Студентска питања из Анализе 1 и одговори

1. Да ли постоји функција f која је непрекидна бијекција, али да f^{-1} није непрекидна?

Одговор. Да. Пример је функција $f : [0,1) \cup [2,3) \to [0,1)$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,1), \\ (x-1)/2, & x \in [2,3). \end{cases}$$

Ова функција је непрекидна у свакој тачки свог домена и бијекција је. Међутим, њена инверзна функција $f^{-1} : [0,1) \to [0,1) \cup [2,3)$ је дата са

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1/2), \\ 2x+1, & x \in [1/2,1). \end{cases}$$

Ова функција има прекид у тачки $1/2$.

2. Да ли постоји функција f која је непрекидна бијекција, таква да f^{-1} није непрекидна, али да су домен и кодомен исти скуп?

Одговор. Да. Најједноставнији је пример функција $f(x) = x$ при чему $f : (\mathbb{R}, d_d) \to (\mathbb{R}, d_{st})$. Дакле, метрика на домену је дискретна, а метрика на кодомену је стандардна. Пошто је у дискретној метрици сваки скуп отворен скуп, следи и да је свака функција са доменом у дискретној метрици непрекидна. Међутим, инверзна функција $f^{-1} : (\mathbb{R}, d_{st}) \to (\mathbb{R}, d_d)$ такође дата са $f^{-1}(x) = x$ није непрекидна. Наиме, инверзна слика тачке, која је отворен скуп у дискретној метрици, је иста та тачка и она није отворен скуп у стандардној метрици.

3. Да ли постоји функција f која је непрекидна бијекција, таква да f^{-1} није непрекидна, али да су домен и кодомен исти скуп са истом метриком?

Одговор. Да. Посматрамо функцију

$$f : [0,1) \cup [2,3) \cup \cdots \to [0,1) \cup [2,3) \cup \cdots$$

дефинисану са

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,1), \\ (x-1)/2, & x \in [2,3), \\ x-2, & x \in [4,5), \\ \vdots & \\ x-2, & x \in [2n, 2n+1), \\ \vdots & \end{cases}$$

Ова функција је непрекидна у свакој тачки домена и бијекција је, али f^{-1} има прекид у тачки $y = 1/2$ што се показује као у првом примеру.

4. Нека је дата диференцијабилна функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Показати да је f строго растућа ако и само ако је $f'(x) \geq 0$, за све $x \in (a, b)$, а скуп

$$\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$$

свуда густ у (a, b).

Одговор. Нека је f строго растућа. На основу дефиниције првог извода следи $f' \geq 0$. Претпоставимо супротно, да дати скуп није густ у (a, b). Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ и постоји отворена околина u око тачке c која не сече дати скуп. Дакле, за све $x \in u$ важи $f'(x) = 0$. На интервал u можемо применити Лагранжову теорему о средњој вредности, па следи да је f константна функција на u. То је контрадикција, јер је дата строго растућа функција.

Са друге стране, нека је $f' \geq 0$ и дати скуп свуда густ у (a, b). На основу Лагранжове теореме следи да је f растућа. Претпоставимо супротно, да f није строго растућа, тј. да постоје тачке $x_1 < x_2$ такве да је $f(x_1) = f(x_2)$. Пошто је растућа, f мора бити константна функција на интервалу $[x_1, x_2]$. Дакле, на том интервалу је $f' = 0$, па дати скуп није густ у (a, b).

5. Дати пример функције која је непрекидна свуда осим на скупу рационалних бројева (у стандардној метрици на $\mathbb{R}$).

Одговор. Пример такве функције је позната Риманова функција $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, NZD(m, n) = 1. \end{cases}$$

Покажимо прво да је r прекидна у свим рационалним бројевима различитим од нуле. Нека је $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ произвољан рационалан број и $m \neq 0$. Искористимо Хајнеов принцип преласка на низове. Сигурно постоји низ ирационалних бројева p_n који конвергира ка q, али $f(p_n) = 0$ је константан нула низ који не конвергира ка $f(q) = \frac{1}{n}$.

Покажимо сада да је r непрекидна у произвољном ирационалном броју p. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Треба наћи $\delta > 0$ тако да за све $x \in \mathbb{R}$ такве да је $|x - p| < \delta$ важи и $|r(x) - r(p)| < \epsilon$. За све $x \in \mathbb{R} \backslash Q$ имамо $r(x) = r(p) = 0$, дакле за њих сигурно важи тражена импликација. Зато можемо претпоставити $x \in \mathbb{Q}$. На основу Архимедове аксиоме постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $n_0 > 1/\epsilon$. Нека је

$$a = \sup\{c \in \mathbb{Z} \mid c \leq pn_0\}.$$

Дакле,

$$a - 1 < pn_0 < a + 1$$

тј.

$$p \in (\frac{a-1}{n_0}, \frac{a+1}{n_0}).$$

Посматрамо скуп A свих рационалних бројева m/n на интервалу $(\frac{a-1}{n_0}, \frac{a+1}{n_0})$ таквих да је $0 < n \leq n_0$. Дакле, овај скуп је коначан.

Ако је A непразан скуп, нека је

$$d = \min\{|p - y| \mid y \in A\}.$$

(Пошто је A коначан скуп овај минимум се достиже.) Дакле, $d > 0$. Тада је

$$B = (\frac{a-1}{n_0}, \frac{a+1}{n_0}) \cap (p-d, p+d)$$

отворен интервал који садржи p. Нека је $\delta > 0$ довољно мало тако да важи $(p-\delta, p+\delta) \subset B$. Тада за све рационалне бројеве x такве да је $|x-p| < \delta$ важи $|x-p| < d$, тј. $x \notin A$. Зато је $x = m/n$ за неко $n > n_0$, па је

$$|r(x) - r(p)| = 1/n < \epsilon$$

и тиме је показана непрекидност у ирационалном p.

Ако је A празан скуп онда нека је $B = (\frac{a-1}{n_0}, \frac{a+1}{n_0})$. Даље исто.

Слично се показује и непрекидност у тачки $p = 0$.