1. домаћи

Јангов експеримент са извором светлости постављеним испред два отвора показује да светлост има природу таласа. Наиме, интензитет светлости на зиду иза препреке са два отвора није једнак збиру интензитета светлости који полазе са два отвора, што је последица интерференције таласа. Слично и експеримент познат као Арагова тачка или Поасонова тачка такође показује да светлост има природу таласа. У средишту сенке кугле (са прецизно центрираним извором светлости) се појављује светла тачка, такође као последица интерференције таласа. Са друге стране, Ајнштајн показује да светлост има природу честица; Фотони су кванти електро-магнетног зрачења.

1. Описати неке од експеримената који показују да електрони имају природу светлости, као и експерименте који показују да електрони имају природу таласа.

2. Показати да трајекторије Хамилтоновог система чувају форму запремине

$$dx_1 \cdots dx_n dp_1 \cdots dp_n$$

на $\mathbb{R}^{2n}$.

Упутство: Хамилтонова функција $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ је дефинисана са

$$H(x,p) = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + V(x).$$

И важе Хамилтонове једначине

$$\dot{x}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Приметимо да су трајекторије Хамилтоновог система $\varphi_t(x,p) = (x(t), p(t))$ заправо ТОК векторског поља

$$X = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\Big).$$

Називамо га Хамилтоново векторско поље. Дакле, важи

$$X(\varphi_t(x,p)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x,p).$$

Даље, ток векторског поља чува форму запремине ако и само ако је дивергенција тог векторског поља нула.

То следи из дефиниције дивергенције

$$divX\omega = d(\iota X\omega) = \mathcal{L}_X\omega,$$

при чему је

$$\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega$$

Лијев извод форме запремине ω у правцу векторског поља X.

- Сада када знамо дефиницију дивергенције, показати да је дивергенција векторског поља $X = (X_1, \dots, X_n)$ дефинисана у односу на форму $\omega = dx_1 \cdots dx_n$ заправо

$$divX = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

- Проверити да је дивергенција Хамилтоновог векторског поља заиста нула.

3. Показати да је комутатор два векторска поља на $\mathbb{R}^n$ такође векторско поље на $\mathbb{R}^n$.

4. Показати да је комутатор два Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^n$ такође Хамилтоново векторско поље.

2. домаћи

Посматрамо хармонијски осцилатор и Хамилтонијан дефинисан са

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x),$$

при чему је

$$V(x) = -\int F(x)dx.$$

Искористимо Хуков закон

$$F(x) = -kx,$$

при чему је k константа опруге. Следи

$$V(x) = k\frac{x^2}{2}$$

и

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + k\frac{x^2}{2}.$$

Квантујемо Хамилтонијан и добијамо оператор

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\frac{x^2}{2}\psi.$$

Фреквенција осциловања је

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1. а) Показати да је $\hat{H}$ симетричан оператор на простору функција $\mathcal{L}^2([0,L])$, при чему су функције једнаке нули на граници интервала. (Или на $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, при чему су функције са компактним носачем).

б) Показати да су

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

и

$$\lambda_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

сопствени вектор и придружена сопствена вредности овог оператора. Затим показати да су

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x\psi_0(x)$$

и

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

такође сопствени вектор и придружена сопствена вредности овог оператора.

в) Показати да су ψ_0 и ψ_1 ортогоналне функције.

г) Ако се дати осцилатор описује стањем ψ_0 одредити очекивану вредност Хамилтонијана осцилатора, тј честице.

2. Посматрамо честицу на кругу. Таласна функција $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ описује честицу која се креће по кругу којој је момент $p = k\hbar$, при чему је k фреквенција.

а) Проверити то уз помоћ постулата квантне механике.

б) Проверити да је дата таласна функција нормализована.

в) Да ли је дата таласна функција сопствени вектор оператора момента P? Ако јесте, која је придружена сопствена вредност?

г) Са друге стране, ако унапред знамо да је очекивана вредност момента $p = \hbar k$ и знамо да се стање описује таласном функцијом $\psi(x) = e^{ikx}$, које је сопствено стање, одредити (тј дефинисати) шта је придружени оператор момента. (Овај пример даје мотивацију за дефиницију оператора импулса.)

3. домаћи

Решавамо Шредингерову једначину

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

оператор Хамилтонијана.

Користимо метод решавања парцијалних једначина - раздвајање промењивих:

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$$

1. Нека је функција $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$ решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

а) Показати да је

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$.

Једначина

$$\hat{H}\varphi = E\varphi$$

се назива и Шредингерова једначина која не зависи од времена.

б) Ако је $V = 0$ (одговара слободној честици) показати да је φ линеарна комбинација функција $e^{ix\xi}$ и $e^{-ix\xi}$ где је $\xi^2 = 2m(E-V)/\hbar^2$.

2. Одредити сопствене векторе и придружене сопствене вредности оператора X и P. Да ли је спектар ових оператора дискретан?

3. Нека је дата слободна честица у 1-димензионом квадру дужине L. Функција стања ове честице је сопствена функција оператора $\hat{H}$ и не зависи од времена t, дакле $\psi(x,t) = \psi(x)$. Вероватноћа да се честица налази у положају $x = 0$ и $x = L$ је нула.

а) Колико је $\psi(0)$ и $\psi(L)$ и зашто?

б) Користећи почетне услове као и да је потенцијална енергија честице једнака нули, показати да су нормализоване сопствене функције дате са $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$.

в) Показати да су одговарајуће сопствене вредности дате са $E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$.

г) Шта на оснву постулата представља E_n?

д) Одредити вероватноћу да се честица налази између $x = \frac{L}{3}$ и $x = \frac{L}{2}$. За какво n, тј. за коју функцију стања, је та вероватноћа највећа?

ђ) Колика је очекивана вредност кинетичке енергије честице описане произвољним стањем ψ_n? Објаснити зашто.

е) Ако се честица описује стањем ψ_1, одредити очекивану вредност импулса честице. Израчунати директно, затим добијени резултат упоредити са E_1.

4. домаћи

1. Упоредити Шредингерову слику и Хајзенбергову слику зависности функција стања и оператора од времена. Показати да се оне поклапају за оператор $\hat{H}$.

2. Решавамо Шредингерову једначину

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

слободне честице. Дакле, оператор Хамилтонијана је дат са

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Следи да Шредингерова једначина слободне честице гласи

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Уз помоћ метода раздвајања променљивих

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$$

имамо

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$ (то је прошли домаћи). Дакле, сопствени вектор $\varphi(x)$ не зависи од времена и решење је једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi.$$

а) Показати да је

$$\psi(x,t) = e^{-\omega(k)it}(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}),$$

решење Шредингерове једначине слободне честице, при чему је

$$\omega(k) = \frac{k^2\hbar}{2m}.$$

Упутство: искористити да је

$$\varphi_k(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \;\; A, B \in \mathbb{R},$$

опште решење диференцијалне једначине

$$\varphi_k''(x) = -k^2\varphi.$$

Искористити и Де Брољеву хипотезу $p = \hbar\omega$, где је ω фреквенција.

б) Додајмо још почетни услов

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) = e^{ikx}.$$

Показати да је решење Шредингерове једначине слободне честице дато формулом (4.2.) из књиге

$$\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)}.$$

Сада ћемо да проширимо фамилију решења слободне Шредингерове једначине (тј. Шредингерове једначине слободне честице). Наредна решења добићемо уз помоћ Фуријеових трансформација. Ослабићемо услов почетне функције ψ_0.

Фуријеова трансформација

Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвољна функција. Тада је њена Фуријеова трансформација функција дефинисана са

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

3. а) Доказати да је функција

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

решење слободне Шредингерове једначине која задовољава почетни услов ψ_0, за неку Шварцову функцију, и при чему је

$$\omega(k) = \frac{k^2\hbar}{2m}.$$

б) Проверити да је

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(k) e^{ikx} dk = \psi_0(x).$$

Упутство: овде треба искористити Фуријеову инверзну трансформацију

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt.$$

в) Проверити тачност Фуријеове инверзне трансформације на простору Шварцових функција.

Задатак 3. даје нову фамилију решења слободне Шредингерове једначине. Сада ћемо поново да проширимо фамилију решења. Наредна решења су облика

$$\psi(x,t) = A(x,t)e^{\theta(x,t)},$$

при чему су A и θ реалне функције. Додаћемо почетни услов

$$\psi_0(x) = A_0(x)e^{ip_0x/\hbar},$$

при чему је A_0 реална позитивна функција и p_0 реалан ненегативан број.

4. а) Одредити диференцијалне једначине чија су решења функције A и θ.

б) Доказати Став 4.6. у случају

$$A_0(x) = A_0 x.$$

5. домаћи

Шредингерова једначина честице на коју делује сила

Посматрамо честицу чија је потенцијална енергија дата са

$$V(x) = \begin{cases} -C, & |x| \le A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases}$$

за произвољне $A, C > 0$.

Тражимо решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

Прво користимо метод раздвајања промењиве

$$\psi(x,t) = \varphi(x) f(t).$$

Тада је

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$. Дакле, сопствени вектор $\varphi(x)$ не зависи од времена и φ је решење једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi = E\varphi. \tag{0.1}$$

Ово је линеарна диференцијална једначина другог реда, па је скуп решења дводимензиони. Међутим, ми постављамо услов да решење мора бити у простору

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

1. а) Доказати да су функције

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{c-\epsilon}x, & |x| \le A, \\ \cos\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & |x| > A. \end{cases}$$

и

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin\sqrt{c-\epsilon}x, & |x| \le A, \\ \sin\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & x > A, \\ -\sin\sqrt{c-\epsilon}Ae^{-\sqrt{\epsilon}(|x|-A)}, & x < -A. \end{cases}$$

решења једначине (0.2), при чему су A и C произвољни позитивни бројеви, сопствена вредност E задовољава услов

$$-C < E < 0$$

и важи

$$\epsilon = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

и

$$c = \frac{2mC}{\hbar^2}.$$

б) Проверити да важи $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

2. а) Одредити домен оператора импулса на ком је он симетричан оператор. (Став 3.9.)

б) Доказати да су сопствене вредности сваког симетричног оператора реални бројеви, као и да су сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима међусобно ортогонални. (Оператор дефинисан на простору са скаларним производом над $\mathbb{C}$.)

Сопствени вектори оператора импулса су функције $e^{i\lambda x/\hbar}$ и придружене сопствене вредности $\lambda \in \mathbb{R}$.

в) Да ли је оператор импулса симетричан у односу на произвољне две различите сопствене функције? Проверити директно да није.

г) Како физичари превазилазе овај проблем?

Упутство: погледати поглавље 6.6. Део рачуна је и наредни задатак.

3. Одредити особине функције $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тако да важи

$$\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial x}}(p) = ip\hat{\psi}(p)$$

и

$$\widehat{X\psi}(p) = i\frac{\partial}{\partial p}\hat{\psi}(p).$$

Подсетимо се да је Фуријеова трансформација функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx.$$

6. домаћи

Нека је дат хармонијски осцилатор.

Посматрамо Хамилтонову функцију

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

и њој придружен оператор Хамилтонијана

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}P + \frac{k}{2}X^2,$$

где су P и X оператори импулса и положаја.

Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе оператора Хамилтонијана.

1. Описати поступак за налажење сопствених вектора оператора $\hat{H}$.

2. Исписати сопствене векторе ψ_k за $k = 0, 1, 2$ и одредити придружене сопствене вредности.

3. Показати да сопствени вектори оператора $\hat{H}$ припадају простору $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

4. Показати да су сопствени вектори ортогонални, и да формирају базу простора $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

7. домаћи

Принцип неодређености

Нека је A симетричан оператор на неком Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ и нека је $\psi \in \mathcal{H}$ јединични вектор. Ако се стање система описује функцијом ψ онда је очекивана вредност оператора A дата са

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle.$$

Неодређеност симетричног оператора A, у ознаци $\Delta_\psi A$ се дефинише на следећи начин

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi I)^2 \rangle_\psi.$$

1. Показати да је

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi I)\psi, (A - \langle A \rangle_\psi I)\psi \rangle_\psi.$$

2. Показати да је $\Delta_\psi A = 0$ ако и само ако је ψ сопствени вектор оператора A.

3. Нека су A и B симетрични оператори на неком Хилбертовом простору и ψ јединични вектор који припада домену оператора AB и BA. Показати да важи

$$(\Delta_\psi A)^2 (\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4} \Big| \langle [A, B] \rangle_\psi \Big|^2.$$

4. а) Израчунати $(\Delta_{\psi_0} X)^2$, $(\Delta_{\psi_0} P)^2$ као и $(\Delta_{\psi_0} \hat{H})^2$, при чему је ψ_0 функција стања хармонијског осцилатора.

б) Упоредити добијене резултате са претходним задатком. Посебно разматрати случај слободне честице ($V = 0$).

Решење. а) Видели смо у домаћем 2. да је функција

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m \omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

сопствени вектор оператора Хамилтонијана

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\frac{x^2}{2}\psi,$$

при чему је фреквенција осциловања

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Дакле, на основу задатка 2. важи

$$\Delta_{\psi_0}\hat{H} = 0.$$

8. домаћи

ВКБ метод

Тражимо решење Шредингерове једначине

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

при чему је

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

Прво користимо метод раздвајања променљиве

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t).$$

Тада је

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

где је $E \in \mathbb{R}$ сопствена вредност, а φ сопствени вектор оператора $\hat{H}$. Дакле, функција $\varphi(x)$ не зависи од времена и φ је решење једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi = E\varphi. \tag{0.2}$$

Сада тражимо φ, сопствени вектор оператора Хамилтонијана, при чему немамо никакве рестрикције за потенцијалну енергију.

У домаћем 4. видели смо да је, у случају $V = const$, сопствени вектор φ линеарна комбинација функција $e^{ix\xi}$ и $e^{-ix\xi}$ где је $\xi^2 = 2m(E-V)/\hbar^2$.

У домаћем 5. смо такође пронашли сопствене векторе φ, у случају када је $V = const$ на затвореном интервалу $[-A, A]$ и $V = 0$ ван тог интервала.

У домаћем 6. смо се сусрели са свим сопственим векторима оператора Хамилтонијана у случају хармонијског осцилатора, дакле у случају $V(x) = \frac{k}{2}x^2$.

Претпоставимо сада да немамо никакве рестикције за потенцијалну енергију. Упознајемо нови начина за проналазење сопствених вектора оператора Хамилтонијана, такозвани ВКБ метод.

(Ми ћемо се ограничити на случај $V(x) < E$, мада се овај метод користи и у случају $V(x) \geq E$.)

1. Објаснити улогу $\hbar$ као променљиве која може да тежи нули.

2. а) Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$, где се функција S назива фазна функција, показати да је $S'(x) = p(x)$, до на $O(\hbar)$. Еквивалентно, показати $dS(\mathbb{R}) = H^{-1}(E)$, до на $O(\hbar)$.

(Искористити да је укупна енергија система $E = V(x) + \frac{p^2}{2m}$.)

б)Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}a(x)$, где се функција a назива функција амплитуде, показати да важи $aS'' + 2a'S' = 0$ (хомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^2)$. Еквивалентно, показати да је $a(x) = \frac{c}{\sqrt{p(x)}}$, за неку константу c. (ово је формула 15.16 у књизи)

в) Ако решење једначине (0.2) тражимо у облику $\varphi(x) = e^{iS(x)/\hbar}(a_0(x) + \hbar a_1(x))$, показати да важи $a_1 S'' + 2a_1' S' = i a_0''$ (нехомогена транспортна једначина), до на $O(\hbar^3)$.

(Напомена: све резултате тражимо само на допустивом домену, тј где важи $E > V(x)$.)

Лијеве групе

1. Написати дефиницију Лијеве групе и дати пример.

2. Написати дефиницију матричне Лијеве групе и дати примере.

3. Свака матрична Лијева група је Лијева група. Дати пример Лијеве групе која није матрична Лијева група.

Напомена. Свака компактна Лијева група је матрична.

9. домаћи

1. Написати дефиницију Лијеве алгебре и дати пример.

2. а) Ако је $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ матрична Лијева група, дефинисати придружену Лијеву алгебру $\mathfrak{g}$.

б) Показати да је $\mathfrak{g}$ заиста Лијева алгебра.

3. Следећим матричним Лијевим групама придружене су Лијеве алгебре:
а) $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$
$$\mathfrak{gl}(n) = M_n(\mathbb{R});$$
б) $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$
$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | trX = 0\};$$
в) $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | AA^T = A^T A = I, \det A = 1\}$
$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X + X^T = 0\};$$
г) $U(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | AA^* = A^* A = I\}$
$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | X + X^* = 0\};$$
д) $Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) | A^T \mathbb{J}_0 A = \mathbb{J}_0\}$
$$\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) | \mathbb{J}_0 X + X^T \mathbb{J}_0 = 0\}.$$
Доказати в).

4. Одредити димензију Лијеве групе $SO(3)$. Наћи базне векторе Лијеве алгебре $\mathfrak{so}(3)$.

5. Показати да је
$$\mathfrak{g} = T_I G.$$

6. Неко су G_1 и G_2 две матричне Лијеве групе повезане и просто повезане и $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ придружене Лијеве алгебре. Ако постоји изоморфизам Лијевих алгебри $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ онда постоји и изоморфизам Лијевих група G_1 и G_2.

Примером показати да је услов просте повезаности битан. ($SO(3)$ и $SU(2)$)

Угаони момент на $\mathbb{R}^3$.

Нека је $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ вектор положаја честице и $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ вектор импулса честице. Тада се вектор
$$j = x \times p$$
назива угаоним моментом, или моментом импулса честице.

1. Израчунати
$$\{j_1, j_2\}.$$

Ако су X и P оператори положаја и импулса придружени векторима x и p, онда је придружени оператор момента импулса (или оператор угаоног момента)
$$J = X \times P.$$

2. Израчунати
$$[J_1, J_2].$$

Показати да је квантизација Поасонове заграде $\{j_1, j_2\}$ управо комутатор $[J_1, J_2]$.

3. Описати зависност оператора угаоног момента J_3 од ротација. Изразити оператор J_3 преко базних вектора Лијеве алгебре $\mathfrak{so}(3)$.

10. домаћи

Диференцијалне форме

Кажемо да је диференцијална k-форма α затворена ако важи $d\alpha = 0$, а кажемо да је тачна ако важи $\alpha = d\eta$, при чему је η нека диференцијална $(k-1)$-форма.

Диференцирањем k-форме добијамо $k+1$-форму. Контракцијом k-форме векторским пољем добијамо $k-1$-диференцијалну форму.

Форма запремине на многострукости димензије n је диференцијална n-форма која ни у једној тачки није једнака нули. На пример, $dx \wedge dy \wedge dz$ је форма запремине на $\mathbb{R}^3$, док $x^2 dx \wedge dy \wedge dz$ није форма запремине, зато што је једнака нули у свим тачкама у којима је $x = 0$. Ако многострукост допушта форму запремине кажемо да је та многострукост оријентабилна

1. а) Дефинисати диференцијалне 0,1 и 2-форме на $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Описати све форме запремине на $\mathbb{R}^k$.

б) Показати да је свака затворена диференцијална 1-форма на $\mathbb{R}^k$ диференцијал неке функције (тј. показати да је тачна). Показати да је услов затворености неопходан, тј. да није свака диференцијална 1-форма и тачна форма.

в) Показати да је $d^2 = 0$ на $\mathbb{R}^k$, при чему је d диференцијал форме.

2. Нека је $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dz$ диференцијална 2-форма на $\mathbb{R}^3$ и нека је $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ векторско поље на $\mathbb{R}^3$. Одредити $d\omega$ и $\omega(X, \cdot)$.

3. а) Показати да је свака тачна диференцијална форма на произвољној многострукости и затворена. Дати пример затворене диференцијалне 1-форме која није тачна.

б) Показати да ако је многострукост просто-повезана онда је свака затворена 1-форма и тачна.

Поенкареова лема: свака затворена 1-форма је локално тачна.

4. а) Дефиниција симплектичке многострукости.

б) Показати да је $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dx_k)$ симплектичка многострукост.

в) Ако је ω симплектичка форма на многострукости M, показати да за сваку диференцијалну 1-форму α на M постоји јединствено векторско поље X на M тако да важи $\omega(X, \cdot) = \alpha$.

г) Показати да торус $S^1 \times S^1 = T^2$ допушта симплектичку форму, као и да S^4 не допушта.

д) Показати да је свака симплектичка многострукост оријентабилна (оријентација се задаје диференцијалном формом највишег степена). Дати пример оријентабилне многострукости која није симплектичка.

11. домаћи

• Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^{2n}$.

Ако је $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ глатка функција онда се придружено Хамилтоново векторско поље X_f на $\mathbb{R}^{2n}$ дефинише са

$$X_f = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big).$$

Ако су $f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ две глатке функције, онда се Поасонова заграда ове две функције дефинише са

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big).$$

Дакле, Хамилтоново векторско поље X_f се може дефинисати са

$$X_f(g) = \{f, g\}.$$

Подсетимо се (домаћи 1.)

** Комутатор два Хамилтонова векторска поља на $\mathbb{R}^{2n}$ је такође Хамилтоново векторско поље на $\mathbb{R}^{2n}$, тачније важи

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

** Ток Хамилтоновог векторског поља чува форму запремине на $\mathbb{R}^{2n}$.

(користили смо дефиницију дивергенције векторског поља $\mathcal{L}_X \omega = (divX)\omega$, при чему је ω форма запремине, и показали да је дивергенција нула.)

Сада ћемо претходне појмове и особине да покажемо на произвољној симплектичкој многострукости.

• Хамилтонова векторска поља на симплектичкој многострукости.

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. Јединствено векторско поље X_f које је решење диференцијалне једначине

$$\omega(X_f, \cdot) = df$$

се назива Хамилтоново векторско поље. (У домаћем 10. 4. задатак под в) смо видели да ово векторско поље постоји и да је јединствено.) Функцију f називамо и Хамилтонијаном.

Ако су $f, g : M \to \mathbb{R}$ глатке функције и X_f и X_g придружена Хамилтонова векторска поља, онда се Поасонова заграда ове две функције дефинише са

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g).$$

1. Доказати да је са $\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$ заиста дефинисана Поасонова заграда (показати да важе билинеарност, коса симетричност, Лајбницово правило и Јакобијев идентитет).

2. Посматрамо симплектичку многострукост $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dx_k)$.

а) Нека је $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ глатка функција. Показати да се дефиниција придруженог Хамилтоновог векторског поља X_f на симплектичкој многострукости поклапа са дефиницијом на $\mathbb{R}^{2n}$.

б) Показати да се дефиниција Поасонове заграде $\omega(X_f, X_g) = -\{f, g\}$ поклапа са дефиницијом Поасонове заграде на $\mathbb{R}^{2n}$.

Дакле, дефиниције Хамилтоновог векторског поља и Поасонове заграде функција на $\mathbb{R}^{2n}$ су специјалан случај ових појмова на симплектичкој многострукости.

3. а) Показати да је комутатор два Хамилтонова векторска поља на симплектичкој многострукости је такође Хамилтоново векторско поље.

б) Показати да ток Хамилтоновог векторског поља чува симплектичку форму. Затим показати да чува и форму запремине.

(за део под б) погледати Теорему 21.17.)

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Нека је $H : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и X_H придружено Хамилтоново векторско поље. Нека је $\phi_t^H, t \in \mathbb{R}$, ток векторског поља X_H. Кажемо да је глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ <u>очувана варијабла</u> у Хамилтоновом систему (M, ω) са Хамилтонијаном $H : M \to \mathbb{R}$ ако вредност $f \circ \phi_t^H(x)$, не зависи од времена $t \in \mathbb{R}$, за све $x \in M$ (тј. ако важи $\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H(x) = 0$).

4. Показати да је $f : M \to \mathbb{R}$ очувана варијабла у Хамилтоновом систему (M, ω) са Хамилтонијаном $H : M \to \mathbb{R}$ ако и само ако је

$$\{f, H\} = 0.$$

Пошто је $\{H, H\} = 0$, следи да је вредност Хамилтонијана H очувана варијабла. (То смо такође видели на 1. часу, погледати Став 2.26. и Последицу 2.27.)