Математичке методе квантне механике

летњи семестар 2020.

Класична физика

1. Други Њутнов закон. Хуков закон. Планк-Ајнштајнов закон. Описати услове у којима важе сва три.

2. Описати брзину и убрзање честице у функцији положаја, у зависности од времена.

Диференцијална геометрија

1. Доказати да трајекторије соленоидног векторског поља чувају форму запремине.

2. Доказати да је функција $H : T^*M \to \mathbb{R}$ константна на повезаној Лагранжевој подмногострукости $L \subset T^*M$ ако и само ако је Хамилтоново векторско поље X_H тангентно на L. Да ли исто важи за произвољну симплектичку многострукост?

3. Показати да је:
а) $\mathfrak{L}_X\omega = 0$ ако и само ако је форма ω инваријантна у односу на ток векторског поља X,
б) $\mathfrak{L}_{fX}\omega = f\mathfrak{L}_X\omega + df \wedge \iota_X\omega$, где је f произвољна функција и
в) $\mathfrak{L}_{fX}\omega = \mathfrak{L}_X f\omega$, где је ω форма запремине.

Функционална анализа

1. Нека је A симетричан оператор на Хилбертовом простору. Доказати да су његове сопствене вредности реални бројеви и да различитим сопственим вредностима одговарају ортогонални сопствени вектори (ортогонални у односу на скаларни производ задан на Хилбертовом простору).
Доказати да је оператор чије су све сопствене вредности реалне симетричан.

2. Доказати да је $L^p(\mathbb{R})$ Хилбертов простор ако и само ако је $p = 2$.

Квантна механика

1. Нека је дат Хилбертов простор комплексних функција (нпр $L^2(\mathbb{R})$), где је скаларни производ дефинисан са

$$< \psi, \phi >= \int_{\mathbb{R}} \psi\phi^* dx.$$

Доказати да су следећи оператори на том простору симетрични:
а) $\hat{q}\psi = x \cdot \psi$,
б) $\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$, где је $\hbar$ реална константа,
в) $\hat{V}\psi = V(x)\psi$, где је $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ потенцијална енергија система,
г) $\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \hat{V}\psi$, где је $\hat{V}$ дато под в).

2. Нека је функција $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$ решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

а) Показати да је $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$, где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$.
б) Ако је $V = const$ (одговара слободној честици) показати да је φ линеарна комбинација функција $e^{ix\xi}$ и $e^{-ix\xi}$ где је $\xi^2 = 2m(E-V)/\hbar^2$.
в) Ако је $V \neq const$ и ако решење једначине тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$, где се функција S назива фазна функција, показати да је $dS(\mathbb{R}) = H^{-1}(E)$, до на $O(\hbar)$.
г) Ако решење једначине тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}a(x)$, где се функција a назива функција амплитуде, показати да важи $aS'' + 2a'S' = 0$ (хомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^2)$.
д) Ако решење једначине тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}(a_0(x) + \hbar a_1(x))$, показати да важи $a_1 S'' + 2a_1' S' = i a_0''$ (нехомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^3)$.

3. Одредити сопствене векторе и придружене сопствене вредности свих оператора из задатка 1. За оператор $\hat{H}$ искористити задатак 2. под в) и претпоставити да $\hbar$ тежи нули.

4. Нека је дата слободна честица у 1-димензионом квадру дужине L. Функција стања ове честице је сопствена функција оператора $\hat{H}$ и не зависи од времена t, дакле $\psi(x,t) = \psi(x)$. Вероватноћа да се честица налази у положају $x = 0$ и $x = L$ је нула.
а) Колико је $\psi(0)$ и $\psi(L)$ и зашто?
б) Користећи почетне услове као и да је потенцијална енергија честице једнака нули, показати да су нормализоване сопствене функције дате са $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$.
в) Показати да су одговарајуће сопствене вредности дате са $E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$.
г) Одредити вероватноћу да се честица налази између $x = \frac{L}{3}$ и $x = \frac{L}{2}$. За какво n, тј. за коју функцију стања, је та вероватноћа највећа?
д) Колика је очекивана вредност кинетичке енергије честице описане произвољним стањем ψ_n? Објаснити зашто.
ђ) Ако се честица описује стањем ψ_1, одредити очекивану вредност импулса честице.

5. Хомогена транспортна једначина каже да је векторско поље $a^2\nabla S$ соленоидно, где је $dS(\mathbb{R}^n) \subset H^{-1}(E)$. Показати да је хомогена транспортна једначина еквивалентна томе да је форма $\pi^* a^2 dx$ инваријантна у односу на ток векторског поља X_H рестрикованог на $dS(\mathbb{R}^n)$, где је $\pi : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ пројекција.

6. а) Дати пример комплексне функције $\psi(x), x \in \mathbb{R}$ такве да $|\psi|^2$ може бити густина вероватноће положаја честице.
б) Израчунати очекивану вредност положаја честице, ако се стање честице описује функцијом под а).

Линеарна алгебра

1. Доказати да билинеарно косо-симетрично пресликавање на непарно-димензионом векторском простору има непразно језгро.

2. Доказати да је векторски простор који допушта комплексну структуру парне димензије.

3. Показати да је $\Psi \in M(2n, \mathbb{R})$ линеарни симплектоморфизам ($\Psi^*\omega_0 = \omega_0$) ако и само ако је $\Psi^T \mathbb{J}_0 \Psi = \mathbb{J}_0$, где је $\mathbb{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ и $\omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$.

4. Доказати да је детерминанта симплектичке матрице једнака 1.

5. Показати да $\Psi \in GL(2n, \mathbb{R})$ чува комплексну структуру ($\Psi \mathbb{J}_0 = \mathbb{J}_0 \Psi$) ако и само ако $\Psi \in GL(n, \mathbb{C})$.

Лијеве алгебре

Дефиниција. Лијева алгебра је векторски простор V са придруженим билинеарним пресликавањем (Лијеве заграде) $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ тако да важи:
- коса-симетричност ($[u, v] = -[v, u]$);
- Јакобијев идентитет ($[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$).

Пример. ($\mathbb{R}^3, [u, v] = u \times v$) је Лијева алгебра.

Пример. Скуп свих векторских поља на глаткој многострукости $\mathfrak{X}(M)$ је Лијева алгебра, где је $[X, Y] = XY - YX$ (Лијев извод векторског поља).

1. Ако је G Лијева група, тада је $\mathfrak{g} := T_I G$ придружена Лијева алгебра. Показати да је Лијева алгебра Лијеве групе:
а) $GL(n, \mathbb{R})$- $\mathfrak{gl}(n) = M_n(\mathbb{R})$;
б) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ - $\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | trX = 0\}$;
в) $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | AA^T = A^T A = I, \det A = 1\}$ - $\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X + X^T = 0\}$;
г) $U(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | AA^* = A^* A = I\}$ - $\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | X + X^* = 0\}$;
д) $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) | A^T \mathbb{J}_0 A = \mathbb{J}_0\}$ - $\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) | \mathbb{J}_0 X + X^T \mathbb{J}_0 = 0\}$.
ђ) Одредити димензије ових Лијевих група.

2. Лијева теорема: Свака коначно димензиона Лијева алгебра одговара јединственој просто повезаној Лијевој групи. Доказати.

Напомена. Услов просто-повезаности је неопходан јер $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$, али $SO(3)$ и $SU(2)$ нису ни хомеоморфне.

3. Доказати да Лијевој алгебри $\mathbb{R}^3$ одговарају Лијеве групе $SO(3)$ и $SU(2)$. Која од њих није просто повезана?

4. Нека је $\mathfrak{g}$ коначно-димензиона Лијева алгебра. Нека су $e_1, \ldots, e_n$ базни вектори. Константе c_{ij}^k које задовољавају $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$ се називају структурне константе Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$. На простору $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ дефинишемо извод на следећи начин: $\frac{\partial F}{\partial \mu} \in \mathfrak{g}$ је јединствени елемент који задовољава

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h}(F(\mu + h\delta\mu) - F(\mu)) = \Big\langle \delta\mu, \frac{\partial F}{\partial \mu} \Big\rangle, \delta\mu \in \mathfrak{g}^*.$$

Уводимо билинеарни оператор $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, где је $\mathfrak{g}^*$ дуал Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$, са

$$\{F, G\}(\mu) := \Big\langle \mu, \Big[\frac{\partial F}{\partial \mu}, \frac{\partial G}{\partial \mu}\Big] \Big\rangle,$$

за сваки $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Показати да је $\mathfrak{g}^*$ Поасонова многострукост.

Дефиниција. Векторски потпростор Лијеве алгебре који је затворен у односу на Лијеве заграде се назива **Лијева подалгебра**.

5. а) Доказати да је скуп свих симплектичких векторских поља $Symp(M)$ Лијева подалгебра скупа свих векторских поља на симплектичкој многострукости. (Показати да је комутатор два симплектичка векторска поља Хамилтоново векторско поље.)
б) Доказати да је скуп свих Хамилтонових векторских поља симплектичке многострукости, $Ham(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ Лијева подалгебра свих симплектичких векторских поља. (Показати $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$.)

6. Дати пример симплектичке многострукости (M, ω) где је $Ham(M)$ права Лијева подалгебра од $Symp(M)$. Зашто то није $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$?

Фибрације

Нека су E и B тополошки простори. Пресликавање $\pi : E \to B$ које задовољава својство подизања хомотопије за све тополошке просторе X се назива **фибрација**.

Теорема: Све фибре $\pi^{-1}(b)$ су међусобно хомотопне.

Фибре једне фибрације не морају бити хомеоморфне. Свако раслојење је фибрација, али постоје фибрације које нису раслојења. (Погледати $Hatcher - AT$)

1. Доказати да је глатка фибрација субмерзија. (Сва пресликавања у дефиницији фибрације су глатка.)

2. Доказати да је фибрација $\pi : E \to B$, где је B контрактибилан простор, тривијална ($E \cong F \times B$).

3. Ако је $\pi : E \to B$ фибрација, онда постоји дуги тачан низ хомотопских група

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \cdots,$$

где су базне тачке $b_0 \in B$, $f_0 \in F_0 = \pi^{-1}(b_0)$ и $e_0 = \iota(f_0) \in E_0$. Описати пресликавања у овом низу.

Последица. Приметимо да ако је $\pi : E \to B$ наткривање (дакле F је дискретан тополошки простор) онда је $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$, за све $n \geq 0$.

4. Ако је $\pi : S^3 \to S^2$ Хопфова фибрација, показати да је $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$, где је $k \geq 3$.

5. Показати да постоји фибрација $\pi : Sp(n+1) \to S^{4n+3}$. Одредити $\pi_k(Sp(n))$, за $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Дефиниција. Тополошки простор X се назива **n-повезан** ако је $\pi_k(X, x_0) = 0$ за све $k \leq n$.

Пример. Сфера S^n је $n-1$-повезана. Дакле свако непрекидно пресликавање $f : S^k \to S^n$, $k \leq n-1$ је хомотопски тривијално. То можемо видети на следећи начин. Свако непрекидно пресликавање CW комплекса је хомотопно пресликавању које ћелије димензије k слика у ћелије највише димензије k (целуларно пресликавање). CW-декомпозиција сфере S^n је тачка и диск D^n. То значи да је пресликавање f хомотопно прескивању које слика D^k диск у тачку, дакле константном пресликавању.

6. Показати да је $SU(n)/SO(n)$ 1-повезан.

7. Користећи тачан низ фибрације, показати да је фундаментална група Лагранжевог грасманијана $\mathbb{Z}$.

Дистрибуције

Дефиниција. Дистрибуција $D \subset TM$ на глаткој многострукости M је **интеграбилна** ако постоји подмногостукост $N \subset M$ тако да је $D = TN$.

Дефиниција. Дистрибуција $D \subset TM$ на глаткој многострукости M је **инволутивна** ако за све $X, Y \subset D$ важи и $[X, Y] \in D$.

1. Показати да је свака интеграбилна дистрибуција инволутивна.

Фробениусова теорема: Ако је дистрибуција инволутивна она је интеграбилна.

2. Доказати да контактна структура $\xi = \ker \alpha$ није интеграбилна дистрибуција. Упутство: користити формулу $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$. (Спивак 7.13.)

3. Нека је $C \subset M$ коизотропна подмногострукост симплектичке многострукости (M, ω). Дистрибуција $(TC)^{\perp}$ се назива карактеристична дистрибуција подмногострукости C (појам уведен на страни 25.) Доказати да је $(TC)^{\perp}$ интеграбилна. Упутство: користити формулу $d\omega(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)$. (Спивак 7.13.)

Симплектичка геометрија

1. Показати да је свака подмногострукост $C \subset (M, \omega)$ кодимензије 1 коизотропна.

2. Нека је $C = H^{-1}(c)$, за неку регуларну вредност $c \in \mathbb{R}$ функције $H : M \to \mathbb{R}$. Показати да је придружено Хамилтоново векторско поље X_H тангентно на $(TC)^{\perp}$. (Показати прво $T_pC = \ker dH(p)$, за све $p \in C$.)

3. Доказати Лему 3.14.

4. а) Показати да је скуп свих симплектоморфизама на симплектичкој многострукости (M, ω) Лијева група са C^{∞} топологијом.

б) Доказати да је Лијева алгебра ове Лијеве групе скуп свих симплектичких векторских поља.

5. Нека је (V, ω) симплектички векторски простор, $L \subset V$ Лагранжев подпростор и $U \subset V$ подпростор такав да је $L \subset U$. Показати да је U коизотропан. Примером показати да исто тврђење не важи на произвољној симплектичкојмногострукости.

Дивергенција векторског поља

Нека је M^n глатка многострукост и ω n-форма која нигде није нула (форма запремине) на M. Нека је X векторско поље на M. Јединствена функција f_X која задовољава $d(\iota_X\omega) = f_X\omega$ се назива **дивергенција векторског поља** и означава $divX$.

1. Испитати да ли дивергенција векторског поља зависи од избора форме запремине ω.

2. Показати $L_X\omega = divX\omega$.

3. Израчунати дивергенцију векторског поља, ако је $M = \mathbb{R}^n$ и $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

4. Наћи диференцијал (функције) дивергенције векторског поља.

Лијеве групе

Дефиниција. Група која има структуру глатке многострукости се назива **Лијева група**.

Дефиниција. На свакој Лијевој многострукости M дефинисана су пресликавања **лева и десна транслација** $L_g : M \to M$ и $R_g : M \to M$ са $L_g(p) = g*p$ и $R_g(p) = p*g$.

1. Нека је $X_e \in T_eG$ произвољан вектор тангентне равни T_eG, где је $e \in G$ неутрал групе G. Показати да је векторско поље дефинисано са $X_g := (dL_g)_e(X_e)$, $g \in G$ **лево-инваријантно** векторско поље (тј $X_{gh} = (dL_g)_h X_h$).

2. Показати да је тангентно раслојење Лијеве групе тривијално. (Показати $TG \cong G \times T_eG$.)

3. Да ли је сфера парне димензије Лијева група?

4. а) Показати да је скуп свих k-димензионих потпростора $\mathbb{R}^n$ једна многострукост. Назива се Грасманијан.

б) Како се зове ова многострукост ако је $k = 1$?

5. Показати да су следеће групе Лијеве $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $U(n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{R})$.

Риманова метрика

Дефиниција. Пресликавање $g : M \to (TM \times TM)^*$ на глаткој многострукости M се назива **Риманова метрика** ако за свака два векторска поља X и Y на M функција $g(X,Y) : p \in M \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ је глатка и ако за свако $p \in M$ пресликавање $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ је скаларни производ.

1. Имајући у виду да су домен и кодомен метрике g исти као код 2-форме, да ли је Риманова метрика 2-форма?

Теорема. Свака глатка многострукост допушта Риманову метрику.

Дефиниција. **Риманова многострукост** је глатка многострукост са придруженом Римановом метриком g.

Примери. - $\mathbb{R}^n$ са стандардним скаларним производом;
- $M_n(\mathbb{C})$ (као и $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $U(n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, где је $g(A,B) = \Re(trace(\bar{A}^T B))$.

2. Нека је (M,g) Риманова многострукост. Показати да је са $d_g : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_g(p,q) = \inf \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt,$$

где се инфимум узима по свим глатким кривама γ које спајајау тачке p и q, дефинисана метрика на M.

Дефиниција. На Римановој многострукости (M, g) дефинишемо **Леви-Чивита конексију** као оператор $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ који задовољава

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(X(g(Y,Z))+Y(g(X,Z))-Z(g(X,Y))+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X)+g(Z,[X,Y])).$$

Теорема. Леви-Чивита конексија је јединствена конексија без торзије и сагласна са метриком.

3. Проверити да је Леви-Чивита конексија заиста конексија, да је без торзије и да је сагласна са метриком.

4. Нека је (M, g) Риманова многострукост са Леви-Чивита конксијом ∇. Ако је $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$ и $\nabla_{\dot{\gamma}} Z = 0$ (тј. векторска поља Y и Z су паралелна дуж криве γ) онда је функција $g(Y, Z)$ константна дуж криве γ. (Упутство: користити да је ∇ сагласна са метриком g, дакле $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.)

Дефиниција. Геодезијска линија је крива γ таква да $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$.

Фундаментална теорема о егзистенцији и јединствености геодезијских: Нека је (M, g) Риманова многострукост. За сваку тачку $p \in M$ и сваки вектор $X_p \in T_pM$ постоји јединствена геодезијска крива $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ таква да је $\gamma(0) = p$ и $\dot{\gamma}(0) = X_p$.

5. Показати да су геодезијксе линије екстремале функционала $L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt$.

Дефиниција. Риманова метрика се назива **комплетна** ако за сваку тачку $p \in M$ и сваки вектор $X_p \in T_pM$ јединствена придружена геодезијска крива γ је дефинисана за свако $t \in \mathbb{R}$.

Пример. $(\mathbb{R}^n, g_{st})$ јесте комплетна, $(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, g_{st})$ није комплетна.

Теорема. Нека је (M, g) Риманова многострукост са индукованом метриком d_g. Тада је (M, d_g) је комплетан метрички простор ако и само ако је g комплетна Риманова метрика.

Ако фиксирамо базу $e_1, \ldots, e_n$ векторског простора T_xM онда се скаларни производ g_x може задати матрицом $g_{ij} = g_x(e_i, e_j)$. У локалној карти многострукости, скаларни производ се може задати матрицом функција $g_{ij}(x)$.

6. Показати да је матрица $[g_{ij}]$ позитивно дефинитна. Какве су сопствене вредности ове матрице? Какве су вредности на дијагонали ове матрице?

Метрика на котангентном раслојењу.

Ако је (M, g) Риманова многострукост онда се помоћу метрике g могу идентификовати T_xM и T_xM^*, за свако $x \in M$, помоћу пресликавања $v_x \in T_xM \mapsto g_x(v_x, \cdot) \in (T_xM)^*$.

1. Показати да је ово пресликавање бијекција.

На основу те идентификације, на природан начин се уводи Риманова метрика g^* на котангентном раслојењу $g_x^*(g_x(v_x,\cdot), g_x(u_x,\cdot)) = g_x(v_x, u_x)$.

2. Ако је матрица скаларног производа $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ дата са $[g_{ij}]$ показати да је матрица скаларног производа $g_x^* : (T_xM)^* \times (T_xM)^* \to \mathbb{R}$ инверзна матрици $[g_{ij}]$. Означавамо је са $[g^{ij}]$.

3. Нека је функција $H : T^*M \to \mathbb{R}$ дефинисана са $H(x, \eta_x) = \frac{1}{2} g_x^*(\eta_x, \eta_x)$. Доказати да је регуларни ниво функције H трансверзалан на Лиувилово векторско поље Y. (Показати $dH(Y) \neq 0$).

4. Показати да је регуларни ниво функције H контактна многострукост. Назива се косферно раслојење.

5. Нека је X_H Хамилтоново векторско поље придружено функцији H на симплектичкој многострукости T^*M. Нека је γ произвољна трајекторија векторског поља X. Показати да је

$$\nabla_{d\pi(\frac{d\gamma}{dt})} d\pi(\frac{d\gamma}{dt}) = 0.$$

(Теорема 3.34.) Шта је геометријска интерпретација овог резултата ако H схватимо као кинетичку енергију честице на T^*M а потенцијална енергија је нула?

6. Показати да ток Хамилтоновог векторског поља X_H пресликава регуларни ниво функције H у себе.

Градијент функције на Римановој многострукости $f : M \to \mathbb{R}$ дефинишемо као јединствено векторско поље које задовољава $df(v) = g(v, \cdot)$. Означавамо га ∇f.

Лапласијан функције на Римановој многострукости је дивергенција векторског поља ∇f. Форма запремине за коју дефинишемо дивергенцију се у локалним координатама дефинише као $\omega = \sqrt{|\det[g_{ij}]|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

1. Израчунати градијент и Лапласијан функције, ако је $M = \mathbb{R}^n$ са стандардним скаларним производом.

<u>Квантизација функција (5.3.)</u>

0. Показати да $C^\infty(M)$ допушта структуру комутативне асоцијативне алгебре, где је M произвољна многострукост.

1. Ако је (M, ω) симплектичка многострукост, показати да $C^\infty(M)$ допушта структуру Поасонове алгебре.

2. Показати да $\mathcal{A}$, скуп свих симетричних оператора на неком Хилбертовом простору допушта структуру комутативне неасоцијативне алгебре.

Показати да су на алгебри $\mathcal{A}$ дефинисане Лијеве заграде са $[A, B] = \frac{i}{\hbar}(AB - BA)$, за свака два оператора A и B. Дакле, $\mathcal{A}$ је бесконачно-димензиона Лијева алгебра.

Дефиниција (5.33) Пресликавање $\rho : C^\infty(M) \to \mathcal{A}$ се назива **квантизација функције** ако а. $\rho(1) = id$.

б. $\rho(\{f, g\}) = [\rho(f), \rho(g)]$.

ц. Комплетан скуп инволутивних функција се пресликава на комплетан скуп оператора који комутирају.

3. а) Показати да је свака функција у инволуцији са константном функцијом ($\{f, c\} = 0$) и да сваки оператор комутира са идентитетом ($[A, id] = 0$).

б) За функције q, p, H где је $M = T^*\mathbb{R}$ (или $M = T^*\mathbb{R}^n$) показати да оператори $\hat{q} = \rho(q), \hat{p} = \rho(p), \hat{H} = \rho(H)$ задовољавају особину б. квантизације.

Приметимо да су ови оператори дефинисани на $\mathbb{R}$ (а не $T^*\mathbb{R}$).

<u>Котангентно раслојење.</u>

1. Нека је $\tau : M \to T^*M$ произвољна 1-форма. Показати да $\tau^* : \Omega^1(T^*M) \to \Omega^1(M)$ задовољава $\tau^*\lambda_{can} = \tau$.

2. Нека је $\iota : L \to T^*M$ утапање тако да је $\iota^* d\lambda_{can} = 0$ (Лагранжево утапање). Дакле $\iota^*\lambda_{can}$ је затворена 1-форма. Нека је $\pi|_L : T^*M \to M$ дифеоморфизам. Показати да је $\iota^*\lambda_{can}$ тачна форма ако и само ако је $\iota(L) = dS(M)$, за неку функцију $S : M \to \mathbb{R}$.

(L, ι) називамо тачно Лагранжево утапање.

3. Примером показати зашто није довољно да је ι само имерзија, а не утапање.

<u>Квантизација стања на $T^*\mathbb{R}$.</u>

Нека је функција $H : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ и $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција чији је диференцијал решење Хамилтонове једначине $H(q, p) = E$ (дакле $H(dS(\mathbb{R})) = E$).

1. Показати да је $dS(\mathbb{R}) \subset T^*\mathbb{R}$ Лагранжева подмногострукост, за сваку глатку функцију S.

Подсетимо се

- $\varphi = e^{iS/\hbar}$ је сопствени вектор и E је сопствена вредност оператора $\hat{H}$ (до на $O(\hbar)$).

- Ако је још $a^2 S'' + 2a'S' = 0$ за неку функцију $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, онда је $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar} a(x)$ сопствени вектор и E је сопствена вредност оператора $\hat{H}$ (до на $O(\hbar^2)$) (зад. 2.). Видели смо да претходна једнакост значи да је форма $\pi|^*_{dS(\mathbb{R})} a^2 dx$ инваријантна дуж трајекторија векторског поља X_H рестрикованог на $dS(\mathbb{R})$, где је $\pi : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ пројекција (зад. 5.).

Приметимо да је $\pi|_{dS(\mathbb{R})}$ бијекција.

Ако је форма $a^2 dx$ инваријантна у односу на неко векторско поље X, не мора да значи да је и форма adx инваријантна. Такође, ако је adx инваријантна, не мора да значи да је $a^2 dx$ инваријантна. (Само ако су и функција a и форма dx инваријантне, онда је $a^2 dx$ инваријантна.) Зато се уводи полу-густина. Када кажемо да је полу-густина $a|dx|^{\frac{1}{2}}$ инваријантна у односу на X, мислимо да је је форма $a^2 dx$ инваријантна у односу на X.

Ако је $\hat{H}$ оператор на Хилбертовом простору над $M = \mathbb{R}$, нпр $L^2(\mathbb{R})$, онда њему можемо придружити оператор $\hat{\hat{H}}$ на Хилбертовом простору над $\Omega^1(\mathbb{R})$ дефинисан са

$$\hat{\hat{H}}(adx) = \hat{H}(a)dx.$$

Еквивалентно, ако оператор $\hat{\hat{H}}$ дефинишемо на полу-густинама

$$\hat{\hat{H}}(a|dx|^{\frac{1}{2}}) = \hat{H}(a)|dx|^{\frac{1}{2}}.$$

Ако је функција φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$ онда је полу-густина $\varphi|dx|^{\frac{1}{2}}$ сопствени вектор оператора $\hat{\hat{H}}$.

Дефиниција. Квантизација стања $(dS(\mathbb{R}), \tilde{a} = \pi|^*_{dS(\mathbb{R})}a|dx|^{\frac{1}{2}})$, где је $\mathcal{L}_{X_H|_{dS(\mathbb{R})}}\tilde{a} = 0$, је сопствени вектор $\varphi = e^{iS/\hbar}a|dx|^{\frac{1}{2}}$ оператора $\hat{\hat{H}}$.

• Хоћемо сада да уопштимо претходну дефиницију на ширу класу стања $(L, \tilde{a})$ где је L произвољна утопљена Лагранжева подмногострукост и $\tilde{a}$ полу-густина на L којој ћемо доделити неке особине.

Претпоставимо да је $\pi|_L = \pi \circ \iota : L \to \mathbb{R}$ бијекција. Онда је и $\pi|^*_L : \Omega^1(\mathbb{R}) \to \Omega^1(L)$ бијекција. Нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L дата са $\pi|^*_L a|dx|^{\frac{1}{2}} = \tilde{a}$, где је $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција. Дакле $a|dx|^{\frac{1}{2}} = (\pi|^{-1}_L)^*\tilde{a}$. (У књизи се често под ознаком a води и функција и полу-густина.)

2. Нека је $\iota : L \to T^*\mathbb{R}$ Лагранжево утапање и $\pi \circ \iota$ бијекција.
а) Показати да је $L = dS(\mathbb{R})$, за неку функцију $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
б) Ако је $L = H^{-1}(E)$ и ако је полу-густина $\tilde{a} = \pi|^*_L a|dx|^{\frac{1}{2}}$ инваријантна у односу на ток векторског поља $X_H|_L$ (тј $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$,) показати да је тада форма a^2dx инваријантна у односу на ток векторског поља $d\pi(X_H|_L)$ и да важи $a^2S'' + 2a'S' = 0$.
в) Показати да је $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}a(x)$ сопствени вектор и E сопствена вредност оператора $\hat{H}$ (до на $O(\hbar^2)$).
г) Наћи сопствени вектор који одговара сопственој вредности E придруженог оператора $\hat{\hat{H}}$.

Дефиниција. Нека је $L \subset T^*\mathbb{R}$ произвољна утопљена Лагранжева подмногострукост таква да је $\pi|_L$ бијекција, $H|_L = E$ и $\tilde{a}$ полу-густина на L таква да $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$ и $(\pi|^{-1}_L)^*\tilde{a} = a|dx|^{\frac{1}{2}}$, за неку функцију $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Квантизација стања** $(L, \tilde{a})$ је сопствени вектор $\varphi|dx|^{\frac{1}{2}} = e^{iS/\hbar}a|dx|^{\frac{1}{2}}$ оператора $\hat{\hat{H}}$.

Пошто је $L = dS(\mathbb{R})$ онда је $\iota^*\lambda$ тачна 1-форма (2. зад. котангентног раслојења), дакле $\iota^*\lambda = d\phi$, за неку функцију ϕ.

3. а) Показати да је $d\phi = d(S \circ \pi|_L)$, тј. $(\pi|^{-1}_L)^*\phi = S + const$.
б) Показати да је квантизација стања $(L, \tilde{a})$ једнака $(\pi|^{-1}_L)^*e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$.

4. Нека је $\iota : L = \mathbb{R} \to T^*R$ дато са $\iota(x) = (x, x^4)$. Нека је $H(q, p) = p - q^4 + E$.
а) Наћи Хамилтоново векторско поље X_H $(\omega = dp \wedge dq)$. Наћи ток овог векторског поља.

б) Дати пример полу-густине $\tilde{a}$ на L која је инваријантна у односу на $X_H|_L$.
в) Описати квантизацију стања $(L, \tilde{a})$, за полу-густину $\tilde{a}$ из б).

5. Уопштити претходне дефиниције и тврђења за $T^*\mathbb{R}^n$.

Квантизација стања на T^*M.

Нека је M Риманова многострукост.

Приметимо да Задатак 2. котангентног раслојења каже $\iota^*\lambda_{can} = d\phi$, за функцију $\phi : L \to \mathbb{R}$ ако и само ако $\iota(L) = dS(M)$, где је $S = \phi \circ \pi|_L^{-1}$. Ознака (L, ι, ϕ) значи да је $\iota : M \to T^*M$ тачно Лагранжево утапање и да је $\iota^*\lambda_{can} = d\phi$.

Нека је функција $H : T^*M \to \mathbb{R}$ дефинисана са $H(x, \eta_x) = \frac{1}{2} g_x^*(\eta_x, \eta_x) + V(x)$, $x \in M$ и нека је придружени оператор на M дефинисан са $\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V \cdot \psi$, где је $\psi : M \to \mathbb{R}$ и Δ Лапласијан на M.

1. Нека је (L, ι, ϕ) тачно Лагранжево утапање и $\pi|_L$ бијекција. Нека је $H|_L = E$ и нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L таква да је $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$. Показати да је полу-густина φ дефинисана са $\varphi = (\pi|_L^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$ сопствени вектор и E сопствена вредност оператора $\hat{\hat{H}}$, до на $O(\hbar^2)$.

Приметимо да је $\varphi = e^{iS/\hbar} a |dx|^{\frac{1}{2}}$, где су $a, S : M \to \mathbb{R}$ функције дате са $S = \phi \circ \pi|_L^{-1}$ и $a|dx|^{\frac{1}{2}} = (\pi|_L^*)^{-1}\tilde{a}$.

Дефиниција. Нека је (L, ι, ϕ) тачно Лагранжево утапање и $\pi|_L$ бијекција. Нека је $H|_L = E$ и нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L таква да је $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$. **Квантизација стања** $(L, \iota, \phi, \tilde{a})$ је сопствени вектор $\varphi = (\pi|_L^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$ оператора $\hat{H}$.

Приметимо да ако је ϕ примитивна за $\iota^*\lambda_{can}$, онда је и $\phi + const$ примитивна.

2. Када су квантизације стања $(L, \iota, \phi_1, \tilde{a})$ и $(L, \iota, \phi_2, \tilde{a})$ једнаке?

• Хоћемо сада да уопштимо претходну дефиницију на Лагранжева утапања која не морају бити тачна (али и даље је $\pi|_L$ бијекција).

3. Показати да је свака затворена k-форма на многострукости локално тачна (Поенкареова лема).

Лиувилова класа је 1-форма $\lambda_L = \iota^*\lambda_{can}$, где је $\iota : L \to T^*M$ утапање.

Нека је $L = \cup_{j \in \mathcal{J}} L_j$ покривач из Поенкареове леме. Дакле, $\lambda_L|_{L_j} = d\phi_j$, за свако $j \in \mathcal{J}$. Претпоставимо да постоји $\hbar > 0$ тако да за све $i, j \in \mathcal{J}$ за које је $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ важи $\phi_i - \phi_j \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}$. Називамо га допустиво $\hbar$.

Дакле, квантизација стања $(L_j, \iota, \phi_j, \tilde{a}|_{L_j})$ (где је $\pi|_{L_j}$ бијекција, $H|_{L_j} = E$ и $\mathcal{L}_{X_H|_{L_j}}\tilde{a}|_{L_j} = 0$), је $\varphi_j = (\pi|_{L_j}^{-1})^* e^{i\phi_j/\hbar}\tilde{a}|_{L_j}$.

4. Нека за све $i, j \in \mathcal{J}$ за које је $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ важи $\phi_i - \phi_j \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}$, где су $\phi_i : L_i \to \mathbb{R}$ произвољне функције. Показати да је са $\phi|_{L_j} = \phi_j$ добро дефинисана функција $\phi : L \to \mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$.

Дефиниција. Нека је (L, ι) Лагранжево утапање и $\pi|_L$ бијекција. Нека је $H|_L = E$ и нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L таква да је $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$. Нека је L_j, $j \in \mathcal{J}$, покривач из Поенкареове леме. Дакле, $\lambda_L|_{L_j} = d\phi_j$, за свако $j \in \mathcal{J}$. Нека је $\hbar$ допустиво. **Квантизација стања** $(L, \iota, \tilde{a})$ је функција $\varphi : M \to \mathbb{R}$ дефинисана са $\varphi = (\pi^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$.

• Хоћемо сада да ослабимо услов $\pi|_L$ је бијекција.

5. а) Нека је $\iota : L \to T^*M$ Лагранжева имерзија. Нека је $p \in M$ регуларна вредност пресликавања $\pi \circ \iota : L \to M$. Показати да постоји контрактибилна отворена околина $U \subset M$ око тачке p таква да је $(\pi \circ \iota)^{-1}(U) = \sqcup_{j=1}^{k} L_j \subset L$ и $\pi \circ \iota : L_j \to U$ је бијекција, $j = 1, \ldots, k$.
б) Пошто је $L_j \subset L$ и U контрактибилан скуп, каква је форма $\iota^*\lambda_{can}|_{L_j}$?

Дефиниција. Нека је (L, ι) Лагранжева имерзија Нека је $H|_L = E$ и нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L таква да је $\mathcal{L}_{X_H|_L}\tilde{a} = 0$. Нека је $U \subset M$ околина и декомпозиција $L = \sqcup L_j$ из задатка 5. Нека је V_i покривач из Поенкареове леме и $\hbar$ допустиво и функција ϕ дефинисана на горе описан начин. **Преквантизација стања** $(L, \iota, \tilde{a})$ је полу-густина дефинисана на скупу U са $\sum_{j=1}^{k} (\pi|_{L_j}^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}|_{L_j}$.

6. (Напомена/ Коментар): у књизи (39. страна) пише да се сумира по V_i, тачније $\pi|_{V_i}^{-1}$. Мислим да је то грешка, јер $\pi|_{V_i}$ не мора бити бијекција.

7. Нека је $\iota : L = \mathbb{R} \to T^*R$ дато са $\iota(x) = (x^4, x^3)$. Нека је $H(q, p) = p^4 - q^3$.
а) Наћи X_H.
б) Дати пример полу-густине $\tilde{a}$ на L која је инваријантна у односу на $X_H|_L$.
в) Описати преквантизацију стања $(L, \iota, \tilde{a})$, за полу-густину $\tilde{a}$ из б) и за погодно изабран скуп U.

Масловљева корекција

Нека је $\iota : L \to T^*\mathbb{R}$ Лагранжева имерзија. Идентификујемо $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p$ и нека је $\pi_p : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}_p$ (вертикална) пројекција. Претпоставимо да је $\pi_p \circ \iota : L \to \mathbb{R}_p$ дифеоморфизам.

1. Показати да је ι тачна Лагранжева имерзија у односу на форму qdp.

Дефиниција. Нека је (L, ι) Лагранжева имерзија таква да је $\pi_p \circ \iota$ дифеоморфизам. Нека је $\tilde{a}$ полу-густина на L инваријантна у односу на Хамилтоново векторско поље X_H где је H Хамилтонова функција. **Квантизација стања** $(L, \iota, \tilde{a})$ је

$$I_\hbar(L, \iota, \tilde{a}) = (\pi_p|_L^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$$

где је ϕ примитивна функција за $\iota^*(qdp)$.

Приметимо да је добијена полу-густина на $\mathbb{R}_p$. Применом квантизације до сада смо добијали полу-густину на $\mathbb{R}_q$. Да бисмо прешли са параметра p на q користимо Фуријеове трансформације.

Нека је функција $B(p)$ таква да је $B(p)|dp|^{\frac{1}{2}} = (\pi_p|_L^{-1})^* e^{i\phi/\hbar}\tilde{a}$. **Масловљева квантизација стања** $(L, \iota, \tilde{a})$ је

$$J_\hbar(L, \iota, \tilde{a}) = \mathcal{F}_\hbar^{-1}(B)|dq|^{\frac{1}{2}},$$

где је $\mathcal{F}_\hbar^{-1}$ инверзна Фуријеова трансформација.

2. Нека је $\iota(x) = (x^2, x)$. Нека је $\tilde{a} = |dp|^{\frac{1}{2}}$. Одредити квантизацију као и Масловљеву квантизацију стања $(L = \mathbb{R}, \iota, \tilde{a})$.

3. Нека је $\iota(x) = (x, x)$. Нека је $\tilde{a}$ константна полу-густина. Одредити квантизацију као и Масловљеву квантизацију стања $(L = \mathbb{R}, \iota, \tilde{a})$.

Чехова кохомологија

Описаћемо пресликавање де Рамове кохомологије степена 1 на Чехову кохомологију степена 1.

Нека је $\lambda \in H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ произвољна класа затворене 1-форме. Нека је $\mathfrak{U} = \{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ добар покривач многострукости M. Дакле, сваки коначан пресек скупова је или празан или контрактибилан. Самим тим је и сваки скуп U_α контрактибилан. На сваком од њих је затворена форма λ и тачна. Дакле, $\lambda|_{U_\alpha} = df_\alpha$. На скупу $U_\alpha \cap U_\beta$ имамо $\lambda = df_\alpha = df_\beta$. Дакле, $d(f_\alpha - f_\beta) = 0$ тј $f_\alpha - f_\beta = c(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ (функције се разликују за константу). Дефинишемо пресликавање c на скупу свих парова из $\mathcal{A}$ које пар два индекса пресликава у константу на горе описан начин. Пресликавање c је коланац Чехове кохомологије.

1. Показати да је $\delta c = 0$, где је $\delta c(\alpha, \beta, \gamma) = c(\alpha, \beta) + c(\beta, \gamma) + c(\gamma, \alpha)$.

Нека је $\Phi : H^1_{DR}(M, \mathbb{R}) \to H^1_{\mathfrak{U}}(M, \mathbb{R})$ пресликавање дефинисано са $\Phi([\lambda]) = [c]$, где је $[c]$ класа свих коланаца c' таквих да је $c - c' = \delta c_0$, где је c_0 коланац тако да важи $\delta c_0(\alpha, \beta) = c_0(\alpha) - c_0(\beta)$.

2. Показати да је Φ добро дефинисано: не зависи од избора 1-форме из класе $[\lambda]$ и не зависи од избора примитивне функције f_α на скупу U_α.

3. Показати да је Φ бијекција.

Раслојења

Нека су E, M и F тополошки простори. (π, E, M) се назива **раслојење** ако је $\pi : E \to M$ сурјективно пресликавање тако да за све $x \in M$ постоји отворена околина $x \in u \subset M$ и хомеоморфизам $\Phi : \pi^{-1}(u) \to u \times F$ где $\Phi : \pi^{-1}(x) \mapsto \{x\} \times F$. Пресликавање Φ се назива локална тривијализација.

1. Показати да је свако раслојење фибрација.

2. Дати пример фибрације која није раслојење.

Непрекидно пресликавање $s : M \to E$ које сваку тачку $x \in M$ пресликава у тачку на фибри $\pi^{-1}(x)$ се назива **сечење**. Дакле, $\pi \circ s = id$. Скуп свих сечења раслојења E означавамо са $\Gamma(E)$.

Ако су $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(u_\alpha) \to u_\alpha \times F$ и $\Phi_\beta : \pi^{-1}(u_\beta) \to u_\beta \times F$ локалне тривијализације онда је

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x,p) = (x, g_{\alpha\beta}(x)p),$$

где је $g_{\alpha\beta} : u_\alpha \cap u_\beta \to Homeo(F)$ непрекидно пресликавање. Ако постоје локалне тривијализације раслојења, тако да за све α и β важи $g_{\alpha\beta} : u_\alpha \cap u_\beta \to G$ где је G група која дејствује на F, онда се G назива **структурна група** раслојења.

Векторска раслојења. Раслојење $\pi : E \to M$ где је фибра $F = \pi^{-1}(x)$ (за било које $x \in M$) векторски простор $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) се назива векторско раслојење.

Пример. Тангентно и котангентно раслојење су векторска раслојења; $E = M \times \mathbb{R}^n$ је тривијално векторско раслојење.

3. Показати да је Мебијусова трака векторско раслојење.

Свако векторско раслојење допушта сечење. Скуп свих сечења $\Gamma(E)$ је бесконачно димензиони векторски простор.

Пример. Сечења тангентног раслојења су векторска поља, сечења котангентног раслојења су 1-форме.
Нека је $E = M \times \mathbb{R}^n$ тривијално векторско раслојење. Тада постоје $s_1, \ldots, s_n$ сечења дефинисана тако да $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ чине базу простора $x \times \mathbb{R}^n$.

Структурна група векторског раслојења је $GL(n, \mathbb{R})$ (или $GL(n, \mathbb{C})$). Та група се може редуковати у зависности од структуре на фибрама раслојења. Код векторских раслојења са Еуклидском метриком је $O(n)$. Код симплектичких векторских раслојења је $Sp(2n)$.

Главна раслојења. Глатко раслојење $\pi : E \to M$ (E и M су глатке многострукости и π је глатко пресликавање) где је фибра $G = \pi^{-1}(x)$ Лијева група и где је и структурна група G се назива главно раслојење. Дакле, G дејствује на E тако што дејствује на сваку фибру и пресликава је у себе. Еквивалентно, главно раслојење се може дефинисати као глатко раслојење коме је придружена Лијева група G која на сваку фибру делује слободно и транзитивно.

4. Показати да је Хопфова фибрација $\pi : S^3 \to S^2$ главно раслојење, где је $G = S^1$. Ако идентификујемо $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ стереографском пројекцијом, онда је $\pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, за $z_2 \neq 0$, и $\pi(z_1, 0) = \infty$.

5. Показати да главно раслојење допушта сечење ако и само ако је тривијално ($E \cong M \times G$).

6. Показати да је пресликавање $\pi : SO(n+1) \to S^n$, дефинисано са $\pi A = Ax$, $x \in S^n$, главно раслојење са фибром $SO(n)$.

7. Показати да је пресликавање $\pi : U(n+1) \to S^{2n+1}$, дефинисано са $\pi A = Ax$, $x \in S^{2n+1}$, главно раслојење са фибром $U(n)$.

Конексије и кривине на раслојењу

Нека је $\pi : E \to M$ глатко раслојење. Посматрамо диференцијал $d\pi : TE \to TM$. Нека је $VE \overset{def}{=} \ker d\pi$ (вертикална дистрибуција). Тада је $VE \subset TE$ подраслојење тангентног раслојења TE. **Конексија** раслојења E је дистрибуција HE таква да важи $TE = VE \oplus HE$. Називамо је хоризонтална дистрибуција. Приметимо да ако је димензија фибре $k = m - n$ где је $\dim E = m$ и $\dim M = n$ онда је $\dim HE = 2n$ и $\dim VE = 2k$. Еквивалентно, конексију можемо задати и као пројекцију $K : TE \to VE$. Дакле, $HE = \ker K$. Нека је $H : TE \to HE$ пројекција.

Конексија главног G раслојења задовољава и услов

$$dL_g(H_pE) = H_{gp}E,$$

за све $p \in E$ и све $g \in G$. Дакле, хоризонтална дистрибуција је инваријантна у односу на линеаризовано дејство групе G.

Свакој конексији можемо да придружимо и 1-форму конексије $\alpha \in \Omega^1(E)$ такву да је $\ker \alpha_p = H_pE$. Пошто је дистрибуција HE инваријантна у односу на дејство G онда је и α инваријантна тј $\mathcal{L}_G\alpha = 0$. Приметимо да конексија није јединствена.

Кривина раслојења придружена 1-форми конексије α је 2-форма $\omega_\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})$ која задовољава $\pi^*\omega_\alpha = d\alpha$.

Класификација главних раслојења

Нека је $p : E \to B$ главно G-раслојење и $f : X \to B$ непрекидно пресликавање. Тада постоји индуковано главно G-раслојење $f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$. Пројекција $p : f^*E \to X$ је дефинисана са $p(x, e) = x$.

1. Показати да ако су f и g хомотопна пресликавања онда су раслојења f^*E и g^*E изоморфна.

Теорема. За сваку Лијеву групу G постоје класификујући простори EG и BG и главно G-раслојење $\pi : EG \to BG$ такви да важи следеће. Нека је M произвољна глатка многострукост. Са $\mathcal{G}_M$ означимо класе свих главних G-раслојења над M (изоморфна раслојења чине једну класу) и са $[M, BG]$ класе хомотопије пресликавања $f : M \to B$. Пресликавање $\Phi : [M, BG] \to \mathcal{G}_M$ дефинисано са $\Phi(f) = f^*EG$ је бијекција.

2. Показати да је свако главно раслојење над контрактибилном многострукости M тривијално.

Главна S^1-раслојења

Важи $BS^1 = \mathbb{CP}^\infty$ и $[M, BS^1] \cong H^2(M, \mathbb{Z})$.

3. Показати да тачној 2-форми одговара тривијално раслојење.

На основу претходне теореме следи да су главна S^1-раслојења над M у бијекцији са $H^2(M, \mathbb{Z})$. Јединствени елемент $c(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ придружен главном раслојењу се назива **прва Чернова класа** овог раслојења.

Ако је M површ онда је $H^2(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ дакле сваки цео број одређује јединствено (до на изоморфизам раслојења) главно S^1-раслојење над M. Овај цео број се назива **Ојлеров број** раслојења.

4. Показати да генератор $[1] \in H^2(S^2,\mathbb{Z})$ одговара Хопфовој фибрацији $S^3 \to S^2$.

Генерално, елементу $[k] \in H^2(S^2,\mathbb{Z})$ одговара раслојење $L_k \to S^2$, где је $L_k = S^3/\mathbb{Z}_k$.

5. Показати да свако главно S^1-раслојење допушта конексију α такву да је $\alpha(X) = 1$, где је X векторско поље које генерише дејство (дакле X је тангентно на орбите, па је $d\pi(X) = 0$, то је управо вертикална дистрибуција раслојења).

6. а) Наћи векторско поље X које генерише дејство S^1 на S^3 које задаје Хопфову фибрацију.
б) Наћи конексију α такву да је $\alpha(X) = 1$.
(Дејство круга S^1 на S^3 које задаје Хопфову фибрацију је дато са $e^{i\theta} * (z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$. Дакле, трајекторије векторског поља X су дате са $\varphi_\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$.)

7. Ако су α и β две конексије S^1-раслојења такве да $\alpha(X) = 1$ и $\beta(X) = 1$, показати да одговарајуће форме конексије ω_α и ω_β припадају истој класи де Рамове 2-кохомологије.

Черн-Вејлова теорема. Ако је α форма конексије S^1-раслојења $\pi : E \to M$ таква да је $\alpha(X) = 1$ онда одговарајућа форма конексије ω_α припада класи де Рамове 2-кохомологије која је задата првом Черновом класом (тј. $[\omega_\alpha] = c(E) \in H^2(M,\mathbb{Z})$).

Преквантизација симплектичке многострукости

Нека је дата симплектичка многострукост (M,ω) таква да $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$. Нека је $\pi : E \to M$ главно S^1-раслојење над M коме је прва Чернова класа управо $[\omega]$. Ово раслојење називамо **преквантизација симплектичке многострукости**.

1. Показати да преквантизација E допушта конексију α која је контактна форма на E.

Дакле, преквантизација симплектичке многострукости је контактна многострукост.

2. Наћи контактну форму на S^3 која је конексија Хопфове фибрације.

3. Преквантизација котангентног раслојења. Пошто је $d\lambda_{can}$ тачна 2-форма, дакле задаје тривијалну класу на $H^2(T^*M,\mathbb{Z})$ следи да је прва Чернова класа преквантизације тривијална. Дакле, раслојење је тривијално, тј $E = T^*M \times S^1$. Показати да је конексија $\alpha = \pi^*\lambda_{can} + d\theta$ контактна форма на E.