ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - КОЛОКВИЈУМ 2
26. ЈАНУАР 2015.

1. Случајна величина X има експоненцијалну $\varepsilon(\lambda)$ расподелу, где је $\lambda > 0$. Нека је $Y = 1 - e^{-\lambda X}$.

а) Одредити функцију расподеле случајне величине Y. (3 поена)

б) Коју расподелу има случајна величина Y? (1 поен)

в) Израчунати очекивања $E(X)$ и $E(Y)$, као и дисперзије $D(X)$ и $D(Y)$. (3 поена)

г) Израчунати коефицијент корелације $\rho(X,Y) = \rho_{X,Y}$. (3 поена)

Решење

а) Прво приметимо да је: $F_X(t) \overset{t\geq 0}{=\!=} 1 - e^{-\lambda t}$, док је $F_X(t) \overset{t<0}{=\!=} 0$.

$$F_Y(t) = P\{Y \leq t\} = P\{1 - e^{-\lambda X} \leq t\} = P\{e^{-\lambda X} \geq 1 - t\} \overset{t<1}{=\!=} P\{-\lambda X \geq \ln(1-t)\} =$$
$$= P\left\{X \leq -\frac{1}{\lambda}\ln(1-t)\right\} \overset{t\geq 0}{=\!=} F_X\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-t)\right) = 1 - (1-t) = t.$$

Закључак је да је $F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \in [0,1) \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$.

б) Случајна величина Y има униформну $\mathscr{U}[0,1)$ расподелу.

в) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $E(Y) = \dfrac{1}{2}$. $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $D(Y) = \dfrac{1}{12}$.

г) $\rho_{X,Y} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$. Дакле, још је потребно да израчунамо $E(XY)$.

$$E(XY) = E\left(X(1 - e^{-\lambda X})\right) = \int_0^{+\infty} t(1 - e^{-\lambda t}) \cdot \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \cdots = \frac{3}{4\lambda}.$$

Сада је, дакле: $\rho_{X,Y} = \dfrac{\frac{3}{4\lambda} - \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}\sqrt{\frac{1}{12}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Дакле, коефицијент корелације између случајних величина X и Y је $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Нека је скуп $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in [0,1]\}$. Функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата је са:

$$f(t,s) = \begin{cases} C\min\{t,s\} & , \quad (t,s) \in D \\ 0 & , \quad (t,s) \notin D \end{cases}.$$

а) Одредити реалну константу C, тако да функција f буде густина расподеле дводимензионе случајне величине (случајног вектора) (X,Y). (3 поена)

б) Одредити густину расподеле случајне величине X. (4 поена)

в) Израчунати вероватноћу догађаја $\{Y < \frac{1}{2}\}$, при услову $\{X < \frac{1}{2}\}$. (3 поена)

Напомена: Случајна величина X представља апсцису случајно изабране тачке, док случајна величина Y представља њену ординату.

Решење

а) Да би f била густина расподеле, мора бити: $f(t,s) \geq 0,\ t,s \in [0,1]$ и $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(t,s)\,dt\,ds = 1$.

Нека је $D = [0,1] \times [0,1]$. Означимо са $D_1 = \{(t,s) \in D \mid t \leq s\}$, а са $D_2 = \{(t,s) \in D \mid t > s\}$.

$$\iint\limits_D f(t,s)\,dt\,ds = \iint\limits_D C\min\{t,s\}\,dt\,ds = C\left(\iint\limits_{D_1} t\,dt\,ds + \iint\limits_{D_2} s\,dt\,ds\right) = C\left(\int\limits_0^1 t\,dt \int\limits_t^1 ds + \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t s\,ds\right) =$$

$$= C\left(\int\limits_0^1 t(1-t)\,dt + \int\limits_0^1 \frac{t^2}{2}\,dt\right) = C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{C}{3} = 1 \implies C = 3.$$

б) Прво ћемо одредити функцију расподеле случајне величине X: $F_X(u) = P\{X \leq u\}$. Даље, знамо да је: $P\{X \leq u\} = \iint\limits_{T_u} 3\min(t,s)\,dt\,ds$, где је $T_u = \{(t,s) \in D \mid t \leq u\}$ и $u \in [0,1]$.

$$F_X(u) = 3\int\limits_0^u dt \int\limits_0^t s\,ds + 3\int\limits_0^u t\,dt \int\limits_t^1 ds = 3\int\limits_0^u \frac{t^2}{2}\,dt + 3\int\limits_0^u t(1-t)\,dt = \frac{u^3}{2} + \frac{3u^2}{2} - u^3 = \frac{3u^2 - u^3}{2},\ u \in [0,1].$$

Сада можемо закључити да је: $f_X(u) = \dfrac{\partial F_X(u)}{\partial u} = \dfrac{6u - 3u^2}{2} = \dfrac{3u}{2}(2-u)$, за $u \in [0,1]$.

в) $$P\left\{Y < \frac{1}{2} \;\middle|\; X < \frac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X < \frac{1}{2}\right\}} = \frac{\iint\limits_W 3\min(t,s)\,dt\,ds}{F_X(\frac{1}{2})},$$ где је $W = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\iint\limits_W 3\min(t,s)\,dt\,ds = 3\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dt \int\limits_0^t s\,ds + 3\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t\,dt \int\limits_t^{\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}{2} = \frac{5}{16}.$$

Сада следи да је тражена вероватноћа: $P\left\{Y < \dfrac{1}{2} \;\middle|\; X < \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}} = \dfrac{2}{5}.$