ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ
5. ЈУЛ 2015.

Питање 1. Формулисати Борел-Кантелијеву лему. (2 поена)

Одговор

Нека је A_n произвољан низ догађаја дефинисаних на истом простору вероватноћа. Дефинишимо догађај $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Борел-Кантелијева лема гласи:

а) Ако је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, онда је $P\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

б) Ако је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ и ако су догађаји A_n независни, онда је $P\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 1$.

Питање 2. Дефинисати емпиријску функцију расподеле и одредити је ако је дат узорак обима десет: 22, 17, 19, 15, 22, 17, 20, 17, 22, 15. (3 поена)

Одговор

Емпиријска функција расподеле је функција $F_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ која у свакој тачки $t \in \mathbb{R}$ узима вредност количника **броја елемената узорка који нису већи од** t и **обима узорка**.
Другим речима, $F_\varepsilon(t) = \frac{k_t}{n}$, где је k_t број елемената узорка који нису већи од $t \in \mathbb{R}$, а n обим узорка.

У случају задатог узорка:

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 15 \\ 2/10 & , \quad t \in [15,17) \\ 5/10 & , \quad t \in [17,19) \\ 6/10 & , \quad t \in [19,20) \\ 7/10 & , \quad t \in [20,22) \\ 1 & , \quad t \geq 22 \end{cases} .$$

Задатак 1. Обележје X има расподелу $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{\theta}{4} & 1-\frac{\theta}{2} & \frac{\theta}{4} \end{pmatrix}$, где је $\theta \in [0,2]$. Одредити оцену непознатог параметра θ методом максималне веродостојности на основу узорка обима $n \in \mathbb{N}$. (2 поена)

Решење

Нека је k број елемената узорка који су једнаки 0 ($k \in \{0,1,\ldots,n\}$). Тада је $L(\theta) = \left(\frac{\theta}{4}\right)^{n-k}\left(1-\frac{\theta}{2}\right)^{k}$, односно $\ln L(\theta) = (n-k)\cdot\ln\frac{\theta}{4} + k\cdot\ln\left(1-\frac{\theta}{2}\right)$. Даље је $(\ln L(\theta))' = (n-k)\cdot\frac{1}{\theta} - k\cdot\frac{1}{2-\theta}$ и треба решити једначину $(\ln L(\theta))' = 0$, односно $(n-k)\cdot(2-\theta) = k\cdot\theta$.

Одатле је: $2\cdot(n-k) = n\cdot\theta$, односно $\widehat{\theta_n} = 2\cdot\frac{n-k}{n} = 2 - \frac{2k}{n}$.

Задатак 2. Обележје X има померену експоненцијалну $\varepsilon(1,\theta)$ расподелу ($\theta \in \mathbb{R}$) са густином

$$f(t) = e^{-(t-\theta)},\ \ t \geq \theta.$$

Испитати непристрасност оцене $\widehat{\theta_n} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ за непознати параметар θ. (3 поена)

Решење

Да бисмо испитали непристрасност оцене, морамо израчунати њено очекивање. Ради лакшег записа, означимо са $Y = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

$F_Y(t) = P\{Y \leq t\} = P\left\{\min\{X_1, ..., X_n\} \leq t\right\} = 1 - P\left\{\min\{X_1, ..., X_n\} > t\right\} = 1 - \left(P\{X_1 > t\}\right)^n = 1 - \left(1 - P\{X_1 \leq t\}\right)^n = 1 - \left(1 - F_X(t)\right)^n$, за $t \geq \theta$.

$f_Y(t) = n \cdot \left(1 - F_X(t)\right)^{n-1} \cdot f_X(t)$, за $t \geq \theta$.

$F_Y(t) = \int\limits_{\theta}^{t} e^{-(u-\theta)}\, du = -\, e^{-(u-\theta)}\Big|_{\theta=u}^{t=u} = -\left(e^{-(t-\theta)} - 1\right) = 1 - e^{-(t-\theta)}$, за $t \geq \theta$.

$f_Y(t) = n \cdot e^{-(n-1)\cdot(t-\theta)} \cdot e^{-(t-\theta)} = n \cdot e^{-n(t-\theta)}$, за $t \geq \theta$.

$E(Y) = \int\limits_{\theta}^{+\infty} t \cdot n \cdot e^{-n(t-\theta)}\, dt = n \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} (u+\theta) \cdot e^{-nu}\, du = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{v}{n} + \theta\right) \cdot e^{-v}\, dv = \frac{1}{n} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} v \cdot e^{-v}\, dv + \theta \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-v}\, dv$

Сада се може закључити: $E\left(\widehat{\theta_n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \Gamma(2) + \theta \cdot \Gamma(1) = \frac{1}{n} + \theta$.

Самим тим, оцена $\widehat{\theta_n}$ није непристрасна, али јесте асимптотски непристрасна.

Задатак 3. Нека је X_n низ независних случајних величина са експоненцијалном $\varepsilon(1)$ расподелом и нека је $Y_n = \frac{1}{n^\alpha X_n}$, где је $n = 1, 2, \ldots$, а $\alpha > 0$. Испитати све четири врсте конвергенције низа Y_n. (4 поена)

Решење

Вероватноћа и статистика, Павле Младеновић, страна 142, пример 12.4. (четврто издање).