sin^4 x\log(x+5)}{6+7n^2x^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Тада је $|\sin^4 x\log(x+5)| \leqslant 1\cdot\log 6 = \log 6$. С друге стране, применимо АГ неједнакости, добијамо да $6+7n^2x^{\frac{3}{2}} \geqslant 2\sqrt{6\cdot 7n^2x^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{42}nx^{\frac{3}{4}}$, па је $\left|\frac{3n}{6+7n^2x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{3n}{2\sqrt{42}nx^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{42}x^{\frac{3}{4}}}$. Тиме смо показали да је

$$\left|\frac{3n\sin^4 x\log(x+5)}{6+7n^2x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{3\log 6}{2\sqrt{42}x^{\frac{3}{4}}},$$

а ово јесте интеграбилна доминанта јер $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}} < +\infty$ због $\frac{3}{4} < 1$. Наравно, подинтегралне функције су мерљиве, па применом ТДК закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{3n\sin^4 x\log(x+5)}{6+7n^2x^{\frac{3}{2}}}\chi_{[0,1]}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} \frac{3n\sin^4 x\log(x+5)}{6+7n^2x^{\frac{3}{2}}}\chi_{[0,1]}(x)dx,$$

но за фиксирано x лимес под интегралом на десној страни износи 0 (именилац је реда n^2, бројилац реда n). Одатле је тражени резултат једнак 0.

4. а) 4.2. на страни 70.

б) Узмемо произвољно $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R})$. Да важи $L^p_\alpha(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ доказујемо лако: довољно је приметити да је $(1+|x|)^{\alpha p} \geq 1$ јер је $\alpha p > 0$. Самим тим је $\|f\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p(1+|x|)^{\alpha p}\,dx < +\infty$, одакле $f \in L^p(\mathbb{R})$. Други део ћемо очекивано показати коришћењем Хелдерове неједнакости. Важи следећи низ (применили смо Хелдерову неједнакост за пар (p,q)):

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|(1+|x|)^{\alpha}\frac{1}{(1+|x|)^{\alpha}}\,dx \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p(1+|x|)^{\alpha p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^{\alpha q}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

а из коначности првог чиниоца по услову задатка, односно чињенице да из $\alpha q > 1$ имамо коначност и другог чиниоца (асимптотски се понаша као $\frac{1}{|x|^{\alpha q}}$ кад $x \to \pm\infty$, што су једини сингуларитети). Одатле добијамо да $f \in L^1(\mathbb{R})$, чиме је задатак завршен.

5. а) Дефиниција 4.16.

б) Равномерна конвергенција низа f_n ка функцији f повлачи конвергенцију по мери, зато што за произвољно $\epsilon > 0$ почевши од неког $n_0 \in \mathbb{N}$ за све $n \geq n_0$ и све $x \in X$ важи $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Дакле, за све $n \geq n_0$ је $\{x \in X | |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} = \emptyset$, па и $\mu\{x \in X | |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} = 0$. Преласкм на лимес мера, и лимес је нула. Обрнуто не мора да важи. Посматрамо низ функција $f_{k,m} = \chi_{[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m})}$, где је $1 \leq k \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, на скупу $X = [0,1]$. Овај низ конвергира по мери ка $f = 0$, али не конвергира равномерно зато што не конвергира ни тачка по тачка (Примери 4.9. 2° у књизи или пример 3. у фајлу 8.5.).