1. домаћи

1. Описати неке од експеримената који показују да електрони имају природу таласа.

2. а) Показати да је комутатор два векторска поља на $\mathbb{R}^2$ такође векторско поље на $\mathbb{R}^2$.

б) Показати да је комутатор два Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^2$ такође Хамилтоново векторско поље.

3. Показати да је укупна енергија система на $\mathbb{R}^n$ очувана ако и само ако је сила дефинисана другим Њутновим законом конзервативно векторско поље.

4. Показати Лајбницово правило и Јакобијев идентите Поасонових заграда функција на $\mathbb{R}^2$.

Дивергенција векторског поља X је јединствена функција која задовољава једнакост

$$divX\omega = d(\iota X\omega) = \mathcal{L}_X\omega,$$

при чему је $\mathcal{L}_X\omega$ Лијев извод форме запремине ω у правцу векторског поља X.

5. а) Показати да је дивергенција векторског поља $X = (X_1, \ldots, X_n)$ на $\mathbb{R}^n$ дефинисана у односу на форму $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ заправо

$$divX = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

б) Показати да Хамилтонов ток $(x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ дефинисан са

$$\dot{x}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$$

чува форму запремине $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n$ на $\mathbb{R}^{2n}$, при чему је Хамилтонова функција $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + V(x_1, \ldots, x_n).$$

2. домаћи

1. Показати да је оператор импулса P симетричан на простору функција са компактним носачем (или на простору функција са доменом $[a, b]$ и граничним условом $f(a) = f(b) = 0$).

2. Посматрамо хармонијски осцилатор и Хамилтонијан дефинисан са

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + k\frac{x^2}{2},$$

при чему је k константа опруге.

а) Одредити оператор $\hat{H}$ добијен квантовањем Хамилтонијана.

б) Показати да је $\hat{H}$ симетричан оператор на простору функција $\mathcal{L}^2([0, L])$, при чему су функције једнаке нули на граници интервала. (Или на $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, при чему су функције са компактним носачем).

в) Ако је фреквенција осциловања дата са

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

показати да су

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \text{ и } \lambda_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

као и

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x\psi_0(x) \text{ и } \lambda_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

сопствени вектор и придружена сопствена вредности овог оператора.

г) Показати да су ψ_0 и ψ_1 ортогоналне функције.

д) Ако се дати осцилатор описује стањем ψ_0 одредити очекивану вредност Хамилтонијана осцилатора, тј честице.

3. Таласна функција $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ описује честицу која се креће по кругу и којој је момент $p = k\hbar$, при чему је k фреквенција.

а) Проверити то уз помоћ постулата квантне механике.

б) Проверити да је дата таласна функција нормализована.

в) Да ли је дата таласна функција сопствени вектор оператора момента P? Ако јесте, која је придружена сопствена вредност?

г) Са друге стране, ако унапред знамо да је очекивана вредност момента $p = \hbar k$ и знамо да се стање описује таласном функцијом $\psi(x) = e^{ikx}$ које је сопствено стање, одредити (тј дефинисати) шта је придружени оператор момента. (Овај пример даје мотивацију за дефиницију оператора импулса. Део г) решавате као да унапред не знате одговор, дакле, треба извести дефиницију оператора момента.)

3. домаћи

Решавамо Шредингерову једначину

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

оператор Хамилтонијана.

Користимо метод решавања парцијалних једначина - раздвајање променљивих:

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$$

1. Нека је функција $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$ решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

а) Показати да је

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$.

Једначина

$$\hat{H}\varphi = E\varphi$$

се назива и Шредингерова једначина која не зависи од времена.

б) Ако је $V = 0$ (одговара слободној честици) показати да је φ линеарна комбинација функција $e^{ix\xi}$ и $e^{-ix\xi}$ где је $\xi^2 = 2m(E-V)/\hbar^2$.

2. Одредити сопствене векторе и придружене сопствене вредности оператора X и P. Да ли је спектар ових оператора дискретан?

3. Нека је дата слободна честица у 1-димензионом квадру дужине L. Функција стања ове честице је сопствена функција оператора $\hat{H}$ и не зависи од времена t, дакле $\psi(x,t) = \psi(x)$. Вероватноћа да се честица налази у положају $x = 0$ и $x = L$ је нула.

а) Колико је $\psi(0)$ и $\psi(L)$ и зашто?

б) Користећи почетне услове као и да је потенцијална енергија честице једнака нули, показати да су нормализоване сопствене функције дате са $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$.

в) Показати да су одговарајуће сопствене вредности дате са $E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$.

г) Шта на оснву постулата представља E_n?

д) Одредити вероватноћу да се честица налази између $x = \frac{L}{3}$ и $x = \frac{L}{2}$. За какво n, тј. за коју функцију стања, је та вероватноћа највећа?

ђ) Колика је очекивана вредност кинетичке енергије честице описане произвољним стањем ψ_n? Објаснити зашто.

е) Ако се честица описује стањем ψ_1, одредити очекивану вредност импулса честице. Израчунати директно, затим добијени резултат упоредити са E_1.

4. домаћи

1. Упоредити Шредингерову слику и Хајзенбергову слику зависности функција стања и оператора од времена. Показати да се оне поклапају за оператор $\hat{H}$.

2. Решавамо Шредингерову једначину

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

слободне честице. Дакле, оператор Хамилтонијана је дат са

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Следи да Шредингерова једначина слободне честице гласи

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Уз помоћ метода раздвајања променљивих

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$$

имамо

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$ (то је прошли домаћи). Дакле, сопствени вектор $\varphi(x)$ не зависи од времена и решење је једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi.$$

а) Показати да је

$$\psi(x,t) = e^{-\omega(k)it}(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}),$$

решење Шредингерове једначине слободне честице, при чему је

$$\omega(k) = \frac{k^2\hbar}{2m}.$$

Упутство: искористити да је

$$\varphi_k(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},\ \ A, B \in \mathbb{R},$$

опште решење диференцијалне једначине

$$\varphi_k''(x) = -k^2\varphi.$$

Искористити и Де Брољеву хипотезу $p = \hbar\omega$, где је ω фреквенција.

б) Додајмо још почетни услов

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) = e^{ikx}.$$

Показати да је решење Шредингерове једначине слободне честице дато са

$$\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)}.$$

Сада ћемо да проширимо фамилију решења слободне Шредингерове једначине (тј. Шредингерове једначине слободне честице). Наредна решења добићемо уз помоћ Фуријеових трансформација. Ослабићемо услов почетне функције ψ_0.

Фуријеова трансформација

Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвољна функција. Тада је њена Фуријеова трансформација функција дефинисана са

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt.$$

3. а) Доказати да је функција

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

решење слободне Шредингерове једначине која задовољава почетни услов ψ_0, за неку Шварцову функцију, и при чему је

$$\omega(k) = \frac{k^2\hbar}{2m}.$$

б) Проверити да је

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(k) e^{ikx} dk = \psi_0(x).$$

Упутство: овде треба искористити Фуријеову инверзну трансформацију

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt.$$

в) Проверити тачност Фуријеове инверзне трансформације на простору Шварцових функција.

5. домаћи

Шредингерова једначина честице на коју делује сила

Посматрамо честицу чија је потенцијална енергија дата са

$$V(x) = \begin{cases} -C, & |x| \le A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases}$$

за произвољне $A, C > 0$.

Тражимо решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

Прво користимо метод раздвајања променљиве
$$\psi(x,t) = \varphi(x) f(t).$$
Тада је
$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$
где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$. Дакле, сопствени вектор $\varphi(x)$ не зависи од времена и φ је решење једначине
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi = E\varphi. \tag{0.1}$$
Ово је линеарна диференцијална једначина другог реда, па је скуп решења дводимензиони. Међутим, ми постављамо услов да решење мора бити у простору
$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

1. а) Доказати да су функције
$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{c-\epsilon}x, & |x| \le A, \\ \cos\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & |x| > A. \end{cases}$$
и
$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin\sqrt{c-\epsilon}x, & |x| \le A, \\ \sin\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & x > A, \\ -\sin\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & x < -A. \end{cases}$$
решења једначине (0.2), при чему су A и C произвољни позитивни бројеви, сопствена вредност E задовољава услов
$$-C < E < 0$$
и важи
$$\epsilon = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$
и
$$c = \frac{2mC}{\hbar^2}.$$
б) Проверити да важи $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

2. а) Одредити домен оператора импулса на ком је он симетричан оператор. (Став 3.9.)

б) Доказати да су сопствене вредности сваког симетричног оператора реални бројеви, као и да су сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима међусобно ортогонални. (Оператор дефинисан на простору са скаларним производом над $\mathbb{C}$.)

Сопствени вектори оператора импулса су функције $e^{i\lambda x/\hbar}$ и придружене сопствене вредности $\lambda \in \mathbb{R}$.

в) Да ли је оператор импулса симетричан у односу на произвољне две различите сопствене функције? Проверити директно да није.

г) Како физичари превазилазе овај проблем?

Упутство:

а) - Хилбертов простор 2π-периодичних функција из $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$,

- Хилбертов простор $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ уз услов да су функције диференцијабилне и да имају компактан носач заједно са својим изводом.

г) - Нека смо прво на простору 2π-периодичних функција из $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$. Сопствене функције оператора P су

$$e^{ikx}, \ \ k \in \mathbb{R}.$$

Ове функције припадају датом простору 2π-периодичних функција из $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ ако и само ако $k \in \mathbb{Z}$. Сада проналазимо нормализоване сопствене функције

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ове функције чине ортонормиран систем вектора. Дакле,

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ilx} \rangle = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Важи и више. Ове функције чине базу датог простора. То значи да се свака 2π-периодична функција $\psi \in L^2([0, 2\pi])$ може представити као

$$\boxed{\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},}$$

(Формула (3.5) у књизи), при чему је

$$a_k = \langle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \psi(x) \rangle.$$

Специјално, ако је ψ јединични вектор овог простора, онда је

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 1.$$

- Нека смо сада на простору $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Сопствене функције оператора P су и даље

$$e^{ikx}, \ \ k \in \mathbb{R}.$$

Међутим, ове функције не припадају простору $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Ипак, и даље постоји начин да ове функције чине базу простора $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, тј да се свака функција $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ може изразити преко базе. Наиме, свака функција $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ се може представити као

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{\psi}(k) dx.}$$

(Формула (3.11) у књизи), при чему је

$$\hat{\psi}(k) = \langle e^{ikx}, \psi(x) \rangle.$$

Овакво представљање се назива суперпозиција. Овде је $\hat{\psi}$ Фуријеова трансформација функције ψ, тј.

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x)dx,$$

која такође припада простору $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Специјално, ако је ψ јединични вектор простора $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, онда је

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x)|^2 dx = 1.$$

Ово је аналогно резултатима у случају 2π-периодичних функција из $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ само нам треба још конвенција да је скуп функција $e^{ikx}, k \in \mathbb{R}$ ортонормиран систем. Ту користимо Дираковy δ-дистрибуцију

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ilx} \rangle = \delta(k-l).$$

Остатак се може прочитати у поглављу 6.6.

3. Одредити особине функције $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тако да важи

$$\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial x}}(p) = ip\hat{\psi}(p)$$

и

$$\widehat{X\psi}(p) = i\frac{\partial}{\partial p}\hat{\psi}(p).$$

Подсетимо се да је Фуријеова трансформација функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ipx}dx.$$

6. домаћи

Нека је дат хармонијски осцилатор.

Посматрамо Хамилтонову функцију

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

и њој придружен оператор Хамилтонијана

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}P + \frac{k}{2}X^2,$$

где су P и X оператори импулса и положаја.

Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе оператора Хамилтонијана.

1. Описати поступак за налажење сопствених вектора оператора $\hat{H}$.

2. Исписати сопствене векторе ψ_k за $k = 0, 1, 2$ и одредити придружене сопствене вредности.

3. Показати да сопствени вектори оператора $\hat{H}$ припадају простору $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

4. Показати да су сопствени вектори ортогонални, и да формирају базу простора $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

7. домаћи

Принцип неодређености

Нека је A симетричан оператор на неком Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ и нека је $\psi \in \mathcal{H}$ јединични вектор. Ако се стање система описује функцијом ψ онда је очекивана вредност оператора A дата са

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle.$$

Неодређеност симетричног оператора A, у ознаци $\Delta_\psi A$ се дефинише на следећи начин

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi I)^2 \rangle_\psi.$$

1. Показати да је

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi I)\psi, (A - \langle A \rangle_\psi I)\psi \rangle_\psi.$$

2. Показати да је $\Delta_\psi A = 0$ ако и само ако је ψ сопствени вектор оператора A.

3. Нека су A и B симетрични оператори на неком Хилбертовом простору и ψ јединични вектор који припада домену оператора AB и BA. Показати да важи

$$(\Delta_\psi A)^2 (\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4} \Big| \langle [A, B] \rangle_\psi \Big|^2.$$

4. а) Израчунати $(\Delta_{\psi_0} X)^2$, $(\Delta_{\psi_0} P)^2$ као и $(\Delta_{\psi_0} \hat{H})^2$, при чему је ψ_0 функција стања хармонијског осцилатора.

б) Упоредити добијене резултате са 3. задатком.

Упутство. Искористити из 2. домаћег да је

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

сопствени вектор оператора Хамилтонијана

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\frac{x^2}{2}\psi,$$

при чему је фреквенција осциловања $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

5. а) Израчунати $(\Delta_{\psi_n}X)^2$, $(\Delta_{\psi_n}P)^2$ као и $(\Delta_{\psi_n}\hat{H})^2$, при чему је ψ_n функција стања хармонијског осцилатора у случају слободне честице ($V = 0$).

б) Упоредити добијене резултате са 3. задатком.

Упутство. Искористити из 3. домаћег да је

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

8. домаћи

ВКБ метод

Тражимо решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

Прво користимо метод раздвајања променљиве

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t).$$

Тада је

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$. Дакле, функција $\varphi(x)$ не зависи од времена и φ је решење једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi = E\varphi. \tag{0.2}$$

Сада тражимо φ, сопствени вектор оператора Хамилтонијана, при чему немамо никакве рестрикције за потенцијалну енергију.

У домаћем 4. видели смо да је, у случају $V = const$, сопствени вектор φ линеарна комбинација функција $e^{ix\xi}$ и $e^{-ix\xi}$ где је $\xi^2 = 2m(E-V)/\hbar^2$.

У домаћем 5. смо такође пронашли сопствене векторе φ, у случају када је $V = const$ на затвореном интервалу $[-A, A]$ и $V = 0$ ван тог интервала.

У домаћем 6. смо се сусрели са свим сопственим векторима оператора Хамилтонијана у случају хармонијског осцилатора, дакле у случају $V(x) = \frac{k}{2}x^2$.

Претпоставимо сада да немамо никакве рестикције за потенцијалну енергију. Упознајемо нови начина за проналазење сопствених вектора оператора Хамилтонијана, такозвани ВКБ метод.

(Ми ћемо се ограничити на случај $V(x) < E$, мада се овај метод користи и у случају $V(x) \geq E$.)

1. Објаснити улогу $\hbar$ као промењиве која може да тежи нули.

2. а) Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$, где се функција S назива фазна функција, показати да је $S'(x) = p(x)$, до на $O(\hbar)$. Еквивалентно, показати $dS(\mathbb{R}) = H^{-1}(E)$, до на $O(\hbar)$.

(Искористити да је укупна енергија система $E = V(x) + \frac{p^2}{2m}$.)

б)Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}a(x)$, где се функција a назива функција амплитуде, показати да важи $aS'' + 2a'S' = 0$ (хомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^2)$. Еквивалентно, показати да је $a(x) = \frac{c}{\sqrt{p(x)}}$, за неку константу c. (ово је формула 15.16 у књизи)

в) Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}(a_0(x) + \hbar a_1(x))$, показати да важи $a_1S'' + 2a_1'S' = ia_0''$ (нехомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^3)$.

(Напомена: све резултате тражимо само на допустивом домену, тј где важи $E > V(x)$.)

Лијеве групе

1. Написати дефиницију Лијеве групе и дати пример.

2. Написати дефиницију матричне Лијеве групе и дати бар 5 примера.

3. Свака матрична Лијева група је Лијева група. Дати пример Лијеве групе која није матрична Лијева група.

Напомена. Свака компактна Лијева група је матрична.

9. домаћи

1. Доказати за два примера из претходног домаћег да су заиста Лијеве групе.

2. Написати дефиницију Лијеве алгебре и дати пример. Објаснити.

3. а) Ако је $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ матрична Лијева група, дефинисати придружену Лијеву алгебру $\mathfrak{g}$.

б) Показати да је $\mathfrak{g}$ заиста Лијева алгебра.

4. Следећим матричним Лијевим групама придружене су Лијеве алгебре:

а) $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$

$$\mathfrak{gl}(n) = M_n(\mathbb{R});$$

б) $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$

$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | trX = 0\};$$

в) $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | AA^T = A^T A = I, \det A = 1\}$

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X + X^T = 0\};$$

г) $U(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | AA^* = A^* A = I\}$

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | X + X^* = 0\};$$

д) $Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) | A^T \mathbb{J}_0 A = \mathbb{J}_0\}$

$$\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) | \mathbb{J}_0 X + X^T \mathbb{J}_0 = 0\}.$$

Доказати д).

5. Одредити димензију Лијеве групе $SO(3)$. Наћи базне векторе Лијеве алгебре $\mathfrak{so}(3)$.

6. Показати да је

$$\mathfrak{g} = T_I G.$$

7. Неко су G_1 и G_2 две матричне Лијеве групе повезане и просто повезане и $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ придружене Лијеве алгебре. Ако постоји изоморфизам Лијевих алгебри $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ онда постоји и изоморфизам Лијевих група G_1 и G_2.

Примером показати да је услов просте повезаности битан. ($SO(3)$ и $SU(2)$)

Угаони момент на $\mathbb{R}^3$.

Нека је $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ вектор положаја честице и $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ вектор импулса честице. Тада се вектор

$$j = x \times p$$

назива угаоним моментом, или моментом импулса честице.

1. Израчунати

$$\{j_1, j_2\}.$$

Ако су X и P оператори положаја и импулса придружени векторима x и p, онда је придружени оператор момента импулса (или оператор угаоног момента)

$$J = X \times P.$$

2. Израчунати

$$[J_1, J_2].$$

Показати да је квантизација Поасонове заграде $\{j_1, j_2\}$ управо комутатор $[J_1, J_2]$.

3. Описати зависност оператора угаоног момента J_3 од ротација. Изразити оператор J_3 преко базних вектора Лијеве алгебре $\mathfrak{so}(3)$.

10. домаћи

Диференцијалне форме

Кажемо да је диференцијална k-форма α затворена ако важи $d\alpha = 0$, а кажемо да је тачна ако важи $\alpha = d\eta$, при чему је η нека диференцијална $(k-1)$-форма.

Диференцирањем k-форме добијамо $k+1$-форму. Контракцијом k-форме векторским пољем добијамо $k-1$-диференцијалну форму.

Форма запремине на многострукости димензије n је диференцијална n-форма која ни у једној тачки није једнака нули. На пример, $dx \wedge dy \wedge dz$ је форма запремине на $\mathbb{R}^3$, док $x^2 dx \wedge dy \wedge dz$ није форма запремине, зато што је једнака нули у свим тачкама у којима је $x = 0$. Ако многострукост допушта форму запремине кажемо да је та многострукост оријентабилна

1. а) Дефинисати диференцијалне 0,1 и 2-форме на $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Описати све форме запремине на $\mathbb{R}^k$.

б) Показати да је свака затворена диференцијална 1-форма на $\mathbb{R}^k$ диференцијал неке функције (тј. показати да је тачна). Показати да је услов затворености неопходан, тј. да није свака диференцијална 1-форма и тачна форма.

в) Показати да је $d^2 = 0$ на $\mathbb{R}^k$, при чему је d диференцијал форме.

2. Нека је $\omega = f(x,y,z)dx \wedge dz$ диференцијална 2-форма на $\mathbb{R}^3$ и нека је $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ векторско поље на $\mathbb{R}^3$. Одредити $d\omega$ и $\omega(X, \cdot)$.

3. а) Показати да је свака тачна диференцијална форма на произвољној многострукости и затворена. Дати пример затворене диференцијалне 1-форме која није тачна.

б) Показати да ако је многострукост просто-повезана онда је свака затворена 1-форма и тачна.

4. а) Показати да је $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dx_k)$ симплектичка многострукост.

б) Ако је ω симплектичка форма на многострукости M, показати да за сваку диференцијалну 1-форму α на M постоји јединствено векторско поље X на M тако да важи $\omega(X,\cdot)=\alpha$.

в) Показати да торус $S^1\times S^1=T^2$ допушта симплектичку форму, као и да S^4 не допушта.

г) Показати да је свака симплектичка многострукост оријентабилна (оријентација се задаје диференцијалном формом највишег степена). Дати пример оријентабилне многострукости која није симплектичка.

• Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^{2n}$.

Ако је $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ глатка функција онда се придружено Хамилтоново векторско поље X_f на $\mathbb{R}^{2n}$ дефинише са

$$X_f=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big).$$

Ако су $f,g:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ две глатке функције, онда се Поасонова заграда ове две функције дефинише са

$$\{f,g\}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big).$$

Дакле, Хамилтоново векторско поље X_f се може дефинисати са

$$X_f(g)=\{f,g\}.$$

Подсетимо се (домаћи 1.)

** Комутатор два Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^{2n}$ је такође Хамилтоново векторско поље на $\mathbb{R}^{2n}$, тачније важи

$$[X_f,X_g]=X_{\{f,g\}}.$$

** Ток Хамилтоновог векторског поља чува форму запремине на $\mathbb{R}^{2n}$.

(користили смо дефиницију дивергенције векторског поља $\mathcal{L}_X\omega=(divX)\omega$, при чему је ω форма запремине, и показали да је дивергенција нула.)

Сада ћемо претходне појмове и особине да покажемо на произвољној симплектичкој многострукости.

• Хамилтонова векторска поља на симплектичкој многострукости.

Нека је (M,ω) симплектичка многострукост. Нека је $f:M\to\mathbb{R}$ глатка функција. Јединствено векторско поље X_f које је решење диференцијалне једначине

$$\omega(X_f,\cdot)=df$$

се назива Хамилтоново векторско поље. (У 4. задатак под б) горе смо видели да ово векторско поље постоји и да је јединствено.) Функцију f називамо и Хамилтонијаном.

Ако су $f,g:M\to\mathbb{R}$ глатке функције и X_f и X_g придружена Хамилтонова векторска поља, онда се Поасонова заграда ове две функције дефинише са

$$\{f,g\}=-\omega(X_f,X_g).$$

1. Доказати да је са $\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$ заиста дефинисана Поасонова заграда (показати да важи једна од особина билинеарност, коса симетричност, Лајбницово правило или Јакобијев идентитет).

2. Посматрамо симплектичку многострукост $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dx_k)$.

а) Нека је $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ глатка функција. Показати да се дефиниција придруженог Хамилтоновог векторског поља X_f на симплектичкој многострукости поклапа са дефиницијом на $\mathbb{R}^{2n}$.

б) Показати да се дефиниција Поасонове заграде $\omega(X_f, X_g) = -\{f, g\}$ поклапа са дефиницијом Поасонове заграде на $\mathbb{R}^{2n}$.

Дакле, дефиниције Хамилтоновог векторског поља и Поасонове заграде функција на $\mathbb{R}^{2n}$ су специјалан случај ових појмова на симплектичкој многострукости.

3. а) Показати да је комутатор два Хамилтонова векторска поља на симплектичкој многострукости је такође Хамилтоново векторско поље.

б) Показати да ток Хамилтоновог векторског поља чува симплектичку форму. Затим показати да чува и форму запремине.

(за део под б) погледати Теорему 21.17.)

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Нека је $H : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и X_H придружено Хамилтоново векторско поље. Нека је $\phi_t^H, t \in \mathbb{R}$, ток векторског поља X_H. Кажемо да је глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ очувана варијабла у Хамилтоновом систему (M, ω) са Хамилтонијаном $H : M \to \mathbb{R}$ ако вредност $f \circ \phi_t^H(x)$, не зависи од времена $t \in \mathbb{R}$, за све $x \in M$ (тј. ако важи $\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H(x) = 0$).

4. Показати да је $f : M \to \mathbb{R}$ очувана варијабла у Хамилтоновом систему (M, ω) са Хамилтонијаном $H : M \to \mathbb{R}$ ако и само ако је

$$\{f, H\} = 0.$$

Пошто је $\{H, H\} = 0$, следи да је вредност Хамилтонијана H очувана варијабла. (То смо такође видели на 1. часу, погледати Став 2.26. и Последицу 2.27.)

Квантизација функције. Свакој реалној варијабли $f : (\mathbb{R}^{2n}, dx \wedge dp)$ класичног фазног система придружујемо симетричан оператор F на Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ тако да важи:

- Константној функцији $f = 1$ додељујемо оператор идентитете.

11. домаћи

- Квантовање збира функција је збир оператора.
- Квантовање Поасонових заграда је комутатор оператора дефинисан са

$$\{f, g\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[F, G].$$

• Хилбертов простор $\mathcal{H}$ треба бити нередуцибилан (недељив) у односу на дејство оператора X и P. (То значи да су једини инваријантни подпростори 0 и $\mathcal{H}$.)

Примери.

$$\begin{aligned} x &\mapsto X, \;\; X(\psi) = x\psi; \\ p &\mapsto P, \;\; P(\psi) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ V &\mapsto \hat{V}, \;\; \hat{V}(\psi) = V\psi, \\ p^2 &\mapsto -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\circ -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}; \\ H &\mapsto \hat{H}; \\ \{x,p\} = 1 &\mapsto \frac{1}{i\hbar}[X,P] = I, \;\; I(\psi) = \psi. \end{aligned}$$

Питање: Може ли се квантизација произвољне глатке функције $f : (\mathbb{R}^{2n}, dx\wedge dp)$ дефинисати аналитички? Приметимо да се придружено Хамилтоново векторско поље $X_f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}$ може посматрати као оператор над функцијама

1. За сваку глатку функцију $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, при чему $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$, дефинишемо оператор,

$$Q(f) = i\hbar X_f + pdx(X_f) + f\,\cdot .$$

а) Показати да је дати оператор симетричан на простору глатких функција $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.

б) Показати да оператор Q задовољава прве три особине квантовања функције на Хилбертовом простору $L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

в) Зашто се додељивање функцији f оператора $Q(f)$ назива преквантизација уместо квантизације? (Став 14.7. $L^2(\mathbb{R}^n)$ је нередуцибилан у односу на дејство оператора X и P, а $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ је редуцибилан.)

г) Показати да је Хилбертов подпростор $L^2(\mathbb{R}^n)$ простора $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, при чему је $\psi(x,p) = \psi(x)$, инваријантан у односу на дејство оператора X. Показати да на том подпростору важи $Q(x) = X$ и $Q(p) = P$.

Преквантизација симплектичке многострукости је контактна многострукост

Раслојења

Нека су E, M и F тополошки простори. (π, E, M) се назива **раслојење** ако је $\pi : E \to M$ сурјективно пресликавање тако да за све $x \in M$ постоји отворена околина $x \in u \subset M$

и хомеоморфизам $\Phi : \pi^{-1}(u) \to u \times F$ где $\Phi : \pi^{-1}(x) \mapsto \{x\} \times F$. Пресликавање Φ се назива локална тривијализација.

Непрекидно пресликавање $s : M \to E$ које сваку тачку $x \in M$ пресликава у тачку на фибри $\pi^{-1}(x)$ се назива **сечење**. Дакле, $\pi \circ s = id$.

Раслојење $\pi : E \to M$ где је фибра $F = \pi^{-1}(x)$ (за било које $x \in M$) векторски простор $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) се назива векторско раслојење. Пример. Тангентно и котангентно раслојење су векторска раслојења; $E = M \times \mathbb{R}^n$ је тривијално векторско раслојење.

Свако векторско раслојење допушта сечење. Скуп свих сечења $\Gamma(E)$ је бесконачно димензиони векторски простор.

Главна раслојења. Глатко раслојење $\pi : E \to M$ (E и M су глатке многострукости и π је глатко пресликавање) где је фибра $G = \pi^{-1}(x)$ Лијева група и где је и структурна група G се назива главно раслојење. Дакле, G дејствује на E тако што дејствује на сваку фибру и пресликава је у себе. Еквивалентно, главно раслојење се може дефинисати као глатко раслојење коме је придружена Лијева група G која на сваку фибру делује слободно и транзитивно.

2. Показати да је Хопфова фибрација $\pi : S^3 \to S^2$ главно раслојење, где је $G = S^1$. Ако идентификујемо $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ стереографском пројекцијом, онда је $\pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, за $z_2 \neq 0$, и $\pi(z_1, 0) = \infty$.

Главно раслојење допушта сечење ако и само ако је тривијално ($E \cong M \times G$).

<u>Конексије и кривине на раслојењу</u>

Нека је $\pi : E \to M$ глатко раслојење. Посматрамо диференцијал $d\pi : TE \to TM$. Нека је $VE \stackrel{def}{=} \ker d\pi$ (вертикална дистрибуција). Тада је $VE \subset TE$ подраслојење тангентног раслојења TE. **Конексија** раслојења E је дистрибуција HE таква да важи $TE = VE \oplus HE$. Називамо је хоризонтална дистрибуција. Приметимо да ако је димензија фибре $k = m - n$ где је $\dim E = m$ и $\dim M = n$ онда је $\dim HE = 2n$ и $\dim VE = 2k$. Еквивалентно, конексију можемо задати и као пројекцију $K : TE \to VE$. Дакле, $HE = \ker K$. Нека је $H : TE \to HE$ пројекција.

Конексија главног G раслојења задовољава и услов

$$dL_g(H_pE) = H_{gp}E,$$

за све $p \in E$ и све $g \in G$. Дакле, хоризонтална дистрибуција је инваријантна у односу на линеаризовано дејство групе G.

Свакој конексији можемо да придружимо и 1-форму конексије $\alpha \in \Omega^1(E)$ такву да је $\ker \alpha_p = H_pE$. Пошто је дистрибуција HE инваријантна у односу на дејство G онда је и α инваријантна тј $\mathcal{L}_G \alpha = 0$. Приметимо да конексија није јединствена.

Кривина раслојења придружена 1-форми конексије α је 2-форма $\omega_\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})$ која задовољава $\pi^* \omega_\alpha = d\alpha$.

<u>Класификација главних раслојења</u>

Нека је $p : E \to B$ главно G-раслојење и $f : X \to B$ непрекидно пресликавање. Тада постоји индуковано главно G-раслојење $f^*E = \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$. Пројекција $p : f^*E \to X$ је дефинисана са $p(x,e) = x$.

Ако су f и g хомотопна пресликавања онда су раслојења f^*E и g^*E изоморфна.

Теорема. За сваку Лијеву групу G постоје класификујући простори EG и BG и главно G-раслојење $\pi : EG \to BG$ такви да важи следеће. Нека је M произвољна глатка многострукост. Са $\mathcal{G}_M$ означимо класе свих главних G-раслојења над M (изоморфна раслојења чине једну класу) и са $[M, BG]$ класе хомотопије пресликавања $f : M \to B$. Пресликавање $\Phi : [M, BG] \to \mathcal{G}_M$ дефинисано са $\Phi(f) = f^*EG$ је бијекција.

Свако главно раслојење над контрактибилном многострукости M тривијално.

<u>Главна S^1-раслојења</u>

Важи $BS^1 = \mathbb{CP}^\infty$ и $[M, BS^1] \cong H^2(M, \mathbb{Z})$.

Тачној 2-форми одговара тривијално раслојење.

На основу претходне теореме следи да су главна S^1-раслојења над M у бијекцији са $H^2(M, \mathbb{Z})$. Јединствени елемент $c(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ придружен главном раслојењу се назива **прва Чернова класа** овог раслојења.

Ако је M површ онда је $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ дакле сваки цео број одређује јединствено (до на изоморфизам раслојења) главно S^1-раслојење над M. Овај цео број се назива **Ојлеров број** раслојења.

3. Показати да генератор $[1] \in H^2(S^2, \mathbb{Z})$ одговара Хопфовој фибрацији $S^3 \to S^2$.

Генерално, елементу $[k] \in H^2(S^2, \mathbb{Z})$ одговара раслојење $L_k \to S^2$, где је $L_k = S^3/\mathbb{Z}_k$.

4. а) Наћи векторско поље X које генерише дејство S^1 на S^3 које задаје Хопфову фибрацију.
б) Наћи конексију α такву да је $\alpha(X) = 1$.
(Дејство круга S^1 на S^3 које задаје Хопфову фибрацију је дато са $e^{i\theta} * (z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$. Дакле, трајекторије векторског поља X су дате са $\varphi_\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$.)

Черн-Вејлова теорема. Ако је α форма конексије S^1-раслојења $\pi : E \to M$ таква да је $\alpha(X) = 1$ онда одговарајућа форма конексије ω_α припада класи де Рамове 2-кохомологије која је задата првом Черновом класом (тј. $[\omega_\alpha] = c(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$).

<u>Преквантизација симплектичке многострукости</u>

Нека је дата симплектичка многострукост (M, ω) таква да важи $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

Услов $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ значи

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \omega \in \mathbb{Z},$$

за сваку површ S на многострукости M.

Нека је $\pi : E \to M$ главно S^1-раслојење над M коме је прва Чернова класа управо $[\omega]$. Ово раслојење називамо **преквантизација симплектичке многострукости**.

Пример. Преквантизација котангентног раслојења. Пошто је $d\lambda_{can}$ тачна 2-форма, дакле задаје тривијалну класу на $H^2(T^*M, \mathbb{Z})$ следи да је прва Чернова класа преквантизације тривијална. Дакле, раслојење је тривијално, тј $E = T^*M \times S^1$. Конексија је задата са $\alpha = \pi^*\lambda_{can} + d\theta$.

5. Показати да преквантизација E допушта конексију α која је контактна форма на E (тј. задовољава услов $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$.)

Дакле, преквантизација симплектичке многострукости је контактна многострукост.

6. Наћи контактну форму на S^3 која је конексија Хопфове фибрације.