Математички факултет, Универзитет у Београду

Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок септембар 2

16.9.2020.

1. а) [5] Нека је X непразан скуп. Дефинисати појам $\sigma-$алгебре $\mathfrak{M}$ на скупу X. Објаснити појам минималне сигма алгебре која садржи неки скуп $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, у ознаци $\mathcal{M}(S)$.

   б) [10] Нека је $X = \mathbb{N}$, $S_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} \,||A| \text{ је паран број}\}$ и $S_2 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \max A = 2\}$. Наћи $\mathcal{M}(S_1)$ и $\mathcal{M}(S_2)$.

   в) [5] Испитати да ли је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(n) = n$, $\mathcal{M}(S_1)$-мерљива. Да ли је она $\mathcal{M}(S_2)$-мерљива?

2. а) [5] Дефиниција мере и транслаторне инваријантности мере на σ-алгебри над $\mathbb{R}$.

   б) [5] Објаснити да ли су Диракова и бројачка мера транслаторно инваријантне.

   в) [5] Нека је $E \subseteq \mathbb{R}$ Лебег мерљив скуп. Да ли је тада $a + E \subseteq \mathbb{R}$ Лебег мерљив?

   г) [5] Показати да је Лебегова мера транслаторно инваријантна.

3. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

   а) [5] Показати да је $\int\limits_A f\, d\mu = 0$ за сваку мерљиву функцију f и скуп A мере нула.

   б) [5] Ако је $f = 0$ скоро свуда, објаснити да ли важи $\int\limits_X f\, d\mu = 0$.

   в) [5] Ако је $\int\limits_X f\, d\mu = 0$ и f ненегативна мерљива функција, показати да је $f = 0$ скоро свуда.

   г) [5] Да ли в) важи без претпоставке да је f ненегативна?

4. а) [5] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, низ мерљивих функција. Објаснити да ли важи $\int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu$.

   б) [15] Израчунати $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}\, dx$.

5. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = n^{\frac{1}{3}} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$.

   а) [5] Испитати за које $p \geq 1$ важи $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ када $n \to \infty$.

   б) [5] Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

   в) [5] Испитати за које $p \geq 1$ овај низ конвергира у L^p норми.

   г) [5] Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Дефиниција 2.2. и Ставови 2.8. и 2.9.

   б) Докажимо да је $\mathcal{M}(S_1) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Најпре, из чињенице да $\{1,2\} \in S_1$ и $\{1,3\} \in S_1$, следи да $\{1\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} \in \mathcal{M}(S_1)$. На сличан начин, добијамо да сваки једночлан скуп припада σ-алгебри $\mathcal{M}(S_1)$. Како је σ-алгебра затворена за пребројиве уније, а и сам $[N]$ пребројив, то је $\mathcal{M}(S_1) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. С друге стране, постоје два скупа A у S_2, а то су $A = \{2\}$ и $A = \{1,2\}$. Самим тим, најпре њихови комплементи $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ и $\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ припадају σ-алгебри $\mathcal{M}(S_2)$, а одатле и скуп $\{1\} = (\mathbb{N} \setminus \{2\}) \cap \{1,2\} \in \mathcal{M}(S_2)$. Наравно, одатле и $\mathbb{N} \setminus \{1\} \in \mathcal{M}(S_2)$, па лако показујући да је $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{2\}, \mathbb{N} \setminus \{1,2\}, \mathbb{N}\}$ σ-алгебра, тада јасно добијамо да је управо она једнака $\mathcal{M}(S_2)$.

   в) Подсетимо се да је функција f мерљива, ако за произвољан $c \in \mathbb{R}$ важи $\{x \in X \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$, где је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра на простору X. Наведена функција f је свакако $\mathfrak{M}(S_1)$ мерљива, јер сваки подскуп скупа $\mathbb{N}$ припада $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. С друге стране, функција f није $\mathcal{M}(S_2)$ мерљива, јер је $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < 4\} = \{1,2,3\}$, а исти не припада $\mathcal{M}(S_2)$ из дела под б).

2. а) Дефиниција мере над σ-алгебром је дата у Дефиницији 2.19. Мера μ је транслаторно инваријантна, ако за сваки мерљив скуп $E \subseteq \mathbb{R}$ и сваку константу $a \in \mathbb{R}$ важи $\mu(E) = \mu(a+E)$.

   б) Диракова мера није транслаторно инваријантна. Посматраћемо Диракову меру дефинисану са $\delta(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E; \\ 0, & 0 \notin E \end{cases}$. Нека је $E = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Тада је $\delta(E) = 1$, али $\delta(E+2) = 0$. Слично се може показати за Диракову меру са произвољном истакнутом тачком x_0. Бројачка мера јесте транслаторно инваријантна зато што се кардиналност скупа не мења његовом транслацијом.

   в) Лебегова мера је специјални случај Каратеодоријеве, па се дефинише као рестрикција спољне мере m^* на скупу

   $$\mathfrak{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid \forall A \subseteq \mathbb{R} \;\; m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\}.$$

   Дакле, скуп $E \subseteq \mathbb{R}$ је Лебег мерљив ако и само ако $E \in \mathfrak{M}$. Сада треба показати $a + E \in \mathfrak{M}$. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ произвољан скуп. Треба показати $m^*(A) = m^*(A \cap (a+E)) + m^*(A \cap (a+E^c))$. Проверити да је $A \cap (a+E) = a + ((-a+A) \cap E)$ и $A \cap (a+E^c) = a + ((-a+A) \cap E^c)$. Следи,

   $$m^*(A \cap (a+E)) + m^*(A \cap (a+E^c)) = m^*(a + ((-a+A) \cap E)) + m^*(a + ((-a+A) \cap E^c))$$

   $$\stackrel{*_1}{=} m^*((-a+A) \cap E) + m^*((-a+A) \cap E^c) \stackrel{*_2}{=} m^*(-a+A) \stackrel{*_1}{=} m^*(A),$$

   где $*_1$ важи на основу става 2.32. да је m^* транслаторно инваријантна и $*_2$ важи зато што $E \in \mathfrak{M}$ примењено на скуп $-a+A$. Тиме је доказ завршен.

   г) Став 2.32. а).

3. а) Показаћемо прво за просту мерљиву функцију, па за ненегативну мерљиву, па за произвољну мерљиву. Нека је $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ проста мерљива функција. Тада је

   $$\int_A s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k \cap A) = 0,$$

   зато што су и сви скупови $E_k \cap A$ мере нула. Сада, нека је f произвољна мерљива ненегативна функција. На основу дефиниције интеграла важи

   $$\int_A f \, d\mu = \sup_{0 \le s \le f} \int_A s \, d\mu = 0.$$

И коначно, ако је f произвољног знака, онда користимо раздвајање $f = f^+ - f^-$, где су обе функције f^+ и f^- ненегативне, и дефиницију

$$\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu = 0 - 0 = 0.$$

б) Важи. Став 3.16 д).

в) Став 3.16 г).

г) Не мора да важи. На пример, нека је $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,0]; \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$ и мера Лебегова. Тада је

$$\int\limits_{[-1,1]} f\,dm = \int\limits_{[-1,0]} f\,dm + \int\limits_{(0,1]} f\,dm = -1 + 1 = 0.$$

4. а) Важи. У питању је једноставна последица ТМК, позната како са предавања, тако и са вежби. Дакле, уочимо низ функција $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Тада је g_n низ мерљивих, растућих, позитивних функција по услову задатка, па на њега можемо применити ТМК. Наиме, важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,d\mu(x) &= \int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu,
\end{aligned}$$

при чему трећа једнакост важи по ТМК, а у четвртој интеграл и суму можемо разменити јер је сума коначна.

б) Најпре, сменом, $t = \cos x$ добијамо $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}\,dx = \int\limits_1^0 \frac{\ln\sqrt{1-t^2}}{t}(-dt) = \int\limits_0^1 \frac{\ln\sqrt{1-t^2}}{t}dt$. Решење задатка следи из следећег низа једнакости:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{\ln\sqrt{1-t^2}}{t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-t^2)^n}{n} \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{n} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 \frac{t^{2n-1}}{n} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n\cdot n}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{24}.
\end{aligned}$$

5. а) Треба испитати за које $p \geqslant 1$, важи да је

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| n^{\frac{1}{3}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \right|^p \, dx$$

коначан. Но, наведени интеграл лако рачунамо као

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| n^{\frac{1}{3}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \right|^p \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} n^{\frac{p}{3}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \, dx = n^{\frac{p}{3}} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} dx = n^{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{n} = n^{\frac{p}{3}-1},$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{p}{3}-1}$ коначан акко $\frac{p}{3} - 1 \leqslant 0$, тј. за $1 \leqslant p \leqslant 3$.

б) Посматрајмо конвергенцију тачка по тачка. Узмимо најпре $x \neq 0$. Тада, за довољно велико n, важи да $x \notin \left[0, \frac{1}{n}\right]$, па тада $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ за $x \neq 0$. С друге стране, за $x = 0$ вредност $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ једнака је $+\infty$. Дакле, тачка по тачка лимес је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$. Но, како је тачка скуп мере нула, f_n конвергира μ скоро свуда и то ка нула функцији.

в) Нула функција је једини кандидат, па треба испитати за које p је

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| n^{\frac{1}{3}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \right|^p \, dx = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{3}-1}$$

једнак 0. Но, одговор је доста једноставан, потребно је да важи $\frac{p}{3} - 1 < 0$, тј. за $p \in [1, 3)$.

г) На основу Става 4.23., из чињеница да $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ и $\|f_n - 0\|_2 \to 0$ директно следи да f_n конвергира по мери ка нула функцији. Наравно, ово смо једноставно могли урадити и по дефиницији.