Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)
   а) Ињекција или '1-1' пресликавање.
   б) Векторски простор и векторски потпростор.
   в) Линеарна независност скупа вектора $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ над пољем $\mathbb{R}$.
   г) Навести *Грасманову формулу*.
   д) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L ињекција. Доказати.

2. [5] Нека је $U = \mathfrak{L}(e_1, e_2, e_3)$, где је:

$$\begin{array}{rcrrrr} e_1 & = & (1, & 1, & 1, & 1) \\ e_2 & = & (-1, & 2, & 0, & 5) \\ e_3 & = & (4, & 1, & 3, & -2) \end{array}$$

   и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & z & + & 5t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & + & 3t & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & z & + & 8t & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & + & 7t & = & 0. \end{array}$$

   Одредити неку базу и дименизију простора $U, W, U + W$ и $U \cap W$.

3. [5] Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ и нека је U скуп свих матрица X за које важи $AX = XA^T$
   а) Доказати да је U један векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) Одредити бар једну базу и димензију простора U.
   в) Нека је $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & q \end{bmatrix} \mid \quad p, q \in \mathbb{R} \right\}$. Испитати да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

4. [5] Нека је дато пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x + 2y + 8z, x + 3y + 7z, 2x + 4y + 15z)$.
   а) Доказати да је пресликавање L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.
   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & \alpha + 1 & 2 & \alpha - 5 \\ 1 & -42 & 0 & \alpha^2 + 4 \end{bmatrix}$.
   а) Израчунати $\det A$.
   б) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра α.
   в) За које α матрица A има инверз?

6. [5] Нека су вектори u, v и w линеарно независни вектори векторског простора V. Испитати да ли су $u+2v+3w, 2u+3v+8w, u+2v+4w$ линеарно независни.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!