Гама и Бета функција.

Гама функција је дефинисана са

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Пример. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$

Одредимо шта су домен и кодомен ове функције. Приметимо да је подинтегрална функција ненегативна, па је и њен интеграл ненегативан. Даље, ако би тај интеграл био нула онда би и подинтегрална функција била једнака нули, што следи из Става са 3. часа. Закључујемо да је дати интеграл увек строго позитиван, па је кодомен функције Гама скуп $(0,\infty)$.

Домен Гама функције је скуп свих $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је функција Γ добро дефинисана (дакле коначна). То је заправо скуп свих $\alpha \in \mathbb{R}$ за које несвојствени интеграл конвергира. Пошто дати несвојствени интеграл има потенцијално два сингуларитета његову конвергенцију ћемо испитати раздвајањем на два

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

- Интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Приметимо да је

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

па на основу другог критеријума конвергенције (случај $c = 1$) следи да интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ конвергира ако и само ако конвергира интеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}dx.$$

Овај интеграл конвергира ако је $\alpha > 0$ (погледати први пример са 5. часа).

- Интеграл $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Приметимо да за свако $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = 0,$$

при чему последњу једнкост можемо израчунати Лопиталовим правилом. На основу другог критеријума конвергенције (случај $c = 0$) следи да из конвергенције интеграла

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

конвергира и интеграл $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, за свако $\alpha \in \mathbb{R}$.

Почетни интеграл $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ конвергира ако и само ако конвергирају оба интеграла $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ и $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Закључујемо интеграл $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ конвергира за све $\alpha > 0$, па је домен Гама функције скуп $(0,\infty.)$

Дакле, имамо добро дефинисану Гама функцију

$$\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty).$$

Став. За свако $\alpha > 0$ важи

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Доказ. Користимо парцијалну интеграцију

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^\alpha \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} \\ &= -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1}(-e^{-x})dx \\ &\overset{*}{=} \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Једнакост $*$ важи зато што је $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha e^{-x} = 0$ и $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$. $\square$

Последица. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Доказ. Користимо индукцију. $\Gamma(1) = 1 = 0!$, дакле, дата претпоставка је тачна за $n = 1$. Претпоставимо да је тачно $\Gamma(n) = (n-1)!$. Треба показати $\Gamma(n+1) = n!$. Заиста,

$$\Gamma(n+1) \overset{*1}{=} n\Gamma(n) \overset{*2}{=} n(n-1)! = n!,$$

при чему једнакост $*1$ важи на основу претходног става, а једнакост $*2$ на основу индуктивне хипотезе. $\square$

Теорема. За свако $\alpha \in (0,1)$ важи

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Пример. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin\pi/2}} = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример. Поасонов интеграл. Неодређени интеграл $\int e^{-x^2}dx$ није интеграл елементарне функције, тј. не постоји елементарна функција F таква да је $F'(x) = e^{-x^2}$. Међутим, несвојствени интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$$

можемо израчунати. Приметимо прво да је подинтегрална функција парна, дакле

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Покажимо прво да несвојствени интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ конвергира.

Приметимо да је $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, за свако $x \geq 1$. Пошто је $\int_1^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_1^\infty = e^{-1}$, онда на основу првог поредбеног критеријума и интеграл $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ конвергира. Пошто је $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$, а први интеграл са десне стране нема сингуларитета, па је коначан, закључујемо и да је интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ коначан.

Сада ћемо израчунати његову вредност уз помоћ Гама функције.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следи,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Бета функција је дефинисана са

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Као и код Гама функције, подинтегрална функција је ненегативна и различита од нула функције, па је дати интеграл увек позитиван. Одредимо домен бета функције, тј. одредимо за које вредности α и β конвергира дати интеграл. Пошто интеграл има два потенцијална сингуларитета раздвојићемо га на два

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

- Интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$. Приметимо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

па на основу другог критеријума конвергенције (случај $c = 1$) следи да интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ конвергира ако и само ако конвергира интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}dx.$$

Овај интеграл конвергира ако је $\alpha > 0$.

- Интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$. Приметимо да је

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(1-x)^{\beta-1}} = 1,$$

па поново на основу другог критеријума конвергенције (случај $c = 1$) следи да интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ конвергира ако и само ако конвергира интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\beta-1}dx.$$

У последњи интеграл уводимо смену $1 - x = t$, па следи

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\beta-1} dt.$$

Дакле, овај интеграл конвергира ако је $\beta > 0$.

Закључујемо да почетни интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ конвергира ако и само ако важи $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Дакле, домен Бета функције је $(0,\infty)\times(0,\infty) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, па имамо добро дефинисану Бета функцију

$$B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty).$$

Став. За свако $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ важи

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$$

Доказ.

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{1+y} \\ dx = \frac{1}{(1+y)^2}dy \end{array} \right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta-1}} \frac{1}{(1+y)^2} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy. \end{aligned}$$

Теорема. (Веза између Гама и Бета функције.) За све $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ важи

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Пример. Израчунати $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^4 \\ dx = \frac{t^{-3/4}}{4}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{t^{-3/4}}{1+t}dt \\ &= \frac{1}{4}B\Big(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\Big) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$