1. домаћи

Диференцијалне форме

1. Дефинисати диференцијалне 0,1, 2, 3-форме на $\mathbb{R}^3$, $k \geq 1$.

Диференцирањем k-форме добијамо $k+1$-форму. Контракцијом k-форме векторским пољем добијамо $k-1$-диференцијалну форму. Клинасти производ k- и l-форме је $k+l$-форма.

2. Нека су $\omega = f(x,y,z)dx \wedge dz$ и $\alpha = ydx + zdy + x^2dz$ диференцијалне форме на $\mathbb{R}^3$, где је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ глатка функција, и нека је $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ векторско поље на $\mathbb{R}^3$. Одредити $d\omega$, $d\alpha$, $\omega \wedge \alpha$, $\omega(X,\cdot)$ и $\alpha(X)$.

Кажемо да је диференцијална k-форма α затворена ако важи $d\alpha = 0$, а кажемо α је тачна ако важи $\alpha = d\eta$, при чему је η нека диференцијална $(k-1)$-форма.

Форма запремине на многострукости димензије n је диференцијална n-форма која ни у једној тачки није једнака нули. На пример, $dx \wedge dy \wedge dz$ је форма запремине на $\mathbb{R}^3$, док $x^2dx \wedge dy \wedge dz$ није форма запремине, зато што је једнака нули у свим тачкама у којима је $x = 0$. Ако многострукост допушта форму запремине кажемо да је та многострукост оријентабилна

3. а) Описати све форме запремине на $\mathbb{R}^3$.

б) Показати да је свака затворена диференцијална 1-форма на $\mathbb{R}^3$ диференцијал неке функције (тј. показати да је тачна). Показати да је услов затворености неопходан, тј. да није свака диференцијална 1-форма на $\mathbb{R}^3$ и тачна форма.

в) Показати да је $d^2 = 0$ на $\mathbb{R}^3$, при чему је d диференцијал форме.

4. Показати да је свака тачна диференцијална форма на $\mathbb{R}^3$ и затворена. Да ли на $\mathbb{R}^3$ постоји затворена форма која није тачна? Дати пример многострукости и диференцијалне форме која је затворена, али није тачна.

5. Ако је α 1-форма на $\mathbb{R}^k$, шта је, у општем случају $\ker\alpha$ (језгро форме α)?

6. а) Дати пример 1-форме α на $\mathbb{R}^3$ тако да је $\alpha \wedge d\alpha$ форма запремине. Одредити $\ker\alpha$.

б) Дати пример 1-форме α на $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ тако да је $\alpha \wedge d\alpha$ форма запремине. Одредити $\ker\alpha$.

7. Показати да је $\alpha \wedge d\alpha$ форма запремине ако и само ако је $d\alpha$ свуда различита од нуле на $\ker\alpha$.