

1. а) [6] Нека су дати скупови $X = (0, +\infty)$ и $A = (0, 3]$ и $B = (1, 7]$. Одредити σ -алгебру \mathfrak{M} над скупом X генерисану скуповима A и B .
 - б) [6] Нека је дата функција $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty)$ са $\mu(E) = \begin{cases} +\infty, & 2 \in E \\ 10, & 1 \in E \text{ и } 2 \notin E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Доказати да је μ мера на (X, \mathfrak{M}) .
 - в) [6] Да ли је μ комплетна мера?
 - г) [6] Дате су функције $f_1(x) = \arctg x$, $f_2(x) = -3\chi_{(0,1]}(x) + 7\chi_{(3,7]}(x)$ и $f_3(x) = 4 - 2f_2(x)$. Које од наведених функција су \mathfrak{M} -мерљиве?
 - д) [6] За оне функције f_i које су мерљиве, израчунати $\int_{(0,+\infty)} f_i(x)d\mu(x)$, где је μ мера из дела б).
2. а) [5] Дефинисати Виталијев скуп и описати да ли је Лебег мерљив и Борел мерљив.
 - б) [5] Објаснити да ли је $V \cap \mathbb{Q}$ Лебег мерљив и Борел мерљив.
 - в) [5] Примером показати да спољна мера не мора бити адитивна.
3. а) [15] Теорема о монотonoј конвергенцији. Формулација и доказ у случају ограниченог низа функција.
 - б) [5] Може ли се на низ $f_n = \sin\left(\arctg \frac{n!+x^6}{n^5}\right)$, $x \in [a, b]$, где су a и b произвољни реални бројеви, применити ТМК?
 - в) [5] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$, где су a и b произвољни реални бројеви.
4. а) [5] Дефинисати есенцијални супремум.
 - б) [5] Дати пример функције којој су супремум и есенцијални супремум једнаки. Дати пример функције којој се разликују супремум и есенцијални супремум.
 - в) [10] Нека је (X, \mathfrak{M}, μ) простор са мером. Нека је дата функција $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ таква да $f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$. Доказати да $f \in L^p(X)$ за све $p \in [1, +\infty]$.
 - г) [10] Нека је (X, \mathfrak{M}, μ) простор са мером и $p, q \in [1, +\infty]$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Нека су дати низови функција $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(X)$ и $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(X)$ такви да $f_n \xrightarrow{L^p} f$ и $g_n \xrightarrow{L^q} g$. Доказати да онда $f_n g_n \xrightarrow{L^1} fg$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

1. а) Знамо да уколико су $A, B \in \mathfrak{M}$, тада су и $A^c, B^c, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{M}$. Наравно $\emptyset \in \mathfrak{M}$ и $(0, +\infty) \in \mathfrak{M}$. Дакле, $A \setminus B = (0, 1] \in \mathfrak{M}$, затим $A \cap B = (1, 3] \in \mathfrak{M}$ и $B \setminus A = (3, 7] \in \mathfrak{M}$ и $B^c = (7, +\infty) \in \mathfrak{M}$. Заправо су ова четири скуп 'цигле' за све елементе σ -алгебре. Сви елементи σ -алгебре \mathfrak{M} су (има их укупно 16) $\mathfrak{M} = \{\emptyset, (0, 1], (1, +\infty), (1, 3], (0, 1] \cup (3, +\infty), (3, 7], (0, 3] \cup (7, +\infty), (0, 7], (7, +\infty), (0, 3], (3, +\infty), (0, 1] \cup (3, 7], (1, 3] \cup (7, +\infty), (1, 7], (0, 1] \cup (7, +\infty), (0, +\infty)\}$.

б) Најпре, $\mu(\emptyset) = 0$ јер $1 \notin \emptyset$ и $2 \notin \emptyset$. Треба проверити да ли је $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$. Ако постоји n_0 тако да $2 \in E_{n_0}$, онда су обе стране $+\infty$ јер 2 припада и унији. Ако за све $n \in \mathbb{N}$, $2 \notin E_n$, онда гледамо да ли 1 припада неком E_n . Ако постоји E_{n_1} такав да $1 \in E_{n_1}$, онда из дисјунктности знамо да $1 \notin E_n$ и $2 \notin E_n$ за све $n \neq n_1$. Дакле, тада су обе стране једнакости једнаке 10. На крају, ако ни 1 ни 2 не припадају ниједном E_n , онда су обе стране једнаке 0, па смо доказали да је μ мера.

в) Узмимо произвољан скуп $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = 0$ и $F \subseteq E$. Треба видети да ли је скуп $F \in \mathfrak{M}$. Једини скупови мере нула су $\emptyset, (3, +\infty), (7, +\infty)$ и $(3, 7]$. Но, ако узмемо скуп $F = (4, 6) \subset X$ и за $E = (3, 7]$, онда је $F \subset E$, а $F \notin \mathfrak{M}$, па μ није комплетна мера.

г) f_1 није мерљива јер је нпр. скуп $\{x \in (0, +\infty) \mid \arctg x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\} = (0, \frac{\pi}{6}] \notin \mathfrak{M}$. Функција f_2 јесте мерљива, јер $(0, 1] \in \mathfrak{M}$ и $(3, 7] \in \mathfrak{M}$ па су онда $\chi_{(0,1]}(x)$ и $\chi_{(3,7]}(x)$ мерљиве, а константа пута мерљива, односно збир две мерљиве је мерљива функција. На крају, и f_3 јесте мерљива јер је константна функција $g(x) = 4$ мерљива, а мерљива је и $f_2(x)$, па и $2f_2(x)$, а f_3 је онда разлика две мерљиве.

д) По дефиницији $\int_{(0,+\infty)} f_2(x)d\mu(x) = -3\mu((0, 1]) + 7\mu((3, 7]) = -3 \cdot 10 + 7 \cdot 0 = -30$, при чему смо искористили да се ради о простој (додуше, делом и негативној) функцији и дефиницију мере μ . Даље је

$$\int_{(0,+\infty)} f_3(x)d\mu(x) = 4 \int_{(0,+\infty)} 1d\mu(x) - 2 \int_{(0,+\infty)} f_2(x)d\mu(x) = +\infty,$$

јер је $\mu(0, +\infty) = +\infty$ ($2 \in (0, +\infty)$).

2. а) Књига 1.3.(3. недеља на енастави) Виталијев скуп није Лебег мерљив, па није ни Борел мерљив.

б) $V \cap \mathbb{Q} = \{p\}$ је једна тачка. Тачка је Борел мерљив скуп: $\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})$, па је и Лебег мерљив.

в) 4. недеља на енастави. Посматрати скупове $E_n = r_n + V$, где су r_n рационални бројеви на интервалу $[-1, 1]$.

3. а) Теорема 3.17. у књизи (7. недеља на енастави).

б) Посматрамо \mathbb{R}^n са Лебеговом мером. f_n је непрекидна функција, за свако $n \in \mathbb{N}$, па је Лебег мерљива. Да бисмо применили ТМК треба проверити да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Покажимо прво $\frac{(n+1)!+x^6}{(n+1)^5} \geq \frac{n!+x^6}{n^5}$. Ова неједнакост је еквивалентна неједнакости

$$(n+1)! + x^6 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 (n! + x^6).$$

Пошто важи $x \in [a, b]$, онда постоји довољно велико $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_1$ важи $x^6 < n$. Даље, постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_2$ важи $(1 + \frac{1}{n})^5 < 2$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и нека је $n_0 > 2$. Тада за све $n \geq n_0$ важи

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 (n! + x^6) < 2(n! + n) \leq nn! + n! = (n+1)! \leq (n+1)! + x^6.$$

Друга неједнакост важи, зато што је $n > 2$. Тиме смо доказали да је $\frac{(n+1)!+x^6}{(n+1)^5} \geq \frac{n!+x^6}{n^5}$. Сада користимо да је \arctg растућа функција, па је $\arctg \frac{(n+1)!+x^6}{(n+1)^5} \geq \arctg \frac{n!+x^6}{n^5}$. Пошто важи $\arctg \frac{n!+x^6}{n^5} \in (0, \pi/2)$, а функција \sin је растућа на том интервалу, важи и $\sin \left(\arctg \frac{(n+1)!+x^6}{(n+1)^5} \right) \geq \sin \left(\arctg \frac{n!+x^6}{n^5} \right)$. Дакле, можемо применити ТМК.

в) Применимо ТМК.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b \sin \frac{\pi}{2} dx = b - a.$$

4. а) Дефиниција 4.11. у књизи (11. недеља на енастави).

б) За функцију $f(x) = 1$ за све $x \in \mathbb{R}$ важи да су есенцијални супремум и супремум једнаки (и једнаки 1). За функцију

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

важи да јој је супремум 2, а да је есенцијални супремум 1 јер је тачка Лебегове мере нула (наравно, посматрамо све време скуп \mathbb{R} , Лебегову σ -алгебру и Лебегову меру).

в) За $p = 1$ и $p = +\infty$ тврђење тривијално важи по претпоставци. Узмимо $p \in (1, +\infty)$. Тада је

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^{p-1} |f| d\mu \leq \|f\|_\infty^{p-1} \int_X |f| d\mu = \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1 \leq \infty,$$

па $f \in L^p(X, \mu)$, при чему неједнакост важи јер је $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ скоро свуда што нам је овде довољно.

г) Посматрајмо

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - f g\|_1 &= \int_X |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| dx \\ &= \int_X |f_n(x) g_n(x) - f_n(x) g(x) + f_n(x) g(x) - f(x) g(x)| dx \\ &\leq \int_X |f_n(x) g_n(x) - f_n(x) g(x)| dx + \int_X |f_n(x) g(x) - f(x) g(x)| dx \\ &= \int_X |f_n(x)| |g_n(x) - g(x)| dx + \int_X |f_n(x) - f(x)| |g(x)| dx \\ &\leq \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q, \end{aligned}$$

при чему смо у првој неједнакости искористили неједнакост троугла, а у другој Хелдерову неједнакост са коефицијентима p и q . Пуштањем $\lim_{n \rightarrow \infty}$, уз чињеницу да $f_n \in L^p$ (по претпоставци) и $g \in L^q$ (ово следи из особине норме, тј. неједнакости Минковског $\|g\|_q = \|g - g_n + g_n\|_q \leq \|g - g_n\|_q + \|g_n\|_q < \infty$) добијамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n g_n - f g\|_1 = 0$, што је и требало доказати.