ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - ТЕСТ 2
12. ЈАНУАР 2015.

1. Пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато је са $f(x) = 0,\ x < 3$ и $f(x) = \dfrac{C}{x^4},\ x \geq 3,\ C \in \mathbb{R}$.

а) Одредити константу $C \in \mathbb{R}$ тако да дато пресликавање f буде густина расподеле неке реалне случајне величине X. (2 поена)

б) Израчунати математичко очекивање тако дефинисане случајне величине X. (2 поена)

Решење

а) Да би функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ била густина расподеле, мора да задовољава следећа два услова :

1) $f(x) \geq 0$, за свако $x \in \mathbb{R} \implies C \geq 0$.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \implies \int_{3}^{+\infty} \frac{C}{x^4}\,dx = 1 \implies \cdots \implies C = 3^4.$

б) $\displaystyle E(X) = \int_{3}^{+\infty} xf(x)\,dx = 3^4 \int_{3}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{x^4}\,dx = \cdots = \frac{9}{2}.$

---

2. Нека су $f_X, g_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ густине расподела случајних величина $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$.
Испитати да ли је пресликавање $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(t,s) = f_X(t) \cdot g_Y(s)$ густина расподеле случајног вектора $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$. (2 поена)

Решење

Функција $h(t,s) = f_X(t) \cdot g_Y(s)$ је густина расподеле случајног вектора (X, Y) **ако и само ако** су случајне величине X и Y независне. Дакле, довољно је размотрити било који случај зависних случајних величина, на пример : $X \in \mathscr{U}[0,1]$, док је $Y = X$. У поменутом случају, функција h има облик $h(t,s) = 1,\ t, s \in [0,1]$, а то није густина расподеле случајног вектора $(X,Y) = (X,X)$.

---

3. а) Пресликавање $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато је са: $G(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1+t^2}{3+2t^2}, & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^t, & t \leq 0 \end{cases}$. Испитати да ли је G функција расподеле вероватноћа. (2 поена)

б) Нека су $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (једнодимензионе) функције расподеле вероватноћа.
Испитати да ли је пресликавање $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(t_1, t_2, t_3) = F_1(t_1) \cdot F_2(t_2) \cdot F_3(t_3)$ (тродимензиона) функција расподеле вероватноћа. (2 поена)

Решење

а) Из дефиниције функције G се јасно види да није непрекидна **здесна** у тачки $t = 0$ (обзиром да је $G(0) = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \lim\limits_{t \to 0+} G(t)$), па стога G не може бити функција расподеле.

б) Да би функција F била функција расподеле, мора да задовољава следеће услове :

1° F је непрекидна **здесна** по свакој променљивој.

2° $\lim\limits_{t_1 \to -\infty} F(t_1, t_2, t_3) = \lim\limits_{t_2 \to -\infty} F(t_1, t_2, t_3) = \lim\limits_{t_3 \to -\infty} F(t_1, t_2, t_3) = 0.$

3° $F(+\infty, +\infty, +\infty) = 1.$

4° $\Delta_F(I) \geq 0$, за сваки $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$, $(b_1 \geq a_1, b_2 \geq a_2, b_3 \geq a_3)$.

Својства 1°, 2° и 3° следе (скоро тривијално) из чињенице да су F_1, F_2 и F_3 функције расподела.
Покажимо сада својство 4° :

$$\begin{aligned}
\Delta_F(I) = {} & F(b_1, b_2, b_3) \\
& - F(b_1, b_2, a_3) - F(b_1, a_2, b_3) - F(a_1, b_2, b_3) \\
& + F(b_1, a_2, a_3) + F(a_1, b_2, a_3) + F(a_1, a_2, b_3) \\
& - F(a_1, a_2, a_3) \\
& = \cdots = (F_1(b_1) - F_1(a_1)) \cdot (F_2(b_2) - F_2(a_2)) \cdot (F_3(b_3) - F_3(a_3)) \geq 0.
\end{aligned}$$

Дакле, функција F је заиста (тродимензиона) функција расподеле вероватноћа.