Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок јануар
20.1.2021.

1. а) [5] Дефинисати Канторов скуп и Канторову сингуларну функцију.
   б) [10] Навести пример мере у којој је Канторов скуп мерљив, као и пример мере у којој Канторов скуп није мерљив. Објаснити.
   в) [10] Да ли је карактеристична функција Канторовог скупа Лебег мерљива? Да ли је Канторова сингуларна функција Лебег мерљива? Објаснити.

2. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ проста мерљива функција.
   а) [5] Доказати да је функција $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ дефинисана са
   $$\lambda(A) = \int\limits_X f\chi_A d\mu$$
   мера на σ-алгебри $\mathfrak{M}$.
   б) [5] Да ли исто важи за произвољну мерљиву функцију $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$?
   в) [5] Да ли исто важи за произвољну мерљиву функцију $f : X \to \mathbb{R}$?

3. [15] Израчунати
$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^n \frac{n^5 x}{1+n^4x^2} \frac{\sin\frac{x}{n} \cdot \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot e^{\frac{x}{n}}}{x^2}\, dx.$$

4. а) [10] Формулисати и доказати Левијев став.
   б) [10] Развити у ред $\int\limits_0^1 \log x \sin kx\, dx$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.
   а) [5] Дефинисати простор $L^p(X, \mu), 1 \leqslant p < \infty$.
   б) [10] Дефинисати конвергенцију по мери и дати пример низа функција који конвергира по мери, као и пример низа функција који не конвергира по мери.
   в) [10] Испитати везу између конвергенције по мери и конвергенције у L^p норми, $1 \leq p \leq \infty$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Поглавље 1.4. и 1.5

   б) Канторов скуп је Борел (па и Лебег) мерљив, зато што је затворен. Са друге стране, Канторов скуп није $\mathfrak{M}$-мерљив, при чему је $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X = [0,1]\}$, зато што Канторов скуп не припада σ-алгебри $\mathfrak{M}$.

   в) Карактеристична функција Канторовог скупа је Лебег мерљива, зато што је Канторов скуп Лебег мерљив. Канторова сингуларна функција је Лебег мерљива зато што је непрекидна.

2. а) Лема 3.13.

   б) Да. Последица 3.19.

   в) Не. Ако важи $f(x) \leq 0$, за све $x \in X$, онда је $\int\limits_X f\chi_A d\mu < 0$, за све $A \subset X$, а мера мора узимати само ненегативне вредности.

3. Приметимо најпре да се сменом $\frac{x}{n} = t$ решавамо израза који се стално појављује, и притом добијамо да је тражени израз једнак

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{n^5 \cdot nt}{1+n^4 \cdot n^2t^2} \frac{\sin t \cdot \log(1+t) \cdot e^t}{n^2t^2} n\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{n^5 t}{1+n^6t^2} \frac{\sin t \cdot \log(1+t) \cdot e^t}{t^2}\,dt. \qquad (1)$$

Како је $1+n^6t^2 = 1 + \frac{n^6t^2}{5} + \frac{n^6t^2}{5} + \frac{n^6t^2}{5} + \frac{n^6t^2}{5} + \frac{n^6t^2}{5} \geqslant 6\sqrt[6]{\frac{n^{30}t^{10}}{5^5}} = \frac{6}{\sqrt[6]{5^5}} n^5 t^{\frac{5}{3}}$, па је $\frac{n^5t}{1+n^6t^2} \leqslant \frac{n^5 t}{\frac{6}{\sqrt[6]{5^5}} n^5 t^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[6]{5^5}}{6t^{\frac{2}{3}}}$, па узевши у обзир да је $|\sin t| \leqslant |t|$ и $|\log(1+t)| \leqslant |t|$ за све $t \geqslant 0$ и наравано да је $e^t \leqslant e$ за све $t \in [0,1]$, то је

$$\left| \frac{n^5t}{1+n^6t^2} \frac{\sin t \cdot \log(1+t) \cdot e^t}{t^2} \right| \leqslant \frac{\sqrt[6]{5^5} e}{6t^{\frac{2}{3}}},$$

за све $t \in (0,1]$ (за скоро све t на сегменту). Како је $\frac{2}{3} \in (0,1)$, то је $g(t) = \frac{\sqrt[6]{5^5}e}{6t^{\frac{2}{3}}}$ интеграбилна доминанта. Самим тим, по ТДК, лимес и интеграл могу заменити места, па како је у имениоцу већи степен n у једнакости (1), то подинтегрална функција тежи 0 кад n тежи $+\infty$, па је тражени лимес једнак 0.

4. а) Став 3.25.

   б) Сетимо се да је $\sin kx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (очигледно је да треба ту функцију да развијамо), па је

$$\int\limits_0^1 \log x \sin kx\,dx = \int\limits_0^1 \log x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx.$$

Да бисмо применили Левијев став, треба да докажемо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 \left| \log x \frac{(-1)^{n-1}(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| dx < +\infty.$$

Приметимо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 \left| \log x \frac{(-1)^{n-1}(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 \log x \frac{(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{2n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_0^1 \log x \cdot x^{2n-1}\,dx.$$

Срачунајмо сада $\int\limits_0^1 \log x \cdot x^{2n-1}\,dx$, наравно, парцијалном интеграцијом ($u = \log x, dv = x^{2n-1}\,dx$). Тада је

$$\int\limits_0^1 \log x \cdot x^{2n-1}\,dx = \log x \cdot \frac{x^{2n}}{2n}\bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^{2n-1}}{2n}\,dx = -\frac{x^{2n}}{(2n)^2}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{4n^2}.$$

На крају, приметимо да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{2n-1}}{4(2n-1)!n^2} < \infty$ по Даламберовом критеријуму јер је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{k^{2n+1}}{4(2n+1)!(n+1)^2}}{\frac{k^{2n-1}}{4(2n-1)!n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k^2}{(2n+1)2n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 0 < 1.$$

Из свега наведеног, могуће је по Левијевом ставу заменити редослед суми и интегралу па добијамо да је

$$\int\limits_0^1 \log x \sin kx\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 \log x \frac{(-1)^{n-1}(kx)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}k^{2n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_0^1 \log x \cdot x^{2n-1}dx$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n k^{2n-1}}{4(2n-1)!n^2}$$

5. а) Поглавље 4.5. и 4.6.

б) Дефиниција 4.16.

Нека је $X = [0,\infty)$, мера Лебегова и нека је $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$. За свако $x \in X$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,\infty)}(x) = 1$. Дакле, низ f_n конвергира тачка по тачка ка функцији $f(x) = 1$. Проверимо конвергенцију по мери. Нека је $\epsilon = \frac{1}{2}$. Тада је $\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = [n,\infty)$, дакле мера овог скупа је бесконачно па дати функционални низ не конвергира по мери.

Нека је $X = [0,1]$, мера Лебегова и нека је $f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{n}, x = 0 \end{cases}$. Овај функционални низ конвергира по мери ка функцији $f(x) = 0$. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Приметимо да је $\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset \left(0, \frac{1}{n}\right)$, дакле мера овог скупа је мања или једнака $\frac{1}{n}$, па је лимес мера ових скупова једнак нули. Дакле, важи конвергенција по мери.

в) Из L^p конвергенције следи конвергенција по мери. У случају $1 \leq p < \infty$ погледати Став 4.23. Покажимо случај $p = \infty$ (или погледати фајл 8.5.пдф). Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Пошто је $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ то значи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_0$ важи $||f_n - f||_\infty < \epsilon$. Дакле, за све $n \geq n_0$ важи $\sup\mathrm{ess}_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. По дефиницији есенцијалног супремума, то значи да је за све $n \geq n_0$ скуп $A_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ мере нула. Дакле, $\mu(A_n) = 0$ за све $n \geq n_0$ па је и $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Са друге стране, из конвергенције по мери не мора да следи L^p конвергенција, за све $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пример је функционални низ $f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}}, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{n}, x = 0 \end{cases}$, где је $X = [0,1]$ и мера Лебегова и $1 \leq p < \infty$ произвољно. Овај функционални низ конвергира по мери ка функцији $f(x) = 0$. Покажимо да не важи конвергенција у норми $||\cdot||_p$. Приметимо прво да важи $f_n \in L^p(X,\mu)$, зато што је $\int\limits_X |f_n|^p dm = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n\,dm = 1 < \infty$. Међутим, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f|^p dm = \int\limits_X |f_n|^p dm = 1 \neq 0$. Слично, $f_n \in L^\infty(X,\mu)$, али $\sup\mathrm{ess}\, |f_n - f| = n^{\frac{1}{p}}$, што тежи ка бесконачно, па немамо ни конвергенцију у норми $||\cdot||_\infty$.