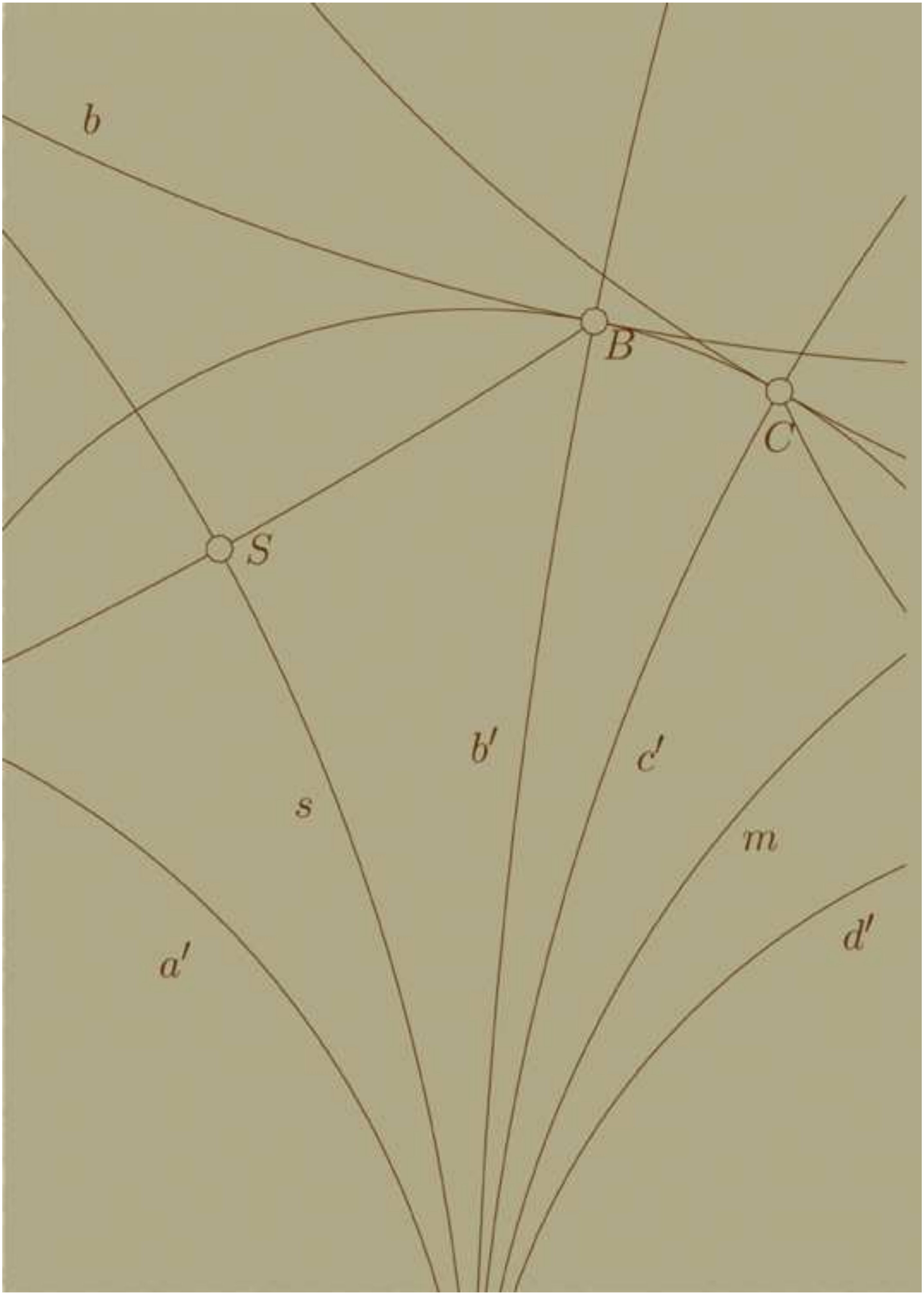
Zbirka zadataka iz geometrije


b
B
C
S
b′
c′
s
m
a′
d′

Predrag Janičić

ZBIRKA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE

Matematički fakultet

Predrag Janičić • ZBIRKA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE

Predrag Janičić

ZBIRKA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE

Sedmo izdanje (treći put ponovljeno četvrto izdanje)

Matematički fakultet
Beograd, 2007

Autor:
dr Predrag Janičić, docent Matematičkog fakulteta u Beogradu

ZBIRKA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE

Izdavač:
Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd

Za izdavača:
dr Aleksandar Lipkovski

Recenzenti:
dr Zoran Lučić, vanredni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Milan Mitrović, profesor Matematičke gimnazije u Beogradu

Priprema za štampu, crteži i korice:
dr Predrag Janičić

Prvo izdanje 1997. Drugo izdanje 1998. Treće izdanje 1999.
Četvrto izdanje 2003. Peto izdanje (ponovljeno četvrto izdanje) 2004.
Šesto izdanje (drugi put ponovljeno četvrto izdanje) 2005.
Sedmo izdanje (treći put ponovljeno četvrto izdanje) 2007.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

514.12/.13(075.8)(076)

ЈАНИЧИЋ, Предраг
Zbirka zadataka iz geometrije / Predrag Janičić. – 4. izd. – Beograd : Matematički fakultet, 2003 (Beograd : Skripta Internacional). – 171 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200.

ISBN 86-7589-031-1

a) Геометрија - Задаци
COBISS.SR-ID 108403468

ISBN 86-7589-031-1

Predgovor

Zbirka koja je pred vama sadrži zadatke sa pismenog dela ispita iz predmeta *Osnovi geometrije* sa druge godine studija na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Namenjena je studentima Matematičkog fakulteta, ali nadam se da može biti korisna i svima ostalima koji izučavaju geometriju.

U pisanju zbirke rukovodio sam se potrebom da, pored zbirki iz geometrije sa velikim brojem zadataka i, uglavnom, samo idejama za njihovo rešavanje, postoji i zbirka sa detaljno rešenim zadacima (na račun njihovog broja). U pisanju rešenja trudio sam se da se približim teško dostižnom idealu potpuno precizno i detaljno rešenih geometrijskih zadataka, pri čemu nivo preciznosti nekih od rešenja prevazilazi nivo koji se očekuje na pismenom ispitu.

Zbirka sadrži rešene zadatke sa trideset ispitnih rokova. U svakom od ispitnih rokova, prvi zadatak je iz euklidske planimetrije, drugi iz euklidske konstruktivne geometrije, treći iz euklidske stereometrije i četvrti iz apsolutne ili hiperboličke geometrije. Za razliku od prethodnih izdanja, u ovom izdanju zadaci su grupisani po oblastima i, koliko je to bilo moguće, podoblastima, a onda od lakših ka težim (a ne po ispitnim rokovima). Zahvaljujući tome, zbirka sada može da se koristi ne samo za proveru znanja, već i kao metodička zbirka (jer pokriva gotovo sve sadržaje koji se obrađuju na vežbama iz predmeta *Osnovi geometrije*). Novina je i dodatak sa zadacima sa svih ispitnih rokova iz perioda kada sam učestvovao u održavanju pismenog dela ispita (od junskog ispitnog roka 1994. godine do aprilskog ispitnog roka 2002. godine). Za zadatke sa prvih trideset od tih rokova u zagradama je naveden redni broj rešenja u ovoj zbirci. U okviru tih trideset rokova četiri zadatka su ponovljena, pa zbirka sadrži ukupno sto šesnaest rešenih zadataka. U odnosu na prethodno izdanje napravljeno je i nekoliko ispravki.

Deo zadataka iz ove zbirke je originalan, a preostali su preuzeti iz mnoštva izvora od kojih su najčešće korišćeni udžbenik za predmet *Osnovi geometrije*: *Zoran Lučić: Euklidska i hiperbolička geometrija* (*Graffiti i Matematički fakultet, Beograd 1994*) i srednjoškolski udžbenik *Dragomir Lopandić: Geometrija za III razred usmerenog obrazovanja* (*Naučna knjiga, Beograd 1984*).

Crteže sam napravio korišćenjem svog paketa GCLC (paket GCLC dostupan je na adresi `www.matf.bg.ac.yu/~janicic/gclc`).

U izboru i rešavanju zadataka za pismene ispite učestvovali su i dr Zoran Lučić, dr Dragoslav Ljubić, dr Srđan Vukmirović, mr Miljan Knežević i Milan Mitrović, učestvujući time i u kreiranju ove zbirke, na čemu im najtoplije zahvaljujem. Pored toga, dr Zoran Lučić i Milan Mitrović su, kao recenzenti, nizom izuzetno korisnih sugestija, ideja i predloženih rešenja uticali na kvalitet zbirke. Zahvaljujem i mnogobrojnim studentima koji su svojim originalnim rešenjima, pitanjima i sugestijama na časovima vežbi i na pismenim ispitima iz predmeta *Osnovi geometrije* uticali na ovu zbirku. Dragocenu pomoć pružili su mi studenti koji su mi ukazali na greške načinjene u prethodnim izdanjima zbirke, a posebno Ivana Mijajlović, Miroljub Lilić, Miloš Utvić i Mladen Adamović. Zahvaljujem i svima koji su me podstakli da pripremim ovo, novo izdanje zbirke.

Autor

Beograd, septembar 2003.

Predgovor sedmom izdanju

Ovo, sedmo izdanje zbirke je elektronsko i besplatno dostupno sa Internet adrese www.matf.bg.ac.yu/~janicic. Nadam se da će tako biti pristupačno još širem krugu potencijalnih čitalaca.

Autor

Beograd, januar 2007.

Zadaci

Planimetrija

1. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilini i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave AB, tačke A i E su sa raznih strana prave BC, tačke B i F su sa raznih strana prave AC. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

2. U trouglu $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod temena A, tačka D je podnožje visine iz temena A, tačka E je središte duži DC, a tačka F je središte duži AD. Dokazati da važi $BF \perp AE$.

3. Neka je K središte težišne duži CC_1 trougla ABC i neka je M presečna tačka pravih AK i BC. Dokazati da važi $CM : MB = 1 : 2$.

4. Dokazati da većoj ivici trougla odgovara manja težišna duž i obratno.

5. Neka je tačka E između temena A i B kvadrata $ABCD$. Simetrala ugla $\angle CDE$ seče ivicu BC u tački K. Dokazati jednakost $AE + KC = DE$.

6. Bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABC$ seče prave B_1C_1 i B_1A_1 (tačke A_1, B_1 i C_1 su središta ivica BC, AC i AB) u tačkama A_2 i C_2. Dokazati da su prave AA_2 i CC_2 upravne na bisektrisi unutrašnjeg ugla kod temena B i da važi $B_1A_2 \cong B_1C_2$.

7. U euklidskoj ravni dat je pravougaonik ABCD takav da je $AB = 3BC$. Ako su E i F tačke ivice AB takve da je $AE \cong EF \cong FB$ dokazati da važi $\angle AED + \angle AFD + \angle ABD = \frac{\pi}{2}$.

8. Ako je visina jednakokrakog trapeza jednaka h, a površina h^2, dokazati da su njegove dijagonale međusobno normalne.

9. Neka su tačke P i Q između temena A i B, odnosno B i C kvadrata $ABCD$ takve da važi $BP \cong BQ$. Ako je tačka H podnožje normale iz tačke B na pravoj PC, dokazati da je ugao $\angle DHQ$ prav.

10. Neka je $ABCD$ konveksan tetivni četvorougao čije su dijagonale međusobno upravne (i seku se u tački E). Dokazati da prava koja sadrži tačku E i upravna je na pravoj CD sadrži središte ivice AB.

11. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka D na duži BC. Ako su O_1 i O_2 središta opisanih krugova trouglova ABD i ACD, dokazati da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle AO_1O_2$ slični.

12. U ravni su dati krug k, prava p koja ga dodiruje i tačka M koja pripada pravoj p. Odrediti skup svih tačaka P koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoje tačke Q i R koje pripadaju pravoj p, takve da je M središte duži QR i da je k upisani krug trougla $\triangle PQR$.

13. Dokazati da su kolinearna podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjih i spoljašnjih uglova kod temena B i C trougla $\triangle ABC$.

14. U krug je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lûkova BC, CA i AB (tačke M i A, N i B, P i C nalaze se sa raznih strana pravih BC, AC, AB). Tetiva MN seče ivicu BC u tački K, a tetiva NP seče ivicu AB u tački L. Dokazati da su prave KL i AC paralelne.

15. Neka je $\triangle ABC$ trougao takav da je $AB > AC$, neka je A_1 središte ivice BC i neka su tačke P i Q tačke pravih određenih ivicama AB i AC takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B)$, $\mathcal{B}(C,A,Q)$ i $AP \cong AQ$. Ako se prave AA_1 i PQ seku u tački R, dokazati da važi

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{AC}{AB}.$$

16. U trouglu $\triangle ABC$ važi $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Neka su tačke M i N središta ivica AB i AC i neka je l opisani krug trougla $\triangle AMN$. Dokazati da središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ pripada krugu l.

17. Neka je u trouglu $\triangle ABC$ tačka A_1 središte ivice BC, a tačka E presek bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ i prave BC. Opisani krug k trougla $\triangle AEA_1$ seče ivice AB i AC u tačkama F i G. Dokazati da važi $BF \cong CG$.

18. Dokazati da se u jednoj tački seku prave od kojih svaka sadrži po jedno teme trougla i razlaže obim tog trougla na dva jednaka dela.

19. Tačka P pripada unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Ako su X, Y i Z redom presečne tačke pravih AP i BC, BP i AC, odnosno CP i AB, dokazati da važi:

$$P_{\triangle BXP} \cdot P_{\triangle CYP} \cdot P_{\triangle AZP} = P_{\triangle CPX} \cdot P_{\triangle APY} \cdot P_{\triangle BPZ}\ .$$

20. Dokazati da je prava određena visinom AD trougla $\triangle ABC$ radikalna osa krugova čiji su prečnici težišne duži BB_1 i CC_1 tog trougla.

21. Neka je tačka E takva da je prava AE paralelna dijagonali BD paralelograma $ABCD$. Dokazati da su prave AB, AD, AC i AE harmonijski spregnute.

22. Neka je O središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Ako su B' i C' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$, dokazati da važi $B'C' \perp AO$.

23. U ravni su data dva kruga l_1 i l_2 koja se seku. Krug k_1 dodiruje spolja krugove l_1 i l_2, krug k_2 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_1, krug k_3 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_2, itd. Dokazati da su krugovi k_1, k_2, k_3, ... normalni na nekoj pravoj ili na nekom krugu.

24. Krug k_1 pripada unutrašnjosti kruga k_2 i krug l_1 dodiruje krugove k_1 i k_2. Krug l_{i+1} $(i > 1)$ dodiruje krugove l_i, k_1 i k_2. Ako postoji krug l_n takav da dodiruje krug l_1, dokazati da takav krug postoji bez obzira na izbor kruga l_1.

25. Ako neka figura euklidske ravni ima tačno dve ose simetrije, onda je ona centralno simetrična. Dokazati.

26. Dokazati da je skup koji se sastoji iz koincidencije $\mathcal{I}$, svih translacija $\mathcal{T}$ euklidske ravni i svih centralnih simetrija $\mathcal{S}$ te iste ravni, nekomutativna grupa u odnosu na operaciju proizvoda izometrija.

27. Ako je H tačka koja pripada unutrašnjosti paralelograma $ABCD$ takva da je zbir uglova $\angle AHB$ i $\angle CHD$ jednak zbiru dva prava ugla, dokazati da su uglovi $\angle HAB$ i $\angle HCB$ podudarni.

28. U eukldiskoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$. Neka su B' i C' tačke pravih AB i AC takve da je $\mathcal{B}(A, B, B')$ i $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ako je P_a tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje ivicu BC tog trougla, dokazati da važi

$$\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a} \ .$$

29. Neka je $\triangle ABC$ pravougli trougao sa pravim uglom kod temena A, neka je $AKLB$ kvadrat takav da su tačke K i C sa raznih strana prave AB i neka je $ACPQ$ kvadrat takav da su tačke P i B sa raznih strana prave AC. Ako je tačka S središte duži LP, dokazati da je trougao $\triangle BCS$ jednakokraki i pravougli.

30. U ravni su date tri razne tačke A, B i C i uglovi α, β i γ manji od opruženog ugla. Odrediti kada je kompozicija

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$$

rotacija, translacija odnosno koincidencija (uglovi α, β i γ su isto orijentisani).

Konstruktivni zadaci

31. Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\angle AED$ i $\angle DEC$ podudarni.

32. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

33. Konstruisati trougao ABC takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c središta spolja upisanih krugova.

34. Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da date tačke P, Q, R, S budu između njegovih temena A i B, B i C, C i D, D i A, respektivno.

35. Dat je pravilan trougao ABC. Neka je tačka O središte opisanog kruga trougla ABC i neka je P tačka duži OC. Konstruisati pravilan trougao XYZ upisan u trougao ABC takav da tačke X, Y i Z pripadaju redom ivicama BC, CA i AB i da ivica XY sadrži tačku P.

36. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu ivica BC, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga podudarni redom datim dužima a, ρ i r.

37. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S i E. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je tačka A_1 središte ivice BC, tačka S središte upisanog kruga, a E tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ seče ivicu BC.

38. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_a i E. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je tačka A_1 središte ivice BC, tačka S_a središte spolja upisanog kruga koji dodiruje ivicu BC i E tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A seče ivicu BC.

39. Konstruisati trougao ABC takav da su središta opisanog kruga, upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A tog trougla tri date tačke O, S i S_a.

40. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je zbir stranica AB i AC jednak datoj duži d, a poluprečnici spolja upisanih krugova koji odgovaraju temenima B i C podudarni datim dužima ρ_b i ρ_c.

41. Konstruisati tačke P i Q redom na ivicama AC i BC trougla ABC takve da važi $AP \cong PQ \cong QB$.

42. Dat je trougao $\triangle ABC$ i oštar ugao δ. Konstruisati romb $PQRS$ takav da njegova temena P i Q pripadaju ivici AB, teme R ivici BC, teme S ivici CA i da je njegov unutrašnji ugao $\angle SPQ$ podudaran datom uglu δ.

43. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je zbir unutrašnjih uglova kod temena A i B jednak datom uglu ϕ, zbir unutrašnjih uglova kod temena A i C jednak datom uglu ψ, a zbir poluprečnika opisanog i upisanog kruga jednak datoj duži d.

44. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži BB_1 i CC_1 podudarne redom datim dužima t_b i t_c, a ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α.

45. Data su u ravni dva kruga k_1 i k_2, koji se seku u dvema tačkama P i Q i duži m i n. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče krugove k_1 i k_2 u tačkama X i Y takvim da je $PX : PY = m : n$.

46. Konstruisati trougao ABC takav da mu je ivica BC podudarna datoj duži a, odnos ivica AC i AB jednak odnosu datih duži m i n i razlika unutrašnjih uglova kod temena B i C jednaka uglu δ.

47. Konstruisati tetivni četvorougao takav da su mu ivice podudarne datim dužima.

48. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačke Q i R koje su između njegovih temena B i C, odnosno A i C. Konstruisati sve tačke P takve da pripadaju pravoj AB i da važi $BQ \cdot CR \cdot AP = QC \cdot RA \cdot PB$.

49. Konstruisati trougao ABC takav da je datoj duži l_a podudarna duž AE, gde je E presečna tačka ivice BC i bisektrise unutrašnjeg ugla trougla kod temena A i da su rastojanja temena B i C od te bisektrise jednaka redom merama datih duži m i n.

50. Konstruisati trougao ABC takav da je datoj duži l_a podudarna duž AE, gde je E presečna tačka ivice BC i bisektrise unutrašnjeg ugla trougla kod temena A i da su ivica BC i visina AA' podudarne datim dužima a i h_a.

51. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su njegova visina koja odgovara temenu A, poluprečnik upisanog kruga i ivica BC podudarne redom datim dužima h_a, ρ i a.

52. U euklidskoj ravni data je tačka A i različiti krugovi k_1 i k_2 koji je ne sadrže. Konstruisati krug k koji sadrži tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2.

53. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A i B i seče dati krug l pod datim uglom α (tačke A i B ne pripadaju krugu l; $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

54. U ravni su dati prava s i dva kruga k_1 i k_2. Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da mu temena A i C pripadaju pravoj s, a temena B i D krugovima k_1 i k_2.

55. U ravni je dato pet tačaka P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5. Konstruisati u toj ravni petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ takav da su tačke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 središta ivica A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 respektivno.

56. Neka su M i N dve različite tačke koje pripadaju oštrom uglu $\angle pOq$. Konstruisati na polupravoj p tačku X takvu da važi $XY \cong XZ$, gde su Y i Z presečne tačke prave q sa pravama XM i XN redom.

57. Dati su u ravni krug $k(O, r)$, dve tačke P i Q i ugao w. Konstruisati tačke X i Y takve da pripadaju krugu k i da važi $PX \| QY$ i $\angle XOY \cong w$.

58. Dati su u ravni krug $k(O,r)$, dve tačke P i Q i dva ugla ω i δ. Konstruisati na krugu k tačke X i Y takve da su orijentisani trouglovi $\triangle OPX$ i $\triangle OQY$ istosmerni i da važi $\angle XOY = \omega$ i $\angle OPX - \angle OQY = \delta$.

59. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su date nekolinearne tačke O_a, O_b i O_c središta kvadrata konstruisanih spolja nad njegovim ivicama BC, CA i AB.

Stereometrija

60. Dokazati da je u svakoj poliedarskoj površi broj pljosni sa neparnim brojem ivica paran.

61. Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presečna tačka prave određene tačkama M i N i prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravni α.

62. Ako su P i Q redom tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava PQ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

63. U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ i $\angle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

64. U prostoru su date tačke A i B i prava l. Odrediti ravan π takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravni π pripada pravoj l.

65. Tri sfere imaju zajedničku tačku P, pri čemu nijedna prava koja sadrži tačku P nije zajednička tangenta za sve tri sfere. Dokazati da te sfere imaju bar još jednu zajedničku tačku.

66. Sfera koja sadrži temena A, B, C tetraedra $ABCD$ seče ivice AD, BD, CD u tačkama A', B', C'. Dokazati da je ravan određena tačkama A', B' i C' paralelna tangentnoj ravni na opisanu sferu tetraedra $ABCD$ u tački D.

67. Za date tačke A i B i date duži m i n, odrediti skup tačaka X euklidskog prostora takvih da je $AX : BX = m : n$ i $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$.

68. Date su dve paralelne ravni β i γ i tačka A takva da su ta tačka i ravan β sa raznih strana ravni γ. Odrediti skup svih tačaka D za koje prava AD seče ravni β i γ u tačkama B i C takvim da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

69. Sve četiri pljosni tetraedra $ABCD$ su oštrougli trouglovi. Oko svake njegove pljosni opisan je krug. Ako sva četiri kruga imaju podudarne poluprečnike, dokazati da su sve četiri pljosni tetraedra podudarni trouglovi.

70. U prostornom četvorouglu $ABCD$ naspramne stranice su podudarne ($AB \cong CD$, $AD \cong BC$). Dokazati da je prava određena središtima dijagonala četvorougla ujedno i njihova zajednička normala.

71. Ako ravan π seče tetraedrsku površ $ABCD$, onda je taj presek paralelogram ako i samo ako je ravan π paralelna sa dvema naspramnim ivicama tetraedra. Dokazati.

72. Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar i neka je D' podnožje visine koje odgovara temenu D. Ako je E središte duži DD', dokazati da su uglovi $\angle AEB$, $\angle BEC$ i $\angle CEA$ pravi.

73. Ako se seku u jednoj tački prave koje sadrže temena A, B, C, D tetraedra $ABCD$ i normalne su, redom, na pljosnima $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ tetraedra $A'B'C'D'$, dokazati da se u jednoj tački seku i prave koje sadrže temena A', B', C', D' tetraedra $A'B'C'D'$ i normalne su, redom, na pljosnima BCD, CDA, DAB, ABC tetraedra $ABCD$.

74. U euklidskom prostoru data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (paralelne su ivice AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1). Na pljosnima BCC_1B_1 i ADD_1A_1 odrediti redom tačke E i F takve da zbir $AE + EF + FC_1$ bude najmanji mogući.

75. Dokazati da je kompozicija tri ravanske refleksije kojima su osnove određene bočnim pljosnima trostrane prizme $ABCA'B'C'$ zadate u euklidskom prostoru klizajuća refleksija tog prostora.

76. Dokazati da je u prostoru E^3 kompozicija sastavljena od tri ravanske refleksije kojima su osnove α, β, γ određene pljosnima triedra $Oabc$ osnorotaciona refleksija. Odrediti osnovu i osu te osnorotacione refleksije.

77. Dokazati da je kompozicija sastavljena od četiri ravanske refleksije euklidskog prostora kojima su osnove određene bočnim pljosnima četvorostrane piramide osna rotacija tog prostora i odrediti osu te osne rotacije.

78. U euklidskom prostoru data je kocka $ABCDA'B'C'D'$ (paralelne su ivice AA', BB', CC' i DD'). Neka je α ravan $A'BC'$, β ravan koja sadrži pravu $A'B$ i normalna je na ravni α i neka je γ simetralna ravan duži $A'C'$. Ako je $\mathcal{I}$ kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta$, odrediti $\mathcal{I}^{96}(A')$.

79. U euklidskom prostoru E^3 dat je paralelogram $ABCD$. Odrediti tip izometrijske transformacije

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \ ,$$

gde su $\mathcal{S}_{AB}, \mathcal{S}_{BC}, \mathcal{S}_{CD}, \mathcal{S}_{DA}$ osne refleksije prostora E^3 ?

80. Neka je $ABCD$ tetraedar u euklidskom prostoru i neka su tačke P, Q, R, S središta njegovih ivica AB, AC, DB, DC. Odrediti tip izometrije $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{RS} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{PQ}$ ($\mathcal{S}_{RS}$, $\mathcal{S}_{BC}$ i $\mathcal{S}_{PQ}$ su osne refleksije prostora).

81. Dokazati da je kompozicija parnog broja osnih refleksija euklidskog prostora kojima su ose upravne na nekoj ravni π translacija ili koincidencija.

82. U euklidskom prostoru odrediti dve mimoilazne prave x i y takve da prave $\mathcal{S}_x(y)$ i $\mathcal{S}_y(x)$ budu koplanarne.

83. Ako su $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$ ravanske refleksije i $\mathcal{S}_C$ centralna refleksija prostora, dokazati da kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$ ako i samo ako su ravni α i β među sobom paralelne.

84. Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije i $\mathcal{S}_\gamma$ ravanska refleksija euklidskog prostora, dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A$$

neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako je $AB \perp \gamma$.

85. Neka su tačke M, N, P, Q, R i S redom središta ivica AB, BC, CA, AD, BD i CD tetraedra $ABCD$. Dokazati:

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MS'}},$$

gde je S' tačka simetrična tački S u odnosu na tačku R.

86. Date su u euklidskom prostoru dve podudarne sfere σ_1 i σ_2 i dve tačke P_1 i P_2. Konstruisati dve međusobno paralelne ravni π_1 i π_2 od kojih prva sadrži tačku P_1 i dodiruje sferu σ_1, a druga sadrži tačku P_2 i dodiruje sferu σ_2.

87. Ako je s data prava normalna na datoj ravni π i ako je ω dati ugao, odrediti skup tačaka σ euklidskog prostora takav da mu tačka S pripada ako i samo ako je S središte neke duži AA' takve da je $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$.

88. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja ako su njihove ose dve mimoilazne prave?

Hiperbolička i apsolutna geometrija

89. Dokazati da je duž određena središtem hipotenuze i temenom pravog ugla pravouglog trougla hiperboličke ravni manja od polovine hipotenuze.

90. U hiperboličkoj ravni dat je pravougli trougao $\triangle ABC$ ($AB \perp BC$). Ako su C_1 i B_1 središta ivica AB i AC, dokazati da prava B_1C_1 nije upravna na pravoj AB.

91. Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' međusobno podudarni ako je $AD \cong A'D'$ i $BC \cong B'C'$.

92. Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno podudarni likovi ako je $CD \cong C'D'$ i $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$.

93. Dokazati da su Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno podudarni ako je $CD \cong C'D'$ i $BC \cong B'C'$.

94. Dokazati da u hiperboličkoj ravni za tri nekolinearne tačke A, B i C važi

$$\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)\ .$$

95. Ako su u hiperboličkoj ravni tačke A, B i C tri razne neke prave l i O tačka izvan te prave, dokazati da središta duži OA, OB i OC ne pripadaju jednoj pravoj.

96. U hiperboličkoj ravni date su paralelne prave p i q. Odrediti skup tačaka A takvih da je ugao $\angle PAQ$ prav, gde su P i Q podnožja normala iz tačke A redom na pravama p i q.

97. Odrediti poluprečnik kruga upisanog u asimptotski trougao hiperboličke ravni kojem su sva tri temena nesvojstvena.

98. Neka je ABC trougao hiperboličke ravni kojem je ugao C prav. Ako je $\angle ABC = \Pi(b')$, $CA = b$, $AB = c$, i ako važi $b' < c$, dokazati jednakost $\angle CAB = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

99. Neka je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni kome je ugao $\angle BCA$ prav. Ako je $\angle BAC = \Pi(x)$ i $\angle ABC = \Pi(y)$, dokazati da važi

$$\Pi(x - AC) + \Pi(BC + y) = \frac{\pi}{2}\ .$$

100. Neka je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni kojem je ugao kod temena C prav. Ako je $\angle BAC = \Pi(a')$, $\angle ABC = \Pi(b')$, $BC = a$, $CA = b$, dokazati da važi $\Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = \pi/2$.

101. Ako dva asimptotska trougla hiperboličke ravni kojima su sva temena nesvojstvena imaju jednu ivicu zajedničku, odrediti sve izometrije kojima se jedan preslikava na drugi.

102. Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je poluprava AB paralelna sa polupravom DC, poluprava AD paralelna sa polupravom BC i $AB \cong AD$. Dokazati da važi $CB \cong CD$.

103. Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je poluprava AB paralelna sa polupravom DC, poluprava AD paralelna sa polupravom BC i $AB \cong AD$. Dokazati da važi $AC \perp BD$.

104. U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $AB \cong AC$. Ako su P i Q središta ivica AB i AC, dokazati da je izometrija $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC}$

involucija.

105. Ako je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni, dokazati da je kompozicija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ rotacija $\mathcal{R}_{A,\omega}$, gde je ω defekt tog trougla.

106. U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ i tačke A_1, B_1 i C_1 koje su središta ivica BC, AC i BA. Dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1}$$

rotacija oko tačke A za ugao koji je jednak zbiru uglova trougla $\triangle ABC$.

107. U hiperboličkom prostoru date su četiri nekoplanarne tačke A, B, C i D. Odrediti tip izometrije

$$\mathcal{T}_{2\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} \; .$$

108. Neka su u hiperboličkoj ravni date prave a, b i n. Da li postoji prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n ?

109. Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je $(AB)\|(DC)$ i $(BC)\|(AD)$. Dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova kod temena A i C i spoljašnjih uglova kod temena B i D prave istog pramena.

110. U hiperboličkoj ravni, tačke A i B su dodirne tačke tangenti a i b oricikla o i važi $a \parallel b$. Izračunati dužinu AB.

111. Neka su u hiperboličkoj ravni prave a, b, c i d tangente oricikla o u tačkama A, B, C i D takve da je $a\|b$ i $c \perp d$. Ako je K presečna tačka pravih c i d, dokazati da važi $AB = 2CK$.

112. Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, onda ta ekvidistanta nije prava. Dokazati.

113. Neka su b, c i d prave jednog pramena apsolutne ravni i A tačka te ravni koja im ne pripada. Ako su B, C i D podnožja upravnih iz tačke A na pravama b, c i d, a B', C' i D' podnožja upravnih iz tačke A na pravama CD, DB i BC, dokazati da su tačke B', C' i D' kolinearne.

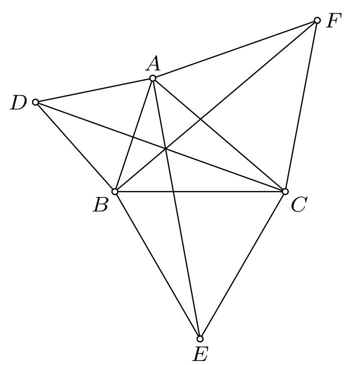
114. Ako se u apsolutnom prostoru neka sfera i neka episfera seku (a ne dodiruju), onda je njihov presek krug. Dokazati.

115. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni date su $h-$prava a i $h-$tačka A. Odrediti $h-$pravu n koja je u smislu modela normalna na $h-$pravoj a.

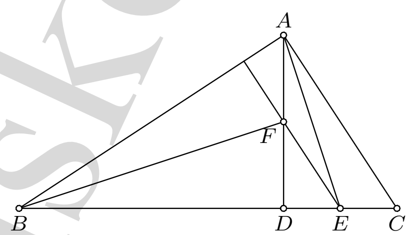
116. U Poenkareovom disk modelu date su $h-$tačke A i B. Odrediti $h-$tačku C takvu da je $h-$trougao $\triangle ABC$ pravilan.

Rešenja

1. Iz $EC \cong BC$, $AC \cong CF$, $\angle ECA = \angle ECB + \angle BCA = \frac{\pi}{3} + \angle BCA = \angle ACF + \angle BCA = \angle BCF$ sledi da su trouglovi $\triangle CAE$ i $\triangle CFB$ podudarni i da su podudarne njihove odgovarajuće ivice AE i BF. Analogno se dokazuje da važi $\triangle ABF \cong \triangle ADC$ i $BF \cong CD$, pa je $AE \cong BF \cong CD$, što je i trebalo dokazati.



Slika 1



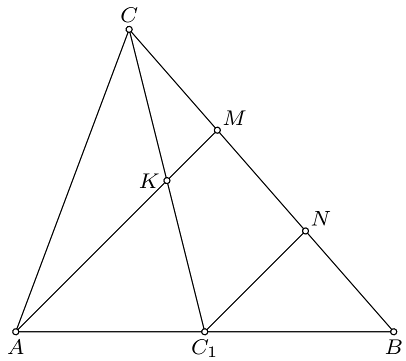
Slika 2

2. Duž FE je srednja linija trougla $\triangle DCA$, pa važi $FE \parallel AC$. Kako je $AC \perp AB$, važi i $EF \perp AB$. U trouglu $\triangle ABE$ duži AD i EF su, dakle, visine, pa je tačka F ortocentar tog trougla. Duž BF je treća visina tog trougla, pa važi $BF \perp AE$. QED

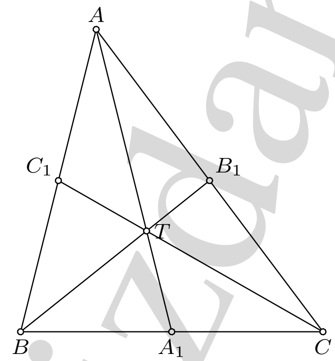
3. Neka je N simetrična tačka tački C u odnosu na tačku M (tačka M je, dakle, središte duži CN). Tačke K i M su, redom, središta ivica CC_1 i CN trougla $\triangle CC_1N$, pa je duž KM srednja linija ovog trougla. Odatle sledi $C_1N \| KM$ i, kako su tačke A, K i M kolinearne, važi i $C_1N \| AM$. Tačka C_1 je središte ivice AB trougla $\triangle ABM$ i važi $C_1N \| AM$, pa je duž C_1N srednja linija trougla $\triangle ABM$, odakle sledi da je tačka N središte duži MB.

Iz $\mathcal{B}(C, M, N)$ i $\mathcal{B}(M, N, B)$, sledi $\mathcal{B}(C, M, N, B)$. Iz $CM \cong MN$ i $MN \cong NB$ sledi $CM \cong MN \cong NB$. Iz $\mathcal{B}(C, M, N, B)$ i $CM \cong MN \cong NB$, sledi

$$\frac{CM}{MB} = \frac{CM}{MN + NB} = \frac{CM}{2CM} = \frac{1}{2}\ .$$



Slika 3



Slika 4

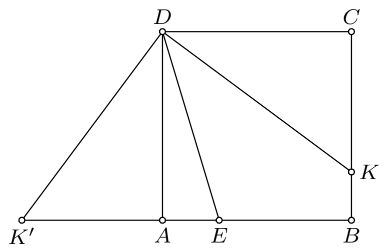
4. Neka su A_1, B_1 i C_1 središta ivica BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ i neka je T njegovo težište. Na osnovu osobina težišta, važi $BT = \frac{2}{3}BB_1$ i $CT = \frac{2}{3}CC_1$.

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da je $AC > AB$. Kako je $BA_1 \cong A_1C$ i $AA_1 \cong AA_1$ i $AC > AB$, na osnovu teoreme **11.16**, sledi $\angle AA_1C > AA_1B$. Iz $BA_1 \cong A_1C$, $TA_1 \cong TA_1$ i $\angle AA_1C > AA_1B$, na osnovu teoreme **11.16**, sledi $TC > BT$ i $\frac{2}{3}CC_1 > \frac{2}{3}BB_1$ tj. $CC_1 > BB_1$.

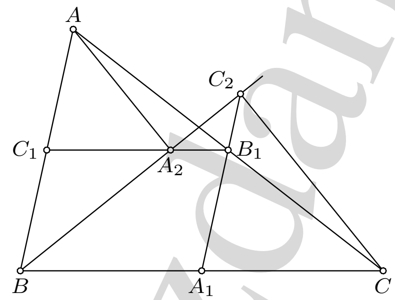
($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je $CC_1 > BB_1$, tj. $\frac{2}{3}CC_1 > \frac{2}{3}BB_1$, odnosno $TC > BT$. Iz $BA_1 \cong A_1C$, $TA_1 \cong TA_1$ i $TC > BT$ na osnovu teoreme **11.16**, sledi $\angle AA_1C > AA_1B$. Iz $BA_1 \cong A_1C$ i $AA_1 \cong AA_1$ i $\angle AA_1C > AA_1B$, na osnovu teoreme **11.16**, sledi $AC > AB$.

Dakle, važi $AC > AB$ ako i samo ako važi $BB_1 < CC_1$.

5. Označimo sa ϕ ugao $\angle KDC$ i sa K' tačku prave AB takvu da je $\mathcal{B}(K', A, E, B)$ i $K'A \cong KC$. Iz $DC \cong DA$, $K'A \cong KC$ i $\angle DCK = \angle K'AD = \frac{\pi}{2}$, sledi da su trouglovi $\triangle KCD$ i $\triangle K'AD$ podudarni, odakle sledi $\angle K'DA = \angle KDC = \phi$ i $\angle DK'A = \angle DKC = \pi - \angle DCK - \angle KDC = \pi - \frac{\pi}{2} - \angle KDC = \frac{\pi}{2} - \phi$. Poluprava DK je bisektrisa ugla $\angle EDC$, pa je $\angle EDK = \angle KDC = \phi$, odakle sledi $\angle ADE = \frac{\pi}{2} - \angle EDK - \angle KDC = \frac{\pi}{2} - 2\phi$. Iz $\mathcal{B}(K', A, E)$ sledi $\angle K'DE = \angle K'DA + \angle ADE = \phi + (\frac{\pi}{2} - 2\phi) = \frac{\pi}{2} - \phi = \angle DK'A$, što povlači $DE = K'E = K'A + AE = KC + AE$. QED



Slika 5



Slika 6

6. Ako je $AB = BC$, bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABC$ sadrži središte ivice AC, pa su tačke A_2, B_1 i C_2 identične i tvrđenje zadatka trivijalno važi.

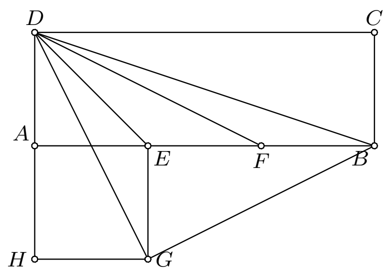
Pretpostavimo da je $AB < BC$. Označimo sa β ugao $\angle ABC$. Ugao $\angle B_1A_1C$ podudaran je uglu β, odakle sledi $\angle B_1A_1B = \pi - \beta$. Poluprava BC_2 je bisektrisa ugla $\angle ABC$, pa je $\angle C_2BA_1 = \beta/2$. Odatle sledi:

$$\angle A_1C_2B = \pi - \angle C_2A_1B - C_2BA_1 = \pi - (\pi - \beta) - \beta/2 = \beta/2.$$

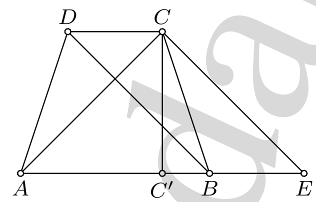
Dakle, trougao $\triangle C_2A_1B$ je jednakokraki, pa važi $BA_1 \cong C_2A_1$. Kako je A_1 središte ivice BC, važi $BA_1 \cong A_1C$, pa je $BA_1 \cong A_1C \cong C_2A_1$. Dakle, tačka C_2 pripada krugu čiji je prečnik BC, odakle sledi da je ugao $\angle BC_2C$ prav, tj. prava CC_2 je upravna na pravoj BC_2. Analogno se dokazuje da važi $\angle C_1A_2B = \beta/2$ i da je prava AA_2 upravna na pravoj BA_2. Kako je, na osnovu pretpostavke $AB < BC$, važi $\mathcal{B}(C_1, A_2, B_1)$ i $\mathcal{B}(B, A_2, C_2)$, pa je $\angle A_2C_2B_1 = \beta/2$ i $\angle C_2A_2B_1 = \angle C_1A_2B = \beta/2$, odakle sledi da je trougao $\triangle A_2C_2B_1$ jednakokraki, tj. $B_1A_2 \cong B_1C_2$, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenje zadatka analogno se dokazuje i za slučaj $AB > BC$.

7. Iz $AB = 3BC = 3AD$ i $AB = 3AE$ sledi $AD = AE$. Neka je H tačka simetrična tački D u odnosu na tačku A. Neka je G tačka takva da je $AE \| HG$ i $AH \| GE$. Iz $AF = 2AE = EB$, $AD = AH = EG$ (četvorougao $HGEA$ je kvadrat) i $\angle DAF = \angle GEB = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle AFD$ i $\triangle EGB$ podudarni i $\angle AFD \cong \angle GBE$. Iz $HD = 2AD = EB$, $HG = EG$ i $\angle DHG = \angle GEB = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle DHG$ i $\triangle BEG$ podudarni i važi $DG = GB$ i $\angle HGD = \angle EGB$. Poluprava GE pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave GD i GB, pa je $\angle DGB = \angle DGE + \angle EGB = (\frac{\pi}{2} - \angle HGD) + \angle EGB = \frac{\pi}{2} - \angle EGB + \angle EGB = \frac{\pi}{2}$. Dakle, trougao $\triangle GBD$ je pravougli i jednakokraki (jer je $DG = GB$ i $\angle DGB = \frac{\pi}{2}$), pa je $\angle GBD = \frac{\pi}{4}$. Trougao $\triangle AED$ je takođe pravougli i jednakokraki, pa je $\angle AED = \frac{\pi}{4}$, odakle sledi $\angle AED + \angle AFD + \angle ABD = \angle AED + \angle GBE + \angle ABD = \angle AED + \angle GBD = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



Slika 7



Slika 8

8. *Lema:* Dijagonale jednakokrakog trapeza $ABCD$ ($AB \| CD$, $BC \cong AD$) su podudarne.

Dokaz leme: Neka su C' i D' podnožja normala iz tačaka C i D na pravoj AB.

Ako su tačke D' i A identične, onda su identične i tačke C' i B (u protivnom bi važilo $BC > AD$. U tom slučaju je $\angle DAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $DA \cong CB$, $AB \cong AB$, pa važi $\triangle DAB \cong ABC$, odakle sledi $DB \cong AC$.

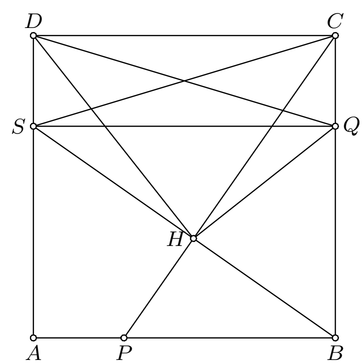
Ako važi raspored $\mathcal{B}(A, D', C', B)$, iz $\angle DD'A = \angle BC'C = \frac{\pi}{2}$, $DD' \cong CC'$, $DA \cong BC$, pa važi $\triangle DD'A \cong BC'C$, odakle sledi $\angle DAD' \cong \angle CBC'$ tj. $\angle DAB \cong \angle ABC$. Iz $\angle DAB \cong \angle ABC$, $AB \cong AB$ i $DA \cong BC$ sledi $\triangle DAB \cong ABC$ i $DB \cong AC$.

Ako važi raspored $\mathcal{B}(D', A, B, C')$, iz $\angle DD'A = \angle BC'C = \frac{\pi}{2}$, $DD' \cong CC'$, $DA \cong BC$, pa važi $\triangle DD'A \cong BC'C$, odakle sledi $\angle DAD' \cong \angle CBC'$ i $\angle DAB \cong \angle ABC$. Iz $\angle DAB \cong \angle ABC$, $AB \cong AB$ i $DA \cong BC$ sledi $\triangle DAB \cong ABC$ i $DB \cong AC$. □

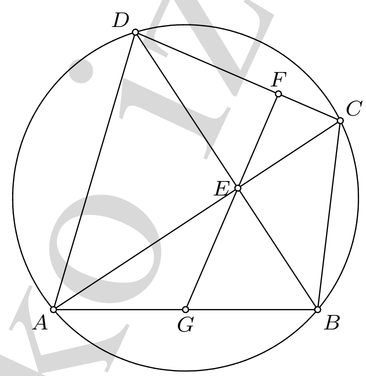
Neka su BC i DA podudarne ivice trapeza. Površina trapeza $ABCD$ jednaka je $\frac{1}{2}(AB + CD)h = h^2$, pa je $AB + CD = 2h$. Neka je tačka E takva da važi $\mathcal{B}(A, B, E)$ i $BE \cong DC$. Važi $AE = AB + BE = AB + DC = 2h$. Na osnovu leme, dijagonale jednakokrakog trapeza su podudarne, pa je $AC \cong BD$. Pored toga, četvorougao $BECD$ je paralelogram, (jer su duži DC i BE podudarne i paralelne), pa je $BD \cong EC$, odakle sledi $AC \cong EC$. Ako je C' podnožje normale iz tačke C na pravu AE onda je tačka C' središte duži AE (jer je trougao $\triangle AEC$ jednakokraki, pa iz $\angle CC'A = \angle CC'E = \frac{\pi}{2}$, $AC \cong EC$, $CC' \cong CC'$ sledi $\triangle AC'C \cong \triangle CC'E$ i $AC' \cong C'E$), pa je $AC' = C'E = h = CC'$. Dakle, trouglovi $\triangle AC'C$ i $\triangle C'EC$ su jednakokraki pravougli, pa je $\angle ACC' = \angle C'CE = \frac{\pi}{4}$, odakle sledi da su prave AC i EC međusobno normalne. Kako su prave BD i EC paralelne, sledi da su međusobno normalne i prave AC i BD. QED

9. Neka je S presečna tačka pravih AD i BH. Kako je tačka P između tačaka A i B, sledi $\angle PCB < \angle ACB = \frac{\pi}{4}$. Ugao $\angle CHB$ je prav, pa važi

$\angle SBC = \angle HBC = \pi - \angle CHB - \angle HCB = \frac{\pi}{2} - \angle PCB > \frac{\pi}{4} = \angle DBC$, odakle sledi $\mathcal{B}(A, S, D)$. Iz $\angle PCB = \frac{\pi}{2} - \angle CPB = \frac{\pi}{2} - \angle HPB = \angle HBP$ i $BC \cong AB$, $\angle PBC = \frac{\pi}{2} = \angle SAB$ sledi da su trouglovi $\triangle PBC$ i $\triangle SAB$ podudarni i $AS \cong PB \cong BQ$. Iz $AS = BQ$ sledi $DS = DA - AS = CB - BQ = CQ$, tj. četvorougao $SQCD$ je pravougaonik. Neka je k krug čiji je prečnik CS. Ugao $\angle SHC$ je prav, pa tačka H pripada krugu k. Uglovi $\angle SDC$ i $\angle SQC$ su pravi, pa tačke D i Q pripadaju krugu k. Središte duži CS je i središte duži DQ (jer je četvorougao $SQCD$ pravougaonik), odakle sledi da duž DQ sadrži središte kruga k, tj. DQ je prečnik kruga k. Tačka H pripada krugu čiji je prečnik duž DQ, pa je ugao $\angle DHQ$ prav, što je i trebalo dokazati.



Slika 9



Slika 10

10. Neka su F i G tačke u kojima prava koja sadrži tačku E i normalna je na pravoj CD seče redom prave CD i AB. Četvorougao $ABCD$ je tetivan, pa važi $\mathcal{B}(A, E, C)$, $\mathcal{B}(D, E, B)$. Trougao $\triangle DEC$ je pravougli, pa podnožje visine iz tačke E pripada ivici DC, tj. važi $\mathcal{B}(D, F, C)$. Odatle sledi da je tačka G između tačaka A i B, tj. $\mathcal{B}(A, G, B)$. Uglovi $\angle ABD$ i $\angle ACD$ su podudarni kao uglovi koji zahvataju isti lûk. Važi $\angle DEC = \angle CFE = \frac{\pi}{2}$ i $\angle CDE \cong \angle FDE$, pa su trouglovi $\triangle DEF$ i $\triangle DEC$ slični, odakle sledi da su uglovi $\angle ACD$ i $\angle DEF$ podudarni. Podudarni su i unakrsni uglovi $\angle DEF$ i $\angle BEG$. Dakle, na osnovu tranzitivnosti, podudarni su i uglovi $\angle ABE$ i $\angle BEG$, pa je trougao $\triangle BEG$ jednakokraki, tj. $BG \cong EG$. Analogno se dokazuje da važi i $AG \cong GE$, pa je $AG \cong BG$, što (s obzirom da važi $\mathcal{B}(A, G, B)$) znači da je tačka G središte duži AB, što je i trebalo dokazati.

11. *Lema:* Središte X_1 ivice YZ je središte opisanog kruga trougla $\triangle XYZ$ ako i samo ako je ugao kod temena X prav.

Dokaz leme: Pretpostavimo da je ugao trougla $\triangle XYZ$ kod temena X prav. Kako je ugao $\angle YXZ$ prav, tačka X pripada krugu čiji je prečnik duž YZ, pa je središte duži YX središte opisanog kruga trougla $\triangle XYZ$.

Pretpostavimo da je središte X_1 ivice YZ središte opisanog kruga trougla $\triangle XYZ$. Neka je Y_1 središte, a m medijatrisa ivice XZ Tačka Y_1 pripada pravoj m i ugao $\angle X_1Y_1Z$ je prav. Tačka X_1 je središte opisanog kruga trougla $\triangle XYZ$

i pripada medijatrisama njegovih ivica, odakle sledi da tačka X_1 pripada pravoj m. Prava m, dakle, sadrži tačke X_1 i Y_1, pa je, na osnovu svojstava srednje linije trougla, ona paralelna pravoj XY. Odatle sledi da su uglovi $\angle YXZ$ i $\angle X_1Y_1Z$ podudarni, pa je ugao $\angle YXZ$ prav. $\square$

Neka su B_1 i C_1 središta ivica AC i AB trougla $\triangle ABC$ i neka je D_1 presečna tačka pravih AD i C_1B_1. Dokažimo da važi $\angle ABC \cong \angle AO_1O_2$. Razlikujemo četiri slučaja:

$\angle ABC > \frac{\pi}{2}$: Tačka O_1 pripada medijatrisama ivica AB i AD trougla $\triangle ABD$, pa su uglovi $\angle AC_1O_1$ i $\angle AD_1O_1$ pravi, odakle sledi da tačke C_1 i D_1 pripadaju krugu čiji je prečnik duž AO_1, odnosno da je četvorougao $AC_1D_1O_1$ tetivan. Tačke O_1 i C_1 su sa raznih strana prave AD_1, pa je $\angle AC_1D_1 = \pi \angle D_1O_1A$. Tačke D_1, O_1 i O_2 su kolinearne (pripadaju medijatrisi duži AD) i važi $\mathcal{B}(D_1, O_1, O_2)$, odakle sledi $\angle AO_1O_2 = \pi - \angle D_1O_1A$, pa je $\angle AC_1D_1 = \angle AO_1O_2$. Iz $\mathcal{B}(C_1, D_1, B_1)$ sledi $\angle AC_1D_1 = \angle AC_1B_1$, a iz $C_1B_1 \| BC$ sledi $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$, pa je $\angle ABC \cong \angle AC_1B_1 = \angle AC_1D_1 = \angle AO_1O_2$.

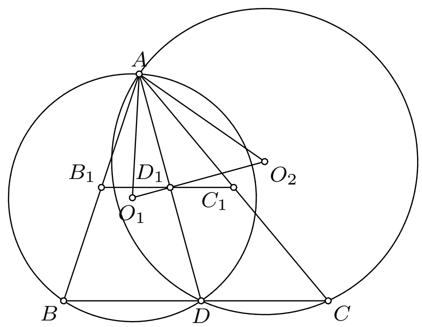
$\angle ABC = \frac{\pi}{2}$: Kako je ugao $\angle ABC$ prav, na osnovu leme sledi da je tačka O_1 središte duži AD (tačke O_1 i D su identične). Tačka O_2 pripada medijatrisi ivice AD, pa je ugao $\angle AO_1O_2$ prav, tj. $\angle ABC \cong \angle AO_1O_2$.

$\angle ABC < \frac{\pi}{2}$, $\angle ADB < \frac{\pi}{2}$: Tačka O_1 pripada medijatrisama ivica AB i AD trougla $\triangle ABD$, pa su uglovi $\angle AC_1O_1$ i $\angle AD_1O_1$ pravi, odakle sledi da tačke C_1 i D_1 pripadaju krugu čiji je prečnik duž AO_1, odnosno da je četvorougao $AC_1D_1O_1$ tetivan. Tačke O_1 i C_1 su sa iste strane prave AD_1, pa je $\angle AC_1D_1 = \angle AO_1D_1$. Tačke O_1, D_1 i O_2 su kolinearne (pripadaju medijatrisi duži AD) i važi $\mathcal{B}(O_1, D_1, O_2)$, odakle sledi $\angle AO_1D_1 = \angle AO_1O_2$. Iz $\mathcal{B}(C_1, D_1, B_1)$ sledi $\angle AC_1D_1 = \angle AC_1B_1$, a iz $C_1B_1 \| BC$ sledi $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$, pa je $\angle ABC \cong \angle AC_1B_1 = \angle AC_1D_1 = \angle AO_1D_1 = \angle AO_1O_2$.

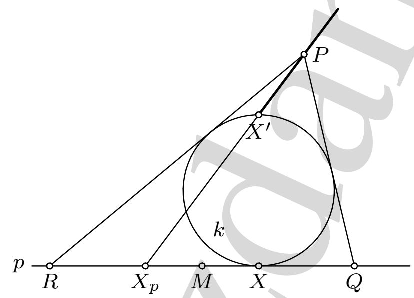
$\angle ABC < \frac{\pi}{2}$, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$: Kako je ugao $\angle ADB$ prav, na osnovu leme sledi da je tačka O_1 središte duži AB (tačke O_1 i C_1 su identične). Analogno, tačka O_2 je središte duži AC, pa iz $O_1O_2 \| BC$ sledi $\angle ABC \cong \angle AO_1O_2$.

$\angle ABC < \frac{\pi}{2}$, $\angle ADB > \frac{\pi}{2}$: Tačka O_1 pripada medijatrisama ivica AB i AD trougla $\triangle ABD$, pa su uglovi $\angle AC_1O_1$ i $\angle AD_1O_1$ pravi, odakle sledi da tačke C_1 i D_1 pripadaju krugu čiji je prečnik duž AO_1, odnosno da je četvorougao $AC_1D_1O_1$ tetivan. Tačke O_1 i C_1 su sa iste strane prave AD_1, pa je $\angle AC_1D_1 = \angle AO_1D_1$. Tačke O_1, D_1 i O_2 su kolinearne (pripadaju medijatrisi duži AD) i važi $\mathcal{B}(O_1, D_1, O_2)$, odakle sledi $\angle AO_1O_2 = \angle AO_1D_1A$, pa je $\angle AC_1D_1 = \angle AO_1O_2$. Iz $\mathcal{B}(C_1, D_1, B_1)$ sledi $\angle AC_1D_1 = \angle AC_1B_1$, a iz $C_1B_1 \| BC$ sledi $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$, pa je $\angle ABC \cong \angle AC_1B_1 = \angle AC_1D_1 = \angle AO_1O_2$.

Dakle, u svakom od slučajeva, važi $\angle ABC \cong \angle AO_1O_2$. Analogno se dokazuje da važi i $\angle ACB \cong \angle AO_2O_1$, pa su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle AO_1O_2$ slični, što je i trebalo dokazati.



Slika 11



Slika 12

12.

Lema 1: Ako krug čije je središte tačka O dodiruje krake ugla $\angle XYZ$ u tačkama X i Z, onda važi $YX \cong YZ$.

Dokaz leme 1: Iz $OX \cong OZ$, $OY \cong OY$ i $\angle OXY = \angle OZY = \frac{\pi}{2}$, sledi da su trouglovi $\triangle OXY$ i $\triangle OYZ$ podudarni, pa važi $YX \cong YZ$. □

Lema 2: Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, A_1 središte ivice BC, P tačka dodira upisanog kruga i prave BC, P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A i P' tačka simetrična tački P u odnosu na tačku S, onda važi

(a) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$;

(b) tačka A_1 je središte duži PP_a.

Dokaz leme 2:

(a) Ako je $AB \cong AC$, prava AS je medijatrisa ivice BC i ona sadrži tačke P, P' i P_a, pa tvrđenje važi.

Pretpostavimo da nije $AB \cong AC$. Tada tačke P i P_a nisu identične i prave AS i $P'P_a$ su različite. Neka je Q tačka dodira upisanog kruga i prave AC, Q_a tačka dodira prave AC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A. Neka je $\hat{P}$ presečna tačka pravih SP i AP_a. Iz $SP \perp BC$ i $S_aP_a \perp BC$, sledi $S\hat{P} \| S_aP_a$, pa, na osnovu Talesove teoreme, važi $S\hat{P} : S_aP_a = AS : AS_a$. Iz $SQ \perp AC$ i $S_aQ_a \perp AC$, sledi $SQ \| S_aQ_a$, pa, na osnovu Talesove teoreme, važi $SQ : S_aQ_a = AS : AS_a$. Dakle, $S\hat{P} : S_aP_a = AS : AS_a = SQ : S_aQ_a$, odakle sledi $S\hat{P} = SQ$ (jer je $S_aP_a = S_aQ_a$). Dakle, tačka $\hat{P}$ pripada upisanom krugu trougla $\triangle ABC$ i pripada pravoj SP. Ona ne može biti identična tački P, jer bi onda tačke P i P_a bile identične, pa bi važilo $AB \cong AC$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, tačka $\hat{P}$ je simetrična tački P u odnosu na tačku S, tj. tačke P' i $\hat{P}$ su identične, odakle sledi da tačka P' pripada pravoj AP_a. Tačka P' pripada upisanom krugu trougla, a tačka P_a stranci BC, pa važi $\mathcal{B}(A, P', P_a)$.

(b) Ako važi $AB \cong AC$, tačke A_1, P i P_a su identične, pa tvrđenje važi.

Pretpostavimo da nije $AB \cong AC$. Neka su a, b i c dužine ivica BC, AC i AB i neka je $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Neka su Q i R tačke u kojima upisani krug trougla $\triangle ABC$ dodiruje prave AC i AB. Neka su Q_a i R_a tačke u kojima spolja upisani krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A dodiruje prave AC i AB.

Dokažimo da je $BP = p - b$. Na osnovu leme **1**, važi $BP \cong BR$, $AR \cong AQ$ i $CP \cong CQ$. Važi i $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(B, R, A)$ i $\mathcal{B}(A, Q, C)$, odakle sledi $BP = BC - CP$, $BR = BA - AR$ i $AC = AQ + CQ$, pa važi

$$BP = \frac{1}{2}(BP + BR) = \frac{1}{2}(BC - CP + BA - AR) = \frac{1}{2}(BC + BA - CQ - AQ) =$$

$$= \frac{1}{2}(BC + BA - AC) = \frac{1}{2}(a + c - b) = p - b\ .$$

Dokažimo da je $CP_a = p - b$. Na osnovu leme **1**, je $AR_a \cong AQ_a$, $BP_a \cong BR_a$ i $CQ_a \cong CP_a$. Važi i $\mathcal{B}(A, B, R_a)$, $\mathcal{B}(A, C, Q_a)$ i $\mathcal{B}(B, P_a, C)$, odakle sledi

$$AQ_a = \frac{1}{2}(AQ_a + AR_a) = \frac{1}{2}(AB + BR_a + AC + CQ_a) =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + AC + BP_a + CP_a) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(a + b + c) = p\ .$$

Iz $AQ_a = p$ sledi $CQ_a = AQ_a - AC = p - b$. Na osnovu leme **1**, važi $CP_a = CQ_a$, pa je $CQ_a = p - b$.

Pretpostavimo da je $AC > AB$. Tada važi $\mathcal{B}(B, P, A_1, P_a, C)$, pa je $A_1P = BA_1 - BP = \frac{1}{2}a - (p - b)$ i $A_1P_a = A_1C - P_aC = \frac{1}{2}a - (p - b)$. Dakle, $A_1P = A_1P_a$, pa iz $\mathcal{B}(P, A_1, P_a)$, sledi da je tačka A_1 središte duži PP_a. Tvrđenje se analogno dokazuje i za slučaj $AB > AC$. $\square$

Neka je X tačka dodira kruga k i prave p, neka je X' njoj dijametralno suprotna tačka kruga k i neka je X_p tačka simetrična tački X u odnosu na tačku M ($\mathcal{S}_M(X) = X_p$).

Pretpostavimo da tačka P zadovoljava zadate uslove, tj. pretpostavimo da postoje tačke Q i R koje pripadaju pravoj p, takve da je M središte duži QR i da je krug k upisani krug trougla $\triangle PQR$. Na osnovu leme **2** važi $\mathcal{B}(X_p, X', P)$.

Dokažimo da svaka tačka P za koju važi $\mathcal{B}(X_p, X', P)$ pripada traženom skupu tačaka. Neka je P_0 proizvoljna tačka za koju važi $\mathcal{B}(X_p, X', P_0)$ i neka su Q_0 i R_0 presečne tačke prave p i tangenti iz tačke P_0 na krug k (te presečne tačke postoje, jer su tačke X' i P različite, pa tangente iz tačke P na krug k nisu paralelne pravoj p). Krug k je upisani krug trougla $\triangle P_0Q_0R_0$, pa, kako tačka X_p pripada pravoj p, i važi $\mathcal{B}(X_p, X', P_0)$, na osnovu leme **2** sledi da je tačka X_p tačka dodira prave p i spolja upisanog kruga trougla $\triangle P_0Q_0R_0$ koji odgovara temenu P_0. Tačka M je središte duži XX_p, pa je na osnovu leme **2** ona i središte ivice Q_0R_0, što znači da tačka P pripada traženom ravan skupu tačaka.

Dakle, traženi skup tačaka je skup tačaka P prave X_pX' takvih da su sa tačkom X_p sa raznih strana tačke X'.

13. *I rešenje:*

Neka su A_b i A'_b podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABC$; A_c i A'_c podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C. Neka je B_1 središte ivice AC, C_1 središte ivice AB i neka je $\beta = \angle ABC$.

Ugao između simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla je prav, pa je $\angle A_bBA'_b = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi da je četvorougao AA'_bBA_b pravougaonik. Dijagonale AB i A'_bA_b pravougaonika AA'_bBA_b se polove, odakle sledi da središte duži AB (tačka C_1) pripada pravoj A'_bA_b (i da polovi duž A'_bA_b). Analogno se dokazuje da tačka B_1 pripada pravoj A'_cA_c. Kako su tačke B_1 i C_1 različite, tačke A_b, A'_b, A_c i A'_c kolinearne ako i samo ako one pripadaju pravoj C_1B_1.

Dokažimo da tačke A_b, A'_b, A_c, A'_c pripadaju pravoj C_1B_1.

Neka je X tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena B seče pravu C_1B_1. Duž C_1B_1 je srednja linija trougla $\triangle ABC$, pa je prava C_1B_1 paralelna pravoj BC odakle sledi $\angle AC_1B_1 = \beta$. Tačka X pripada polupravoj C_1B_1, pa važi i $\angle AC_1X = \beta$, odakle sledi da je $\angle BC_1X = \pi - \beta$. Prava BX je simetrala ugla $\angle ABC$, pa je $\angle C_1BX = \beta/2$. Dakle, $\angle BXC_1 = \pi - \angle BC_1X - \angle C_1BX = \pi - (\pi - \beta) - \beta/2 = \beta/2$, odakle sledi da je trougao $\triangle C_1BX$ jednakokraki, tj. $C_1B \cong C_1X$. Kako je $C_1A \cong C_1B \cong B_1X$, sledi da tačka X pripada krugu čiji je prečnik duž AB, pa je ugao $\angle AXB$ prav, tj. tačka X je podnožje normale iz tačke A na simetralu unutrašnjeg ugla kod temena B, odakle sledi da su tačke X i A_b identične i da tačka A_b pripada pravoj C_1B_1.

Neka je Y tačka u kojoj simetrala spoljašnjeg ugla kod temena B seče pravu C_1B_1. Tačke Y i C_1 su sa raznih strana prave AB, pa je $\angle BC_1Y = \angle AC_1B_1 = \beta$. Prava BY je simetrala ugla kod temena B, pa je $\angle C_1BY = (\pi - \beta)/2$. Dakle, $\angle BYC_1 = \pi - \angle BC_1Y - \angle C_1BY = \pi - \beta - (\pi - \beta)/2 = (\pi - \beta)/2$, odakle sledi da je trougao $\triangle C_1BY$ jednakokraki, tj. $C_1B \cong C_1Y$. Kako je $C_1A \cong C_1B \cong C_1X$, sledi da tačka Y pripada krugu čiji je prečnik duž AB, pa je ugao $\angle AYB$ prav, tj. tačka Y je podnožje normale iz tačke A na simetralu unutrašnjeg ugla kod temena B, odakle sledi da su tačke Y i A'_b identične i da tačka A'_b pripada pravoj C_1B_1.

Analogno se dokazuje da tačke A_c i A'_c pripadaju pravoj C_1B_1 odakle sledi da su tačke A_b, A'_b, A_c i A'_c kolinearne, što je i trebalo dokazati.

II rešenje:

Simsonova teorema: Podnožja normala iz proizvoljne tačke opisanog kruga nekog trougla na pravama određenim ivicama tog trougla pripadaju jednoj pravoj.

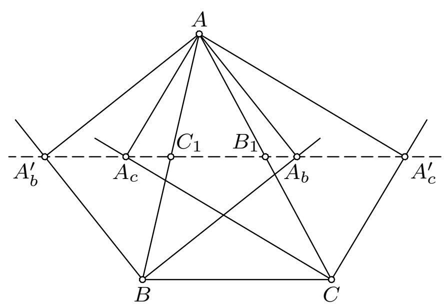
Neka su A_b i A'_b podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABC$. Neka su A_c i A'_c podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C.

Neka je S presečna tačka simetrala unutrašnjih uglova kod temena B i C i neka je S_c presečna tačka simetrale spoljašnjeg ugla kod temena B i unutrašnjeg ugla kod temena C.

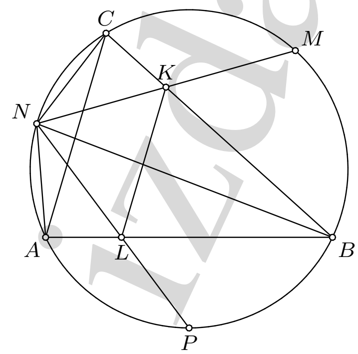
Ugao između simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla je prav, pa je $\angle S_cBS = \frac{\pi}{2}$ i $\angle SAS_c = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi da je četvorougao S_cBSA tetivan, tj. tačka A pripada opisanom krugu trougla $\triangle S_cBS$. Tačke A'_b, A_b i A_c su podnožja normala iz tačke A na pravama određenim ivicama S_cB, BS i SS_c

trougla $\triangle S_cBS$, pa, na osnovu Simsonove teoreme sledi da su tačke A_b', A_b i A_c kolinearne.

Analogno se dokazuje da su kolinearne i tačke A_c', A_b i A_c kolinearne, pa su kolinearne sve četiri tačke A_b, A_b', A_c i A_c', što je i trebalo dokazati.



Slika 13



Slika 14

14. *Lema:* Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seče naspramnu ivicu BC u tački E, onda važi: $BA : CA = BE : CE$.

Dokaz leme: Neka je D tačka prave AC takva da važi $\mathcal{B}(D, A, C)$ i $DA \cong AB$. Trougao $\triangle DBA$ je jednakokraki, pa iz $\angle BDA = \angle DBA$ sledi $\angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}(\pi - \angle DAB) = \frac{1}{2}(\angle BDA + \angle DBA) = \angle BDA$. Dakle, prave DB i AE su paralelne, a trouglovi $\triangle DBC$ i $\triangle AEC$ su slični, pa važi $BA : CA = DA : CA = BE : CE$, što je i trebalo dokazati. $\Box$

Lukovi CM i BM su podudarni, pa im odgovaraju podudarni periferijski uglovi, odakle sledi da je poluprava NM bisektrisa ugla $\angle BNC$. Na osnovu leme sledi $\frac{NB}{NC} = \frac{BK}{KC}$. Slično, poluprava NP je bisektrisa ugla $\angle BNA$, pa je $\frac{NB}{NA} = \frac{BL}{LA}$. Tačka N je središte lûka CA, pa je $NC = NA$, odakle sledi $\frac{NB}{NC} = \frac{NB}{NA}$, odnosno $\frac{BK}{KC} = \frac{BL}{LA}$. Iz $\frac{BK}{KC} = \frac{BL}{LA}$, na osnovu Talesove teoreme, sledi da su prave KL i AC paralelne, što je i trebalo dokazati.

15. *Lema:* Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seče naspramnu ivicu BC u tački E, onda važi: $BA : CA = BE : CE$.

Dokaz leme: Videti dokaz leme u rešenju **14**. $\Box$

Neka su P_1 i Q_1 tačke u kojima prava koja sadrži tačku A_1 i paralelna je pravoj PQ, seče prave AB i AC i neka je E tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A seče ivicu BC. Na osnovu Talesove teoreme (**T27.3**), sledi

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{A_1P_1}{A_1Q_1}\ . \tag{1}$$

Iz sličnosti trouglova $\triangle P_1BA_1$ i $\triangle ABE$ sledi

$$\frac{A_1P_1}{AE} = \frac{BA_1}{BE}\ , \tag{2}$$

a iz sličnosti $\triangle Q_1A_1C$ i $\triangle AEC$ sledi

$$\frac{A_1Q_1}{AE} = \frac{CA_1}{CE}\ . \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) sledi

$$\frac{A_1P_1}{A_1Q_1} = \frac{BA_1}{BE}\frac{CE}{CA_1}\ . \tag{4}$$

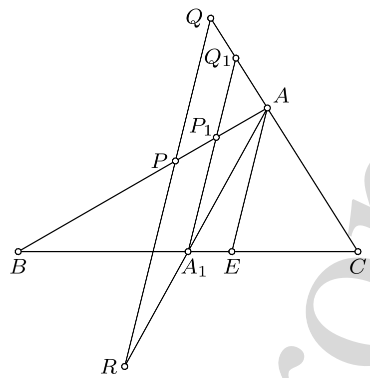
Kako je tačka A_1 središte ivice BC, važi $BA_1 = CA_1$, a kako je tačka E tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A seče ivicu BC, na osnovu leme, važi $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}$, pa iz jednakosti (4) sledi

$$\frac{A_1P_1}{A_1Q_1} = \frac{BA_1}{BE}\frac{CE}{CA_1} = \frac{BA_1}{CA_1}\frac{CE}{BE} = \frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}. \tag{5}$$

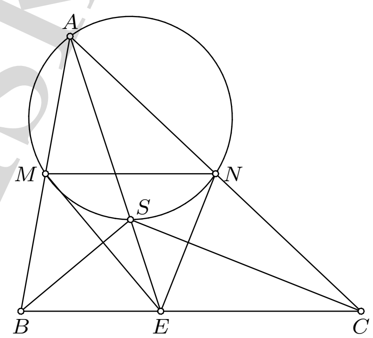
Iz jednakosti (1) i (5) dobijamo

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{A_1P_1}{A_1Q_1} = \frac{AC}{AB},$$

što je i trebalo dokazati.



Slika 15



Slika 16

16. *Lema 1:* Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seče naspramnu ivicu BC u tački E, onda važi $BA : CA = BE : CE$.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme u rešenju **14**. $\square$

Lema 2: Medijatrisa ivice BC, bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i opisani krug tog trougla seku su u jednoj tački.

Dokaz leme 2: Neka je l opisani krug trougla $\triangle ABC$ i neka je M presečna tačka tog kruga i bisektrise ugla $\angle BAC$ (različita od A). Dokažimo da tačka M pripada medijatrisi ivice BC. Polupravа AM je bisektrisa ugla $\angle BAC$, pa su tačke A i C sa iste strane prave BM, odakle sledi da su uglovi $\angle BAM$ i $\angle BCM$ podudarni kao periferijski uglovi nad istim lûkom. Analogno, važi i $\angle CAM \cong$

$\angle CBM$. Poluprava AM je bisektrisa ugla $\angle BAC$, pa važi $\angle BAM \cong \angle CAM$, odakle sledi $\angle BCM \cong BAM \cong CAM \cong CBM$. Dakle, trougao $\triangle BMC$ je jednakokraki, pa važi $BM \cong CM$ i tačka M pripada medijatrisi duži BC, što je i trebalo dokazati. $\square$

Neka su tačke M i N središta ivica AB i AC trougla $\triangle ABC$, a E presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A i prave BC. Na osnovu leme **1**, važi $BA : CA = BE : CE$ tj. $BE = CE\frac{AB}{AC}$. Tačka E je između tačaka B i C, pa je $BC = BE + CE = CE\frac{AB}{AC} + CE = CE\frac{AB+AC}{AC}$. S druge strane, na osnovu uslova zadatka je $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$, pa sledi $CE\frac{AB+AC}{AC} = \frac{1}{2}(AB + AC)$, odakle je $CE = \frac{AC}{2}$. Analogno se dokazuje da je $BE = \frac{AB}{2}$. Tačka N je središte duži AC, pa je $CN = \frac{AC}{2} = CE$, tj. trougao $\triangle CNE$ je jednakokraki, odakle sledi da je simetrala ugla $\angle ECN$ medijatrisa duži EN. Analogno se dokazuje da je simetrala ugla $\angle EBM$ medijatrisa duži ME. Neka je tačka S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, tj. presečna tačka simetrale ugla $\angle EBM$ ($\angle CBA$) i simetrale ugla $\angle ECN$ ($\angle BCA$), tj. presečna tačka medijatrise duži ME i medijatrise duži EN. Medijatrise duži ME, EN i MN seku se u jednoj tački (koja je središte opisanog kruga trougla $\triangle MEN$), pa medijatrisa duži MN sadrži presečnu tačku medijatrisa duži ME i EN (tačku S). S druge strane, tačka S je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, pa pripada bisektrisi unutrašnjeg ugla $\angle ABC$. Dakle, tačka S je presečna tačka medijatrise ivice MN i bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle MAN$ (tj. ugla $\angle BAC$) trougla $\triangle AMN$, pa, na osnovu leme **2**, tačka S pripada opisanom krugu trougla $\triangle AMN$ (krugu l), što je i trebalo dokazati.

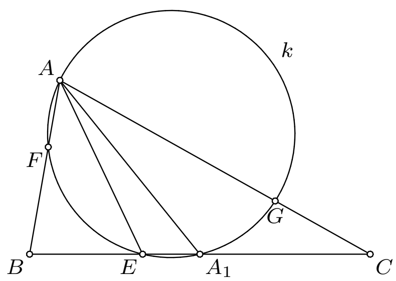
17. *Lema:* Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seče naspramnu ivicu BC u tački E, onda važi $BA : CA = BE : CE$.

Dokaz leme: Videti dokaz leme u rešenju **14.** $\square$

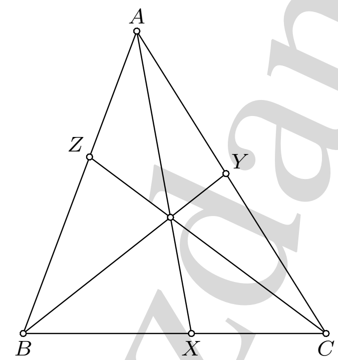
Potencija tačke B u odnosu na krug k je $p(B, k) = BF \cdot BA = BE \cdot BA_1$. Potencija tačke C u odnosu na krug k je $p(C, k) = CG \cdot CA = CE \cdot CA_1$. Tačka A_1 je središte ivice BC, pa je $BA_1 = CA_1$. Tačka E je presečna tačka bisektrise ugla $\angle BAC$ i ivice BC, pa, na osnovu leme, važi $BA : CA = BE : CE$ i $BE : BA = CE : CA$. Dakle, važi

$$BF = \frac{BE \cdot BA_1}{BA} = \frac{BE}{BA}BA_1 = \frac{CE}{CA}CA_1 = \frac{CE \cdot CA_1}{CA} = CG\,,$$

što je i trebalo dokazati.



Slika 17



Slika 18

18. *Čevaova teorema:* Ako su P, Q i R tačke pravih AB, BC i AC, prave AQ, BR i CP su konkurentne ili paralelne ako i samo ako važi

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1\ .$$

Neka su tačke X, Y i Z tačke ivica BC, AC i AB, takve da svaka od pravih AX, BY i CZ razlaže obim trougla $\triangle ABC$ na dva jednaka dela. Označimo sa a, b i c dužine ivica BC, AC i AB, a sa p poluobim trougla $\triangle ABC$ ($p=\frac{a+b+c}{2}$). Tada je $AB+BX=p$, pa je $BX=p-c$ i slično $XC=p-b$. Analogno se dokazuje i $CY=p-a, YA=p-c, AZ=p-b, ZB=p-a$, pa, kako važi $\mathcal{B}(B,X,C)$, $\mathcal{B}(C,Y,A)$, $\mathcal{B}(A,Z,B)$, sledi

$$\mathcal{P}=\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}=\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=\frac{p-c}{p-b}\frac{p-a}{p-c}\frac{p-b}{p-a}=1\ .$$

Na osnovu Pašove aksiome, iz $\mathcal{B}(B,X,C)$ i $\mathcal{B}(C,Y,A)$ sledi da se prave AX i BY seku. Dakle, prave AX, BY i CZ nisu paralelne i važi $\mathcal{P}=1$, pa, na osnovu Čevaove teoreme, sledi da se te prave seku u jednoj tački. QED

19. *Čevaova teorema:* Ako su P, Q i R tačke pravih AB, BC i AC, prave AQ, BR i CP su konkurentne ili paralelne ako i samo ako važi

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1\ .$$

Prave AX, BY i CZ su konkurentne (seku se u tački P), pa, na osnovu Čevaove teoreme, važi:

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=1\ .$$

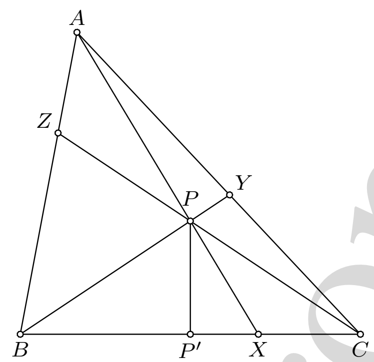
Odatle sledi
$$\left|\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\right| = \frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = 1 \ .$$

Neka je P' podnožje visine iz tačke P na pravoj BC. Duž PP' je visina trouglova $\triangle BXP$ i $\triangle CPX$ (koja odgovara redom ivicama BX i XC), pa je $P_{\triangle BXP} = \frac{1}{2}BX \cdot PP'$ i $P_{\triangle CPX} = \frac{1}{2}XC \cdot PP'$. Odatle sledi
$$\frac{P_{\triangle BXP}}{P_{\triangle CPX}} = \frac{\frac{1}{2}BX \cdot PP'}{\frac{1}{2}XC \cdot PP'} = \frac{BX}{XC} \ .$$

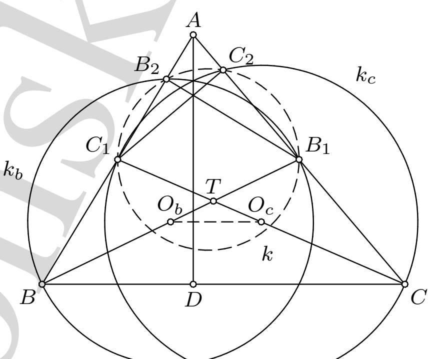
Analogno se dokazuje i $\frac{P_{\triangle CYP}}{P_{\triangle APY}} = \frac{CY}{YA}$ i $\frac{P_{\triangle AZP}}{P_{\triangle BPZ}} = \frac{AZ}{ZB}$. Dakle, važi:
$$1 = \frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = \frac{P_{\triangle AZP}}{P_{\triangle BPZ}}\frac{P_{\triangle BXP}}{P_{\triangle CPX}}\frac{P_{\triangle CYP}}{P_{\triangle APY}} \ ,$$

odnosno
$$P_{\triangle BXP} \cdot P_{\triangle CYP} \cdot P_{\triangle AZP} = P_{\triangle CPX} \cdot P_{\triangle APY} \cdot P_{\triangle BPZ} \ ,$$

što je i trebalo dokazati.



Slika 19



Slika 20

20. Neka su k_b i k_c krugovi čiji su prečnici BB_1 i CC_1, neka su O_b i O_c njihova središta i neka je T težište trougla $\triangle ABC$.

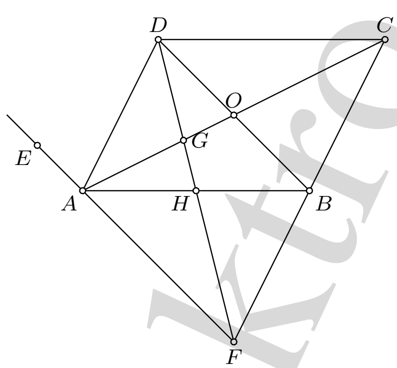
Dokažimo da su potencije tačke A u odnosu na krugove k_b i k_c jednake.

Pretpostavimo da je ugao $\angle BAC$ prav. Tačka A, u tom slučaju, pripada krugovima k_b i k_c, pa su njene potencije u odnosu na njih jednake nuli.

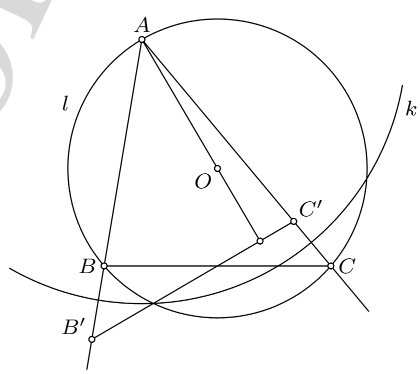
Pretpostavimo da ugao $\angle BAC$ nije prav. Neka je B_2 presek kruga k_b i prave AB i neka je C_2 presek kruga k_c i prave AC (pri čemu je $A \neq B_2, A \neq C_2$). Kao uglovi nad prečnicima krugova k_b i k_c, uglovi $\angle BB_2B_1$ i $\angle CC_2C_1$ su pravi, tj. $\angle C_1B_2B_1$ i $\angle B_1C_2C_1$ su pravi. Dakle, tačke B_2 i C_2 pripadaju krugu k čiji je prečnik duž B_1C_1. Ugao $\angle C_1AB_1$ nije prav, pa tačka A ne pripada krugu k. Vrednosti $AC_1 \cdot AB_2$ i $AB_1 \cdot AC_2$ su potencije tačke A u odnosu na krug k, pa na osnovu teoreme **28.3**, važi $AC_1 \cdot AB_2 = AB_1 \cdot AC_2$. Dakle, važi $p(A, k_b) = AB \cdot AB_2 = 2AC_1 \cdot AB_2 = 2p(A, k) = 2AB_1 \cdot AC_2 = AC \cdot AC_2 = p(A, k_c)$, pa su potencije tačke A u odnosu na krugove k_b i k_c jednake.

U oba slučaja su, dakle, potencije tačke A u odnosu na krugove k_b i k_c jednake, tj. tačka A pripada radikalnoj osi krugova k_b i k_c. Na osnovu teoreme **28.4**, radikalna osa dva kruga normalna je na pravoj određenoj njihovim središtima, pa je radikalna osa krugova k_b i k_c prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj O_bO_c. Tačka O_b je središte duži BB_1, pa na osnovu svostava težišta trougla, sledi $\mathcal{B}(B, O_b, T)$ i $TO_b : O_bB = 1 : 2$. Analogno važi i $\mathcal{B}(C, O_c, T)$ i $TO_c : O_cC = 1 : 2$, pa, na osnovu Talesove teoreme, sledi $O_bO_c \| BC$. Iz $O_bO_c \| BC$ i $AD \perp BC$ sledi $AD \perp O_bO_c$. Kako prava AD sadrži tačku A i normalna je na pravoj O_bO_c i kako je, na osnovu teoreme **12.1**, takva prava jedinstvena, sledi da je prava AD radikalna osa krugova k_b i k_c. QED

21. Neka je O presečna tačka dijagonala AC i BD paralelograma $ABCD$. Neka je F presečna tačka prave AE i prave CB i neka su G i H presečne tačke prave DF sa pravama AC i AB. Prave AB, AD, AC i AF su harmonijski spregnute ako i samo ako su tačke H, D, G i F harmonijski spregnute. Četvorougao $AFBD$ je paralelogram, pa tačka H kao presečna tačka dijagonala polovi duži AB i DF, tj. važi $\frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{FH}} = 2$. Duž DH je, dakle, težišna duž trougla $\triangle ABD$ koja odgovara temenu D. Dijagonale paralelograma $ABCD$ (duži AC i BD) se polove, pa je duž AO težišna duž trougla $\triangle ABD$ koja odgovara temenu A. Tačka G je presečna dveju težišnih duži trougla $\triangle ABD$ — duži DH i AO, pa je tačka G težište tog trougla, odakle sledi $\frac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{GH}} = -2$. Dakle, važi $\frac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{GH}} = -\frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{FH}}$, tj. $\mathcal{H}(D, H; G, F)$, pa su harmonijski spregnute prave AB, AD, AC i AF, odnosno prave AB, AD, AC i AE. QED



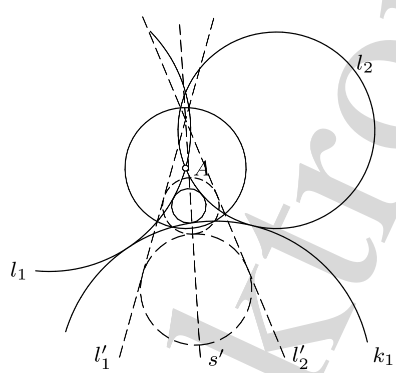
Slika 21



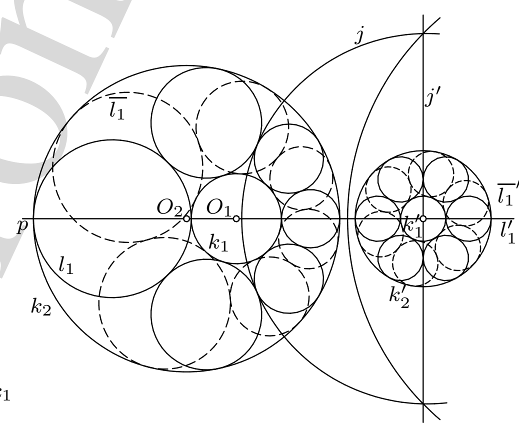
Slika 22

22. Neka je l opisani krug trougla $\triangle ABC$, neka je $r = \sqrt{AB \cdot AB'} = \sqrt{AC \cdot AC'}$, neka je k krug sa središtem A i poluprečnikom r i neka je ψ_k inverzija u odnosu na krug k. Kako važi $AB \cdot AB' = r^2$ i tačke B i B' su sa iste strane tačke A (jer tačka B' pripada polupravoj AB), inverzijom ψ_k se tačka B preslikava u tačku B'. Analogno, istom inverzijom tačka C preslikava se u tačku C'. Krug l bez tačke A se (na osnovu teoreme **28.8**) inverzijom ψ_k preslikava na pravu koja sadrži tačke $\psi_k(B) = B'$ i $\psi_k(C) = C'$, tj. na pravu $B'C'$. Prava AO bez tačke A se (na osnovu teoreme **28.7**) inverzijom ψ_k preslikava na sebe. Prava AO sadrži središte kruga l, pa važi $AO \perp l$. Prava AO i krug l su međusobno normalni i u inverziji ψ_k se (bez tačke A) preslikavaju na pravu AO (bez tačke A) i pravu $B'C'$, pa, kako se inverzijom uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove (**28.9**), sledi $AO \perp B'C'$. QED.

23. Neka je A zajednička tačka krugova l_1 i l_2 koja je sa iste strane prave određene središtima krugova l_1 i l_2 kao i krugovi k_i $(i = 1, 2, 3\ldots)$. Neka je ψ_k inverzija u odnosu na proizvoljan krug k čije je središte tačka A. Krugovi l_1 i l_2 sadrže tačku A, pa se, bez tačke A, inverzijom ψ_k preslikavaju na prave l_1' i l_2' koje ne sadrže tačku A (**T28.7**, **T28.8**). Krugovi k_i $(i = 1, 2, 3\ldots)$ ne sadrže tačku A, pa se preslikavaju na krugove k_i' koji takođe ne sadrže tačku A (**T28.8**). Krugovi k_i dodiruju krugove l_1 i l_2, pa slike krugova k_i u inverziji ψ_k — krugovi k_i' — dodiruju slike krugova l_1 i l_2 u istoj inverziji — prave l_1' i l_2'. Krugovi k_i pripadaju spoljašnjosti krugova l_1 i l_2, pa se krugovi k_i' nalaze se sa istih strana pravih l_1' i l_2'. Dakle, krugovi k_i' dodiruju prave l_1' i l_2' i nalaze se sa istih njihovih strana, pa njihova središta pripadaju jednoj pravoj — simetrali s' jednog ugla koji zahvataju prave l_1' i l_2', odakle sledi da su krugovi k_i' normalni na pravoj s'. Ta prava se u inverziji ψ_k preslikava na neku pravu ili krug s (u zavisnosti od toga da li prava s' sadrži tačku A). Inverzijom ψ_k se krugovi k_i' preslikavaju u krugove k_i, a prava s' u pravu ili krug s. Inverzijom se uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove (**T28.9**), pa su krugovi k_i normalni na (pravoj ili krugu) s, što je i trebalo dokazati.



Slika 23



Slika 24

24. Neka su O_1 i O_2 središta krugova k_1 i k_2.

Pretpostavimo da su tačke O_1 i O_2 identične. Neka je $\overline{l_1}$ proizvoljan krug koji dodiruje spolja krug k_1 i iznutra krug k_2. Neka je L središte kruga l_1, a L'

središte kruga $\overline{l_1}$ i neka je $\mathcal{R}$ rotacija oko tačke O_1 za ugao $\angle LO_1L'$. Krugovi k_1 i k_2 se u rotaciji $\mathcal{R}$ preslikavaju na sebe same (jer im je tačka O_1 središte), pa se krugovi l_i preslikavaju u krugove $\overline{l_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koji takođe dodiruju spolja krug k_1, a iznutra krug k_2 (i pritom važi da krug $\overline{l_n}$ dodiruje spolja krug $\overline{l_1}$). Dakle, postoji niz krugova $\overline{l_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ takvih da $\overline{l_1}$ dodiruje spolja krug k_1 i iznutra krug k_2, krug l_{i+1} dodiruje spolja krugove l_i i k_1, a iznutra krug k_2 i da krug $\overline{l_n}$ dodiruje spolja krug $\overline{l_1}$ i taj niz krugova može biti dobijen kao slika krugova l_i $(i = 1, 2, \ldots,)$ u preslikavanju $\mathcal{R}$.

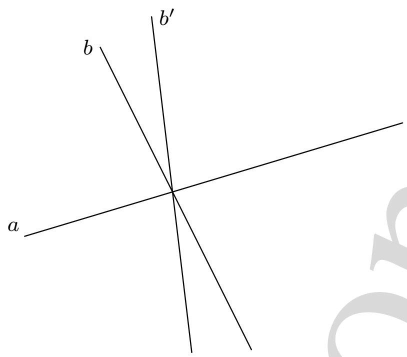
Pretpostavimo da tačke O_1 i O_2 nisu identične. Neka je p prava koja sadrži tačke O_1 i O_2, neka je r radikalna osa krugova k_1 i k_2 i neka je P presečna tačka pravih p i r. Prava r pripada spoljašnjosti kruga k_2 (zaista, ako pretpostavimo da prava r ima sa krugom k_2 zajedničku tačku K, onda je $p(K, k_2) = 0$, a kako tačka K pripada pravoj r (koja je radikalna osa krugova k_1 i k_2), važi i $p(K, k_2) = p(K, k_1)$, odakle sledi da je $p(K, k_1) = 0$, tj. tačka K pripada krugu k_1, što je kontradikcija, jer krugovi k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tačaka). Dakle, tačka P pripada spoljašnjosti kruga k_2 (i kruga k_1). Neka je t_1 tangenta iz tačke P na krug k_1, neka je T_1 tačka dodira prave t_1 i kruga k_1, neka je t_2 tangenta iz tačke P na krug k_2 i neka je T_2 tačka dodira prave t_2 i kruga k_2. Tačka P pripada radikalnoj osi krugova k_1 i k_2, pa je $PT_1^2 = p(P, k_1) = p(P, k_2) = PT_2^2$, odakle sledi $PT_1 = PT_2$, tj. tačka T_2 pripada krugu j sa središtem P i poluprečnikom PT_1. Krug j, dakle, sadrži tačke T_1 i T_2, pa su krugovi k_1 i j, kao i krugovi k_2 i j međusobno normalni. Neka je J jedna presečna tačka prave p i kruga j. Krugovi k_1 i j i krugovi k_2 i j se seku u tačkama koje ne pripadaju pravoj p, pa sledi da tačka J ne pripada krugovima k_1 i k_2. Neka je ψ inverzija sa središtem J proizvoljnog stepena. Krug j sadrži tačku J, pa se, bez tačke J, inverzijom ψ preslikava na neku pravu j' (**T28.8**) koja ne sadrži tačku J (pa je različita je od prave p). Prava p sadrži tačku J, pa se, bez tačke J, inverzijom ψ preslikava na sebe samu (**T28.7**). Neka je O presečna tačka pravih p i j'. Krugovi k_1 i k_2 ne sadrže tačku J, pa se inverzijom ψ preslikavaju na neke krugove k_1' i k_2' (**T28.8**). Krug k_1 je normalan na krugu j i na pravoj p (jer prava p sadrži središte O_1 kruga k_1), pa je, na osnovu teoreme **28.9**, krug k_1' normalan na pravama j' i p. Dakle, različite prave j' i p sadrže središte kruga k_1', pa je njihova presečna tačka — tačka O — središte kruga k_1'. Analogno se dokazuje da je tačka O središte kruga k_2'. Neka je $\overline{l_1}$ proizvoljan krug koji dodiruje spolja krug k_1 i iznutra krug k_2. Krugovi l_i se u inverziji ψ preslikavaju u krugove l_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koji dodiruju spolja krug k_1', a iznutra krug k_2' i pritom važi da krug l_n' dodiruje spolja krug l_1'. Analogno, krug $\overline{l_1}$ se u inverziji ψ preslikavaju u krug $\overline{l_1}'$ koji dodiruje spolja krug k_1', a iznutra krug k_2'. Neka je L središte kruga l_1', a L' središte kruga $\overline{l_1}'$ i neka je $\mathcal{R}$ rotacija oko tačke O za ugao $\angle LOL'$. Krugovi k_1' i k_2' se u rotaciji $\mathcal{R}$ preslikavaju na sebe same (jer im je tačka O središte), pa se krugovi l_i' preslikavaju u krugove $\overline{l_i}'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koji takođe dodiruju spolja krug k_1', a iznutra krug k_2' (i pritom važi da krug $\overline{l_n}'$ dodiruje spolja krug $\overline{l_1}'$). Odatle sledi da se u inverziji ψ (inverzija je involucija) krugovi $\overline{l_i}'$ preslikavaju u krugove $\overline{l_i}$ koji dodiruju spolja krug k_1, a iznutra krug k_2 (i pritom važi da krug $\overline{l_n}$ dodiruje spolja krug $\overline{l_1}$). Dakle, postoji niz krugova $\overline{l_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

takvih da $\overline{l_1}$ dodiruje spolja krug k_1 i iznutra krug k_2, krug l_{i+1} dodiruje spolja krugove l_i i k_1, a iznutra krug k_2 i da krug $\overline{l_n}$ dodiruje spolja krug $\overline{l_1}$ i taj niz krugova može biti dobijen kao slika krugova l_i $(i = 1, 2, \dots,)$ u preslikavanju $\psi \circ \mathcal{R} \circ \psi$.

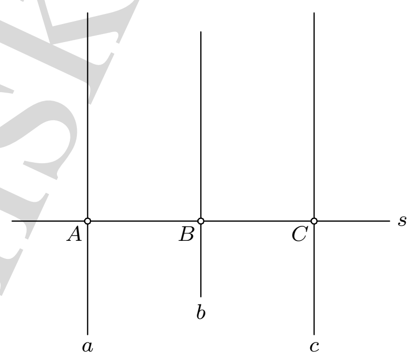
25. Neka je Φ figura euklidske ravni koja ima tačno dve ose simetrije i neka su to različite prave a i b. Osne refleksije $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ preslikavaju figuru Φ na sebe, pa figuru Φ na sebe preslikava i kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Na osnovu teoreme o transmutaciji, izometrija $\mathcal{I}$ je osna refleksija $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_a(b)}$. Dakle, $\mathcal{S}_a(b)$ je osa simetrije figure Φ, pa kako figura Φ ima tačno dve ose simetrije, sledi da važi ili $\mathcal{S}_a(b) = a$ ili $\mathcal{S}_a(b) = b$.

Pretpostavimo da važi $\mathcal{S}_a(b) = a$. Iz $\mathcal{S}_a(b) = a$ sledi $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_a(b) = \mathcal{S}_a(a)$, odnosno $b = a$, što je suprotno pretpostavci.

Pretpostavimo da važi $\mathcal{S}_a(b) = b$. Na osnovu teoreme o transmutaciji, važi $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_a(b)} = \mathcal{S}_b$, odakle sledi $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Na osnovu teoreme **15.8**, dve osne refleksije komutiraju ako i samo ako su im osnove međusobno normalne, odakle sledi da su prave a i b međusobno normalne. Neka je O presečna tačka pravih a i b. Kako se osnim refleksijama $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ figura Φ preslikava na sebe, figura Φ se na sebe preslikava i kompozicijom $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_O$, tj. figura Φ je centralno simetrična, što je i trebalo dokazati.



Slika 25



Slika 26

26. *Lema 1:* Ako je u apsolutnoj ravni B središte duži AC, onda važi $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$.[1]

Dokaz leme 1: Neka je s prava određena tačkama A i C (ako su tačke A i C identične, neka je s proizvoljna prava koja sadrži tačku A). Neka su a, b i c prave normalne na pravoj s i sadrže, redom, tačke A, B i C. Važi $\mathcal{S}_b(A) = C$, pa je na osnovu definicije translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Na osnovu definicije centralne simetrije je $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s$ i $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a$. Dakle, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$, što je i trebalo dokazati. $\square$

[1] Ova lema je teorema apsolutne geometrije i ona može da se koristi i u dokazima koji se odnose na euklidsku i u dokazima koji se odnose na hiperboličku geometriju.

Lema 2: Kompozicija tri centralne simetrije (euklidske) ravni takođe je centralna simetrija te ravni.

Dokaz leme 2: Neka su $\mathcal{S}_P$, $\mathcal{S}_Q$ i $\mathcal{S}_R$ tri proizvoljne centralne simetrije euklidske ravni. Neka je s prava određena tačkama P i Q (ako su tačke P i Q identične, s je proizvoljna prava koja sadrži tačku P). Neka su prave p, q i r prave koje sadrže tačke P, Q i R i normalne su na pravoj s. Neka je r' prava koja sadrži tačku R i normalna je na pravoj r. Prave s i r' su normalne na pravoj r, pa su paralelne. Centralna simetrija u odnosu na neku tačku može biti reprezentovana kao kompozicija dve osne refleksije čije ose su međusobno normalne i sadrže tu tačku, pa važi:

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$$

Prave p, q i r su normalne na pravoj s, pa pripadaju jednom pramenu, a kompozicija osnih refleksija čije su one ose takođe je osna refleksija $\mathcal{S}_{s'}$ i osa te refleksije (prava s') pripada istom pramenu ($s' \perp s$). Dakle,

$$\mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_{s'}$$

Prava s' je normalna na pravoj s, a prava r' je paralelna pravoj s, pa su prave r' i s' međusobno normalne što znači da je kompozicija osnih refleksija koje one određuju centralna simetrija čiji je centar presečna tačka pravih r' i s' (označimo je sa S). Dakle,

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_{s'} = \mathcal{S}_S\ .$$

Kompozicija tri centralne simetrije euklidske ravni je, dakle, centralna simetrija, što je i trebalo dokazati. □

Kompozicija koincidencije i translacije je (ta ista) translacija. Kompozicija koincidencije i centralne simetrije je (ta ista) centralna simetrija. Kompozicija dve centralne simetrije je, na osnovu leme **1**, translacija. Translacija se, na osnovu leme, može reprezentovati kao kompozicija dve centralne simetrije, pa se kompozicija translacije i centralne simetrije (ili obratno) može reprezentovati kao kompozicija tri centralne simetrije. Na osnovu leme **2**, kompozicija tri centralne simetrije ravni je takođe centralna simetrija ravni, pa je kompozicija translacije i centralne simetrije centralna simetrija. Kompozicija dve translacije može se (lema **1**), reprezentovati kao kompozicija četiri centralne simetrije i ta kompozicija se (lema **2**), može predstaviti kao kompozicija dve centralne simetrije što je translacija (lema **1**). Dakle, kompozicija dve translacije je translacija.

Dakle, skup izometrija koji čine koincidencija, sve translacije i sve centralne simetrije ravni zatvoren je za operaciju proizvoda izometrija i koincidencija je neutralni element za tu operaciju.

Za svaku centralnu simetriju $\mathcal{S}_A$ važi $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \xi$, odnosno $\mathcal{S}_A^{-1} = \mathcal{S}_A$. Ako je B središte duži AC, onda, na osnovu leme **1**, važi $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_C$. Kako je $\mathcal{S}_B(A) = C$, na osnovu teoreme o transmutaciji važi:

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_B(A)} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_C = \xi\ .$$

Dakle, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} = \xi$, pa je $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$. Za koincidenciju, očigledno, važi $\xi \circ \xi = \xi$ i $\xi^{-1} = \xi$.

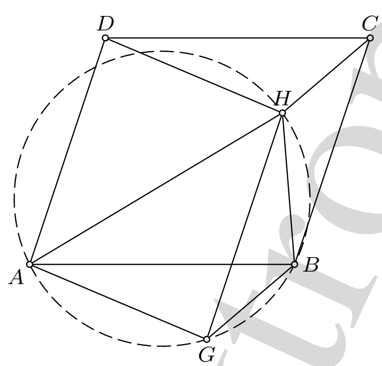
Za svaki element zadatog skupa, dakle, postoji inverzni element koji je takođe u tom skupu.

Dakle, skup izometrija koji čine koincidencija, sve translacije i sve centralne simetrije ravni je grupa u odnosu na operaciju proizvoda izometrija.

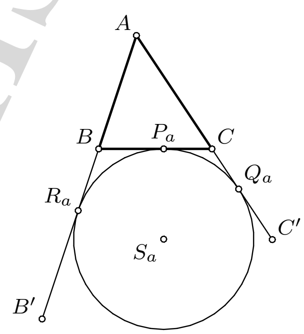
Pokažimo kontraprimerom da ta grupa nije komutativna. Pretpostavimo da su tačke A i B različite i da je tačka B središte duži AC. Pretpostavimo da važi $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B$. Odatle sledi $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$ i, na osnovu teoreme o transmutaciji, $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_A(B)} = \mathcal{S}_B$. Dakle, važi $\mathcal{S}_A(B) = B$, odakle sledi da su tačke A i B identične, što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Dakle, za različite tačke A i B važi $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A \neq \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B$, pa data grupa nije komutativna.

27. Neka je G tačka u koju se preslikava tačka H translacijom $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CB}}$. Četvorougao $HGBC$ je paralelogram, pa su uglovi $\angle HGB$ i $\angle HCB$ podudarni. U translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CB}}$ se tačke D, H, C preslikavaju redom u tačke A, G, B, odakle sledi da su trouglovi $\triangle DHC$ i $\triangle AGB$ podudarni i da su uglovi $\angle CHD$ i $\angle AGB$ podudarni. Na osnovu pretpostavki zadatka, zbir uglova $\angle CHD$ i $\angle AHB$ jednak je zbiru dva prava ugla, pa je i zbir uglova $\angle AGB$ i $\angle AHB$ jednak zbiru dva prava ugla, odakle sledi da je četvorougao $AGBH$ tetivan. Uglovi $\angle HAB$ i $\angle HGB$ su podudarni kao uglovi nad istim lûkom (nad lûkom BH) opisanog kruga četvorougla $AGBH$. Iz $\angle HAB \cong \angle HGB$ i $\angle HGB \cong \angle HCB$ sledi $\angle HAB \cong \angle HCB$, što je i trebalo dokazati.



Slika 27



Slika 28

28. *Lema:* Ako krug čije je središte tačka O dodiruje krake ugla $\angle XYZ$ u tačkama X i Z, onda važi $YX \cong YZ$.

Dokaz leme: Videti dokaz leme **1** u rešenju **12**. □

Neka su R_a i Q_a tačke u kojima spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje prave AB i AC. Važi $\mathcal{B}(B, P_a, C)$, $\mathcal{B}(A, B, R_a)$, $\mathcal{B}(A, C, Q_a)$ i, na osnovu leme, $BP_a \cong BR_a$, $AR_a \cong AQ_a$ i $CQ_a = CP_a$. Odatle sledi

$\mathcal{R}_{B,\angle CBB'}(P_a) = R_a$, $\mathcal{R}_{A,\angle BAC}(R_a) = Q_a$, $\mathcal{R}_{C,\angle C'CB}(Q_a) = P_a$, pa je

$$\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'}(P_a) = P_a \ .$$

Dokažimo da data izometrija nije koincidencija: dokažimo da važi

$$\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'}(C) \neq C \ ,$$

tj. dokažimo da je $\mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'}(C) \neq C$. Neka je $\mathcal{R}_{B,\angle CBB'}(C) = C_1$. Važi $\mathcal{B}(A, B, C_1)$ i $AC_1 = AB + BC$. Neka je $\mathcal{R}_{A,\angle BAC}(C_1) = C_2$. Važi $AC_2 = AC_1 = AB + BC$, pa iz nejednakosti trougla sledi $AC_2 = AB + BC > AC$ i $\mathcal{B}(A, C, C_2)$. Dakle, tačke C i C_2 su različite, pa data kompozicija nije koincidencija.

U rotaciji $\mathcal{R}_{B,\angle CBB'}$ tačke B i P_a preslikavaju se u tačke B i R_a, pa se prava BC (kojoj pripadaju tačke B i P_a) preslikava na pravu AB (kojoj pripadaju tačke B i R_a). U rotaciji $\mathcal{R}_{A,\angle BAC}$ tačke A i R_a preslikavaju se u tačke A i Q_a, pa se prava AB preslikava na pravu AC. U rotaciji $\mathcal{R}_{C,\angle C'CB}$ tačke C i Q_a preslikavaju se u tačke C i P_a, pa se prava AC preslikava na pravu BC. Dakle, u kompoziciji $\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'}$ prava BC se preslikava na sebe samu.

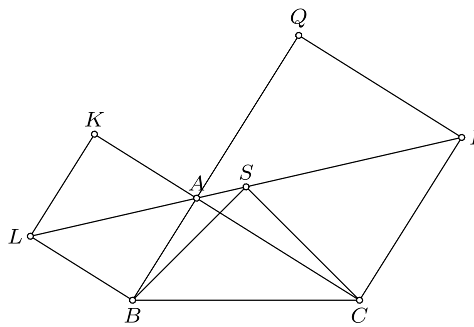
Direktna izometrija $\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'}$, dakle, ima invarijantnu tačku P_a i nije koincidencija, pa je rotacija. Kako je u njoj prava BC invarijantna, data kompozicija je rotacija oko tačke P_a za ugao π, tj. centralna simetrija $\mathcal{S}_{P_a}$.

29. U rotaciji $\mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}}$ oko tačke B za ugao $\frac{\pi}{2}$ (iste orijentacije kao i prav ugao $\angle LBA$), tačka L preslikava se u tačku A. U rotaciji $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}}$ oko tačke C za ugao $\frac{\pi}{2}$ (u istom smeru kao i rotacija $\mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}}$), tačka A preslikava se u tačku P. Dakle, važi $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}} \circ \mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}}(L) = \mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}}(A) = P$.

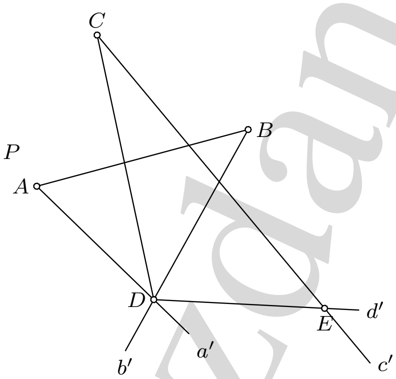
Neka je p' poluprava sa temenom B koja sa polupravom BC zahvata ugao $\frac{\pi}{4}$ i sa iste je strane prave BC kao i tačka A. Neka je q' poluprava sa temenom C koja sa polupravom CB zahvata ugao $\frac{\pi}{4}$ i sa iste je strane prave BC kao i tačka A. Neka su p i q prave koje sadrže, redom, poluprave p' i q'. Neka je R presečna tačka pravih p i q. Važi $\angle RBC = \angle RCB = \frac{\pi}{4}$, odakle sledi da je trougao $\triangle BCR$ jednakokraki ($BR \cong RC$) i pravougli ($\angle BRC = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$). Važi $\angle BRC = \frac{\pi}{2}$, pa su prave p i q međusobno normalne.

Rotacija $\mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}}$ može biti reprezentovana kao kompozicija osnih refleksija $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_{BC}$, tj. $\mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}} = \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_p$. Rotacija $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}}$ može biti reprezentovana kao kompozicija osnih refleksija $\mathcal{S}_{BC}$ i $\mathcal{S}_q$, tj. $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{BC}$. Dakle, $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}} \circ \mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Prave p i q su međusobno normalne i seku se u tački R, odakle sledi da je kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ centralna simetrija sa središtem R.

Dakle, $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}} \circ \mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_R$, pa iz $\mathcal{R}_{C,\frac{\pi}{2}} \circ \mathcal{R}_{B,\frac{\pi}{2}}(L) = P$, sledi $\mathcal{S}_R(L) = P$, što znači da je tačka R središte duži LP, tj. tačke S i R su identične. Iz $\angle BRC = \frac{\pi}{2}$ i $BR \cong RC$, sledi $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$ i $BS \cong SC$, pa je trougao $\triangle BCS$ jednakokraki i pravougli, što je i trebalo dokazati.



Slika 29



Slika 30

30. Nazovimo *pozitivnom* orijentaciju uglova α, β i γ, a *negativnom* suprotnu orijentaciju. Neka je a' poluprava sa temenom A takva da je pozitivno orijentisan ugao koji zahvataju poluprave a' i AB jednak $\alpha/2$ i neka je a prava koja sadrži polupravu a'. Važi $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a$. Neka je b' poluprava sa temenom B takva da je pozitivno orijentisan ugao koji zahvataju poluprave BA i b' jednak $\beta/2$ i neka je b prava koja sadrži polupravu b'. Važi $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$. Uglovi $\alpha/2$ i $\beta/2$ su oštri, pa su poluprave a' i b' sa iste strane prave AB i one se seku u nekoj tački D. Pozitivno orijentisan ugao koji zahvataju prave a i b jednak je $\alpha/2 + \beta/2$ (to je spoljašnji ugao kod temena D trougla $\triangle ADB$).

Dakle, važi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a =$$

$$= \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{D,2(\alpha+\beta)/2} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{D,\alpha+\beta}\ .$$

Pretpostavimo da je pozitivno orijentisan ugao $\angle CAB$ jednak $\alpha/2$ i da je pozitivno orijentisan ugao $\angle BAC$ jednak $\beta/2$. U tom slučaju, tačka C pripada polupravama a' i b', pa su tačke C i D identične. Tada važi $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{D,\alpha+\beta} = \mathcal{R}_{C,\gamma+\alpha+\beta}$. Rotacija $\mathcal{R}_{C,\alpha+\beta+\gamma}$ je koincidencija ako i samo ako je $\alpha+\beta+\gamma = 2k\pi$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Uglovi α, β i γ su manji od opruženog, pa je $\alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi$, odakle sledi da je rotacija $\mathcal{R}_{C,\alpha+\beta+\gamma}$ koincidencija ako i samo ako je $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$. Kako je $\angle CAB = \alpha/2$, $\angle BAC = \beta/2$ i $\angle CAB + \angle BAC + \angle ACB = \pi$, jednakost $(\alpha + \beta + \gamma)/2 = \pi$ (tj. jednakost $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$) važi ako i samo ako je $\angle ACB = \gamma/2$. Dakle, ako je $\angle ACB = \gamma/2$ (tj. ako je $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$) kompozicija $\mathcal{I}$ je koincidencija, a inače je rotacija oko tačke C za ugao $\alpha+\beta+\gamma$.

Pretpostavimo da pozitivno orijentisan ugao $\angle CAB$ nije jednak $\alpha/2$ ili da pozitivno orijentisan ugao $\angle BAC$ nije jednak $\beta/2$. U tom slučaju, tačka C ne pripada polupravoj a' ili ne pripada polupravoj b', pa su tačke C i D različite. Neka je d' poluprava sa temenom D takva da je pozitivno orijentisan ugao koji zahvataju poluprave d' i DC jednak $(\alpha + \beta)/2$ i neka je d prava koja sadrži polupravu d'. Važi $\mathcal{R}_{D,\alpha+\beta} = \mathcal{S}_{DC} \circ \mathcal{S}_d$. Neka je c' poluprava sa temenom C takva da je pozitivno orijentisan ugao koji zahvataju poluprave CD i c' jednak $\gamma/2$ i neka je c prava koja sadrži polupravu c'. Važi $\mathcal{R}_{C,\gamma} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_{DC}$. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{D,\alpha+\beta} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_{DC} \circ \mathcal{S}_{DC} \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$. Uglovi $(\alpha+\beta)/2$ i $\gamma/2$ su manji od opruženog, pa su poluprave d' i c' sa iste strane prave CD. Prave d i c seku se u nekoj tački E ako i samo ako zbir uglova $(\alpha+\beta)/2$ i $\gamma/2$ nije jednak opruženom uglu tj. ako i samo ako je $(\alpha+\beta+\gamma)/2 \neq \pi$. Ako je $(\alpha+\beta+\gamma)/2 < \pi$, onda je kompozicija $\mathcal{I}$ rotacija

$$\mathcal{R}_{E,2(\angle EDC+\angle DCE)} = \mathcal{R}_{E,2((\alpha+\beta)/2+\gamma/2)} = \mathcal{R}_{E,\alpha+\beta+\gamma}\ .$$

Ako je $(\alpha+\beta+\gamma)/2 > \pi$, onda je kompozicija $\mathcal{I}$ rotacija

$$\mathcal{R}_{E,2\angle DEC} = \mathcal{R}_{E,2(\pi-(\pi-\angle CDE)-(\pi-\angle ECD))} = \mathcal{R}_{E,2(\angle CDE+\angle ECD-\pi)} =$$

$$= \mathcal{R}_{E,2((\alpha+\beta)/2)+\gamma/2-\pi)} = \mathcal{R}_{E,\alpha+\beta+\gamma-2\pi}\ .$$

Ukoliko je zbir uglova $(\alpha+\beta)/2$ i $\gamma/2$ jednak opruženom uglu, onda je kompozicija $\mathcal{I}$ translacija određena paralelnim pravama d i c.

Dakle, ako ne važi $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, onda je kompozicija $\mathcal{I}$ rotacija. U suprotnom, ako su pozitivno orijentisani uglovi $\angle CAB$ i $\angle ABC$ jednaki redom $\alpha/2$ i $\beta/2$ (i $\angle ACB = \gamma/2$) kompozicija $\mathcal{I}$ je koincidencija, a inače je translacija.

31. *Analiza:* Pretpostavimo da tačka E zadovoljava uslove zadatka.

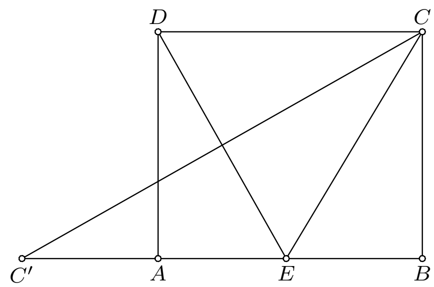
Dokažimo da ne važi $\mathcal{B}(E,A,B)$. Pretpostavimo suprotno — pretpostavimo da je $\mathcal{B}(E,A,B)$. U tom slučaju bi poluprava EC pripadala oštrom uglu $\angle DEA$, pa bi važilo $\angle DEA = \angle DEC + \angle CEA$, što je kontradikcija, jer važi $\angle DEA = \angle DEC$. Dakle, ne važi $\mathcal{B}(E,A,B)$, pa su tačke E i B sa iste strane tačke A. Odatle sledi da su tačke A i C sa raznih strana prave DE. Neka je C' slika tačke C u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_{DE}$. Tačke A i C su sa raznih strana prave DE, pa iz $\angle C'ED \cong \angle CED \cong \angle AED$, sledi da tačka C' pripada pravoj AE, tj. pravoj AB. Tačke C i C' su sa raznih strana prave DE, pa su tačke A i C' sa iste strane tačke E. Pored toga, važi $DC \cong DC'$, pa je tačka C' presečna tačka prave AB i kruga sa središtem D i poluprečnikom DC i važi $DC \geq DA$. Tačka E je presečna tačka prave AB i simetrale duži CC'.

Konstrukcija: Označimo sa C' presečnu tačku prave AB i kruga sa središtem D i poluprečnikom DC. Presečna tačka prave AB i simetrale duži CC' je tražena tačka E.

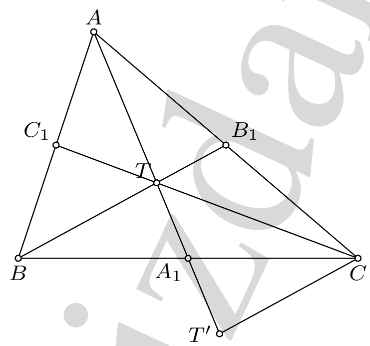
Dokaz: Na osnovu konstrukcije je $DC \cong DC'$, pa tačka D pripada simetrali duži CC'. Na osnovu konstrukcije, i tačka E pripada simetrali duži CC', pa važi $\angle CED \cong \angle C'ED$.

Prava DE je simetrala duži CC', pa su tačke C i C' sa raznih strana prave DE. Ugao $\angle C'DC$ je manji od opruženog i poluprava DE je njegova bisektrisa, odakle sledi da je ugao $\angle CDE$ manji od pravog, pa poulprava DE pripada uglu $\angle CDA$ i tačke A i C su raznih strana prave DE. Dakle, tačke A i C' su sa iste strane prave DE, odakle sledi da su tačke A i C' sa iste strane tačke E, pa važi $\angle C'ED \cong \angle AED$. Odatle sledi $\angle AED \cong \angle CED$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ako je $DC < AD$, zadatak nema rešenja; ako je $DC = AD$, zadatak ima jedno rešenje; ako je $DC > AD$, zadatak ima dva rešenja od kojih svako odgovara po jednoj presečkoj tački prave AB i kruga sa središtem D i poluprečnikom DC.



Slika 31



Slika 32

32. *Analiza:* Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka i da su t_a, t_b i t_c zadate duži. Neka su A_1, B_1, C_1 središta ivica BC, AC i AB i neka je $AA_1 \cong t_a$, $BB_1 \cong t_b$, $CC_1 \cong t_c$. Neka je T presečna tačka pravih AA_1, BB_1 i CC_1, tj. težište trougla $\triangle ABC$. Neka je T' tačka simetrična tački T u odnosu na A_1, tj. neka je $T' = \mathcal{S}_{A_1}(T)$. Iz $TA_1 \cong A_1T'$, $BA_1 \cong A_1C$, $\angle BA_1T \cong CA_1T'$ sledi da su trouglovi $\triangle BA_1T$ i $\triangle A_1T'C$ podudarni i $T'C \cong BT$.

Težište T deli težišne duži u odnosu $2:1$, pa je $CT = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$, $BT = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$ i $TA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}t_a$. Odatle dobijamo $CT' = BT = \frac{2}{3}t_b$, $TT' = 2TA_1 = \frac{2}{3}t_a$ i ($CT = \frac{2}{3}t_c$).

Tačka A_1 je središte duži TT'. Tačka A simetrična je tački T' u odnosu na T. Tačka B simetrična je tački C u odnosu na A_1.

Ivice trougla $\triangle TT'C$ jednake su $\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b, \frac{2}{3}t_c$, pa za njihove mere mora da važe nejednakosti trougla. Odatle sledi da i za mere duži t_a, t_b i t_c mora da važe nejednakosti trougla.

Konstrukcija: Konstruišimo trougao $\triangle TT'C$ takav da važi $TT' = \frac{2}{3}t_a$, $CT' = \frac{2}{3}t_b$ i $CT = \frac{2}{3}t_c$. Označimo sa A_1 središte duži TT'. Konstruišimo tačku simetričnu tački T' u odnosu na T i označimo tu tačku sa A. Konstruišimo tačku simetričnu tački C u odnosu na A_1 i označimo tu tačku sa B. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, tačka A_1 je središte ivice BC, pa je AA_1 težišna duž. Na osnovu konstrukcije je $TT' = \frac{2}{3}t_a$, pa, kako je $\mathcal{B}(A, T, A_1, T')$ sledi $AA_1 = AT + TA_1 = TT' + \frac{1}{2}TT' = \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_a = t_a$. Tačka T deli duž AA_1 u odnosu $AT : TA_1 = 2 : 1$, pa je T težište trougla $\triangle ABC$. Na osnovu konstrukcije je $CT = \frac{2}{3}t_c$, pa kako težište deli (svaku) težišnju duž u odnosu $2 : 1$, sledi da tački C odgovara težišna duž dužine $\frac{3}{2}CT = \frac{3}{2}\frac{2}{3}t_c = t_c$. Iz $TA_1 \cong A_1T'$, $BA_1 \cong A_1C$, $\angle BA_1T \cong CA_1T'$ sledi da su trouglovi $\triangle BA_1T$ i $\triangle A_1T'C$ podudarni i $BT \cong CT'$. Na osnovu konstrukcije je $CT' = \frac{2}{3}t_b$, odakle sledi $BT = \frac{2}{3}t_b$. Tačka T je težište trougla $\triangle ABC$, pa tački B odgovara težišna duž dužine $\frac{3}{2}BT = \frac{3}{2}\frac{2}{3}t_b = t_b$. Dakle, težišne duži trougla $\triangle ABC$ podudarne su datim dužima t_a, t_b i t_c, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Rešenje zadatka postoji ako i samo postoji trougao čije su ivice podudarne dužima $\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b, \frac{2}{3}t_c$, tj. ako i samo ako za njihove dužine važe nejednakosti trougla: $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b > \frac{2}{3}t_c$, $\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c > \frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a > \frac{2}{3}t_b$. Dakle, rešenje zadatka postoji ako i samo važi $t_a + t_b > t_c$, $t_b + t_c > t_a$, $t_c + t_a > t_b$, (tj. ako i samo ako postoji trougao čije su ivice podudarne datim dužima t_a, t_b i t_c) i tada zadatak ima jedinstveno rešenje.

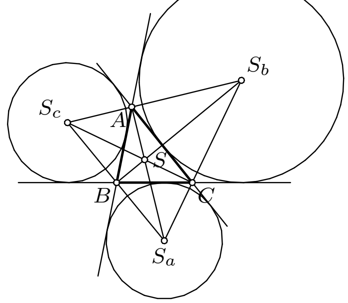
33. *Analiza:* Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je S središte upisanog kruga u trougao $\triangle ABC$. Prave AS_a i S_bS_c su simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena A trougla $\triangle ABC$, pa je $S_aA \perp S_bS_c$, tj. tačka A je podnožje visine iz tačke S_a na pravoj S_bS_c. Analogno se dokazuje da je tačka B podnožje visine iz tačke S_b na pravoj S_aS_c i da je tačka C podnožje visine iz tačke S_c na pravoj S_aS_b.

Primetimo da važi $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, $\mathcal{B}(B, S, S_b)$ i $\mathcal{B}(C, S, S_c)$. Iz $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$ sledi da poluprava S_aA pripada uglu $\angle S_cS_aS_b$. Važi $\angle S_cS_aS_b = \angle BS_aC = \pi - \angle S_aBC - \angle S_aCB = \pi - (\frac{\pi}{2} - \angle SBC) - (\frac{\pi}{2} - \angle SCB) = \angle SBC + \angle SCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(\pi - \angle BAC) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BAC$. Analogno se dokazuje da važi $\angle S_aS_bS_c = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle ABC$ i $\angle S_bS_cS_a = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BCA$.

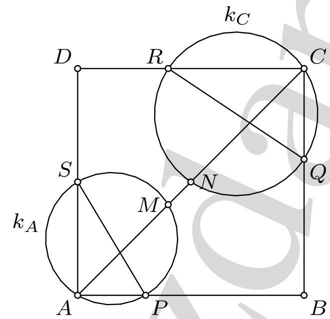
Konstrukcija: Označimo sa A, B, C podnožja normala iz S_a, S_b, S_c na prave S_bS_c, S_aS_c, S_aS_b. Ako tačke A, B, C pripadaju dužima S_bS_c, S_aS_c, S_aS_b, trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Označimo u dobijenom trouglu sa S presek pravih AS_a, BS_b, CS_c (taj presek postoji — to je ortocentar trougla $\triangle S_aS_bS_c$). Uglovi $\angle SCS_b$ i SAS_b su pravi, pa je četvorougao SCS_bA tetivan, odakle sledi $\angle CS_bS \cong \angle CAS$. Uglovi $\angle S_aAS_b$ i $\angle S_bBS_a$ su pravi, pa je četvorougao S_aS_bAB tetivan, odakle sledi $\angle S_aS_bB \cong \angle S_aAB$. Dakle, $\angle BAS_a \cong S_aAC$ tj. prava AS_a je simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A trougla $\triangle ABC$. Kako je (na osnovu konstrukcije) $S_bS_c \perp AS_a$, prava S_bS_c je simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A. Slično se dokazuje i za druga dva para simetrala. Preseci tih simetrala su tačke S_a, S_b, S_c, pa su tačke S_a, S_b, S_c zaista središta spolja upisanih krugova za (dobijeni) trougao $\triangle ABC$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Iz analize sledi da ako rešenje postoji, tada važi $\angle S_cS_aS_b = \frac{\pi}{2} - \angle BAC/2$. Pored toga, važi $0 < \frac{\pi}{2} - \angle BAC/2 < \frac{\pi}{2}$ (slično i za uglove $\angle S_aS_bS_c$ i $\angle S_bS_cS_a$), pa je trougao $\triangle S_aS_bS_c$ oštrougli. Suprotno, ako je trougao $\triangle S_aS_bS_c$ oštrougli, tada za tačku A dobijenu u konstrukciji, važi $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$ (analogno i $\mathcal{B}(S_a, B, S_c)$ i $\mathcal{B}(S_a, C, S_b)$), a na osnovu dokaza tako dobijeni trougao zadovoljava uslove zadatka. Dakle, rešenje postoji ako i samo ako je trougao $\triangle S_aS_bS_c$ oštrougli i tada je rešenje jedinstveno (jer su visine trougla $\triangle S_aS_bS_c$ jedinstveno određene).



Slika 33



Slika 34

34. *Lema:* Medijatrisa ivice BC, bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i opisani krug tog trougla seku su u jednoj tački.

Dokaz leme: Videti dokaz leme **2** u rešenju **16**. □

Analiza: Pretpostavimo da kvadrat $ABCD$ zadovoljava uslove zadatka tj. pretpostavimo da njegove ivice AB, BC, CD i DA sadrže respektivno date tačke P, Q, R, S. Neka su k_A i k_C krugovi čiji su prečnici duži PS i QR. Prava koja sadrži dijagonalu AC kvadrata istovremeno je i simetrala uglova $\angle SAP$ i $\angle RCQ$. Neka je M presečna tačka medijatrise duži SP i kruga k_A koja je u odnosu na tačku A sa suprotne strane prave SP. Na osnovu leme, simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A trougla $\triangle SAP$ sadrži tačku M, pa sledi da prava AC sadrži tačku M. Analogno, prava AC sadrži tačku N koja je presečna tačka medijatrise duži RQ i kruga k_C i u odnosu na tačku C je sa suprotne strane prave RQ. Dakle, tačke A i C su presečne tačke prave MN i krugova k_A i k_C. Tačke A i M su sa raznih strana prave SP, tačka A je sa suprotne strane prave SP u odnosu na tačke R i Q, pa sledi da je tačka M sa iste strane prave SP kao i tačke R i Q. Analogno, tačka N je sa iste strane prave RQ kao i tačke S i P. Tačke B, C i D su sa iste strane prave SP, pa su sa iste strane te prave i tačke R i Q. Analogno, tačke S i P su sa iste strane prave RQ.

Tačka B je presečna tačka pravih AP i CQ, tačka D je presečna tačka pravih AS i CR.

Konstrukcija: Pretpostavimo da su tačke R i Q sa iste strane prave SP i tačke S i P su sa iste strane prave RQ (na osnovu analize, taj uslov mora da bude ispunjen da bi rešenje postojalo).

Konstruišimo krugove k_A i k_C čiji su prečnici duži PS i QR. Označimo sa M presečnu tačku medijatrise duži SP i kruga k_A koja je sa iste strane prave SP kao i tačke R i Q. Označimo sa N presečnu tačku medijatrise duži RQ i kruga k_C koja je sa iste strane prave RQ kao i tačke S i P. Konstruišimo pravu p određenu tačkama M i N (ako je tačka M identična tački N, konstruišimo proizvoljnu pravu p koja je sadrži). Označimo sa A presečnu tačku prave p i kruga k_A različitu od M. Označimo sa C presečnu tačku prave p i kruga k_C različitu od N.

Ako se prave AP i CQ seku u tački takvoj da je ona sa suprotne strane tačke P u odnosu na tačku A i sa suprotne strane tačke Q u odnosu na tačku C, označimo tu tačku sa B (inače rešenje zadatka ne postoji).

Ako se prave AS i CR seku u tački takvoj da je ona sa suprotne strane tačke S u odnosu na tačku A i sa suprotne strane tačke R u odnosu na tačku C, označimo tu tačku sa D (inače rešenje zadatka ne postoji).

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, prave AB, BC, CD i DA sadrže redom tačke P, Q, R i S i važi $\mathcal{B}(A,P,B)$, $\mathcal{B}(B,Q,C)$, $\mathcal{B}(C,R,D)$ i $\mathcal{B}(D,S,A)$.

Potrebno je još dokazati da je četvorougao $ABCD$ kvadrat. Na osnovu konstrukcije, tačka M je sa iste strane prave SP kao i tačke R i Q, a tačke A i M su sa raznih strana prave SP, pa sledi da je tačka A sa suprotne strane prave SP u odnosu na tačke R i Q. Analogno, tačka C je sa suprotne strane prave RQ u odnosu na tačke S i P. Duž SP je prečnik kruga k_A, pa je ugao $\angle SAP$ prav (tj. ugao $\angle DAB$ je prav). Na osnovu konstrukcije tačka M je presečna tačka medijatrise duži SP i kruga k_A, pa je, na osnovu leme, poluprava AM bisektrisa ugla $\angle SAP$, tj. poluprava AC je bisektrisa ugla DAB. Dakle, važi $\angle DAC = \angle CAB = \frac{\pi}{4}$ i, analogno, $\angle BCA = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Iz $\angle CAB = \angle ACB = \frac{\pi}{4}$ sledi da je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki ($AB \cong BC$) i $\angle ABC = \pi - \angle CAB - \angle ACB = \frac{\pi}{2}$. Analogno važi i $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, pa četvorougao $ABCD$ ima četiri prava ugla i važi $AB \cong BC$, odakle sledi da je on kvadrat.

Diskusija: Rešenje zadatka postoji ako su zadovoljeni sledeći uslovi: tačke R i Q su sa iste strane prave SP; tačke S i P su sa iste strane prave RQ; postoji presečna tačka A prave p i kruga k_A različita od M; postoji presečna C tačka prave p i kruga k_C različita od N; prave AP i CQ seku se u tački takvoj da je ona sa suprotne strane tačke P u odnosu na tačku A i sa suprotne strane tačke Q u odnosu na tačku C; prave AS i CR seku se u tački takvoj da je ona sa suprotne strane tačke S u odnosu na tačku A i sa suprotne strane tačke R u odnosu na tačku C. Ako su, pored toga, tačke M i N identične, postoji beskonačno mnogo rešenja zadatka, a ako su tačke M i N različite, rešenje je jedinstveno.

35. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):*

Razlikujemo tri slučaja:

$\alpha < \frac{\pi}{2}$: Konstruišemo najpre sa iste strane prave AB poluprave sa temenima A i B takve da sa polupravom AB, odnosno BA zahvataju uglove jednake $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Presečnu tačku tih polupravih označimo sa O. Konstruišimo krug k sa središtem O koji sadrži tačku A. Traženi (otvoreni) lûk je lûk kruga k koji je sa iste strane prave AB kao i tačka O.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: Ako je ugao α prav: označimo sa O središte duži AB. Konstruišimo krug k sa središtem O koji sadrži tačku A. Traženi (otvoreni) lûk je lûk kruga k sa jedne strane prave AB.

$\alpha > \frac{\pi}{2}$: Ako je ugao α tup: konstruišemo najpre sa iste strane prave AB poluprave sa temenima A i B takve da sa polupravom AB, odnosno BA

zahvataju uglove jednake $\alpha - \frac{\pi}{2}$. Presečnu tačku tih polupravih označimo sa O. Konstruišimo krug k sa središtem O koji sadrži tačku A. Traženi (otvoreni) lûk je lûk kruga k koji je sa suprotne strane prave AB u odnosu na tačku O.

(Primetimo da i za tačke X lûka koji je simetričan konstruisanom lûku u odnosu na pravu AB važi $\angle AXB = \alpha$. Unija ta dva otvorena lûka je skup svih tačaka X za koje važi $\angle AXB = \alpha$.)

Dokaz pomoćne konstrukcije:

$\alpha < \frac{\pi}{2}$**:** Zbir uglova u trouglu $\triangle ABO$ jednak je π, pa je $\angle AOB = \pi - \angle OAB - \angle OBA = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$. Na osnovu teoreme **28.1**, periferijski ugao kruga jednak je polovini njegovog centralnog ugla koji zahvata isti krug, pa kako za svaku tačku X konstruisanog lûka periferijski ugao $\angle AXB$ zahvata isti lûk kao i centralni ugao $\angle AOB$ (jer su tačke X i O sa iste strane prave AB), sledi da za svaku tačku X konstruisanog lûka važi $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}2\alpha = \alpha$, što je i trebalo dokazati.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$**:** Ugao $\angle AOB$ je opruženi ugao, pa na osnovu teoreme **28.1** sledi da za svaku tačku X konstruisanog lûka važi $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2} = \alpha$, što je i trebalo dokazati.

$\alpha > \frac{\pi}{2}$**:** Zbir uglova u trouglu $\triangle ABO$ jednak je π, pa je $\angle AOB = \pi - \angle OAB - \angle OBA = \pi - (\alpha - \frac{\pi}{2}) - (\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\pi - 2\alpha$. Neka je X proizvoljna tačka konstruisanog lûka i neka je Y njoj simetrična tačka u odnosu na tačku O. Tačke X i O su sa raznih strana prave AB, pa sledi i da su tačke X i Y sa raznih strana prave AB. Duž XY je prečnik kruga k, pa su uglovi $\angle XAY$ i $\angle XBY$ pravi. Zbir uglova u četvorouglu jednak je zbiru četiri prava ugla, pa kako je $\angle XAY + \angle XBY = \pi$, sledi da je zbir uglova $\angle AXB$ i $\angle AYB$ jednak zbiru dva prava ugla. Kako (na osnovu teoreme **28.1**) za svaku tačku Y lûka kruga k koji je sa iste strane prave AB kao i tačka O važi $\angle AYB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(2\pi - 2\alpha) = \pi - \alpha$, sledi $\angle AXB = \pi - \angle AYB = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha$, što je i trebalo dokazati.

□

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle XYZ$ zadovoljava uslove zadatka. Dokažimo najpre da je tačka O središte opisanog kruga trougla $\triangle XYZ$. Označimo ugao $\angle CXY$ sa ϕ. Važi $\angle CYX = \pi - \angle ACB - \angle CXY = \pi - \frac{\pi}{3} - \phi = \frac{2\pi}{3} - \phi$. Važi $\mathcal{B}(C, X, B)$, $\mathcal{B}(C, Y, A)$ i $\mathcal{B}(A, Z, B)$, pa poluprava XZ pripada konveksnom uglu $\angle YXB$, odakle sledi $\angle ZXB = \pi - \angle CXY - \angle YXZ = \pi - \phi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \phi$. Dakle, $\angle CYX = \angle ZXB (= \frac{2\pi}{3} - \phi)$, $\angle YCX = \angle ZBX (= \frac{\pi}{3})$ i $YX \cong XZ$, odakle sledi da su trouglovi $\triangle YXC$ i $\triangle XZB$ podudarni i da važi $CX \cong ZB$. Iz $\angle OCX = \angle OBZ (= \frac{\pi}{6})$, $OC \cong OB$ (jer je O središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$) i $CX \cong ZB$ sledi da su trouglovi $\triangle COX$ i $\triangle BOZ$ podudarni i da važi $OX \cong OZ$. Analogno se dokazuje da važi $OX \cong OY$, pa je tačka O središte opisanog kruga pravilnog trougla $\triangle XYZ$ i važi $\angle XOZ = \angle YOZ = 2\angle YXZ = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Rotacijom oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$ duž XY se preslikava na duž YZ, a tačka P koja pripada duži XY u tačku P' koja pripada duži YZ. Iz $\mathcal{B}(X,P,Y)$, $\mathcal{B}(Y,P',Z)$ i $\angle ZYX = \frac{\pi}{3}$, sledi $\angle P'YP = \frac{\pi}{3}$, tj. tačka Y pripada skupu tačaka N takvih da je $\angle PNP' = \frac{\pi}{3}$ i u odnosu na tačku O je sa suprotne strane prave PP'. Tačka Y je, dakle, presečna tačka tog skupa tačaka i prave AC. Tačka Z je slika tačke Y u rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$. Tačka X je slika tačke Z u rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$.

Navedena svojstva omogućavaju konstrukciju trougla $\triangle XYZ$.

Konstrukcija: Označimo sa P' sliku tačke P u rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$. Na osnovu pomoćne konstrukcije, konstruišimo lûk k' koji je skup tačka N takvih da je $\angle PNP' = \frac{\pi}{3}$ i koji je sa suprotne strane prave PP' u odnosu na tačku O. Presečnu tačku tog lûka i prave AC označimo sa Y. Označimo sa Z sliku tačke Y u rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$. Označimo sa X sliku tačke Z u rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, tačka Y pripada pravoj AC. Dokažimo da važi $\mathcal{B}(A,Y,C)$. Dokažimo da ne važi $\mathcal{B}(A,C,Y)$. Važi $OP \cong OP'$ i $OC \cong OA$, pa iz $\frac{OP}{OC} = \frac{OP'}{OA}$ sledi $CA \| PP'$ i $\angle P'PO = \angle CAO = \frac{\pi}{6}$. Ako bi važilo $\mathcal{B}(A,C,Y)$, poluprava PC bi pripadala uglu $\angle P'PY$, pa bi zbir uglova u trouglu $\triangle YP'P$ bio veći od zbira uglova $\angle P'PY + \angle PYP'$, što je kontradikcija, jer važi $\angle P'PY + \angle PYP' > \angle P'PC + \angle PYP' = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} > \pi$. Analogno se može dokazati da ne važi ni $\mathcal{B}(Y,A,C)$, pa sledi $\mathcal{B}(A,Y,C)$ i da tačka Y pripada ivici AC.

U rotaciji oko tačke O za ugao $\frac{2\pi}{3}$, duž CA preslikava se na duž AB, a tačka Y za koju važi $\mathcal{B}(C,Y,A)$, preslikava se u tačku Z, pa važi $\mathcal{B}(A,Z,B)$. Analogno se dokazuje da tačka X pripada ivici BC.

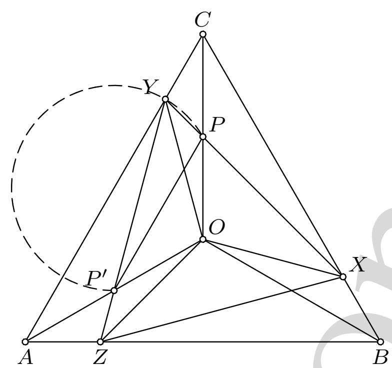
Na osnovu konstrukcije važi $OY \cong OZ \cong OX$ i $\angle YOZ = \angle ZOX = \frac{2\pi}{3}$, pa je trougao $\triangle XYZ$ zaista pravilan.

Iz $\angle YOZ = \angle ZOX = \frac{2\pi}{3}$ sledi $\angle XOY = \frac{2\pi}{3}$, pa kako je $OX \cong OY$, važi $\angle OYX = \angle OXY = \frac{1}{2}(\pi - \angle XOY) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. S druge strane, iz $OC \cong OA$ i $\angle COA = \frac{2\pi}{3}$ sledi $\angle CAO = \angle ACO = \frac{1}{2}(\pi - \angle COA) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Iz $\angle PYP' + \angle POP' = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ sledi da je četvorougao $PYP'O$ tetivan, pa je $\angle OYP = \angle OP'P = \frac{\pi}{6}$. Tačke X i P su sa iste strane prave OY, pa iz $\angle OYX = \angle OYP (= \frac{\pi}{6})$, sledi da su tačke Y, P i X kolinearne. Kako je P tačka unutrašnje oblasti trougla $\triangle ABC$, sledi da važi raspored $\mathcal{B}(X,P,Y)$, tj. tačka P pripada ivici XY trougla $\triangle XYZ$.

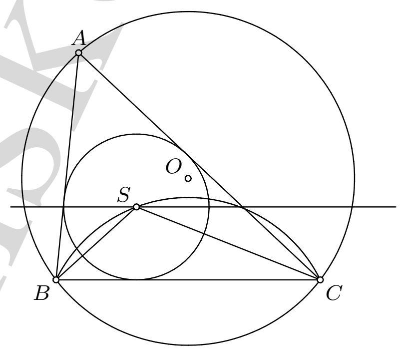
Diskusija: Na osnovu analize sledi da, ako rešenje postoji, onda postoji presečna tačka lûka k' i prave AC. Na osnovu dokaza sledi da, ako takva presečna tačka postoji, onda ona određuje jedno rešenje. Dakle, rešenje zadatka postoji ako i samo ako lûk k' i prava AC imaju zajedničkih tačaka. Ako lûk k' i prava AC imaju dve zajedničke tačke, postoje dva rešenja zadatka (tako dobijeni trouglovi $\triangle XYZ$ i $\triangle X'Y'Z'$ su podudarni), ako imaju jednu zajedničku tačku, zadatak ima jedinstveno rešenje i ako nemaju zajedničkih tačaka, zadatak nema rešenja.

Lûk k' je skup tačaka N takvih da je $\angle PNP' = \frac{\pi}{3}$, a kako je $\angle POP' = \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, sledi da je k' lûk kruga k opisanog oko trougla $\triangle PP'O$. Rešenje zadatka postoji ako i samo ako krug k i prava AC imaju zajedničkih tačaka. Kako je $OP \cong OP'$, simetrala ugla $\angle POP'$ je medijatrisa ivice PP', a to je prava OB. Dakle, središte kruga k pripada pravoj OB. Neka je B_1 presečna tačka prave OB i prave AC, C_1 presečna tačka prave OC i prave AB, S središte duži OB_1 i neka su B' i S' podnožja normala iz tačaka B_1 i S na pravoj OC. Trougao $\triangle ABC$ je pravilan, pa su duži BB_1 i CC_1 njegove visine. Kako je B_1 središte ivice AC, tačka B' je središte duži CC_1 i važi raspored $\mathcal{B}(O, S, B', C)$. Krug k i prava AC imaju zajedničkih tačaka ako i samo ako je $SO \geq SB'$, odnosno ako i samo ako je $S'O \geq S'B'$. Tačka S je središte opisanog kruga trougla $\triangle PP'O$, pa pripada medijatrisi duži OP, odakle sledi da je $\mathcal{S}_{S'}(O) = P$, $S'O \cong S'P$ i $\mathcal{B}(O, S', P)$. Dakle, krug k i prava AC imaju zajedničkih tačaka ako i samo ako je $S'P \geq S'B'$. Kako su tačke P i B' sa iste strane tačke S', sledi da krug k i prava AC imaju zajedničkih tačaka ako i samo ako važi $\neg\mathcal{B}(S', P, B')$, odnosno ako i samo ako važi $\neg\mathcal{B}(C, B', P)$.

Rešenje zadatka postoji ako i samo ako važi $\neg\mathcal{B}(C, B', P)$, gde je B' središte visine trougla $\triangle ABC$ koja odgovara temenu C. Ako su tačke P i B' identične (tada je $CP : PO = 3 : 1$, jer je tačka O težište trougla $\triangle ABC$) postoji jedinstveno rešenja zadatka. Ako važi $\mathcal{B}(C, P, B')$ (tj. $CP : PO < 3 : 1$), postoje dva rešenja zadatka. Inače, rešenje ne postoji.



Slika 35



Slika 36

36. *Lema:* Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, onda je $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$.

Dokaz leme: Tačka S pripada bisektrisama unutrašnjih uglova $\angle ABC$ i $\angle BCA$ trougla $\triangle ABC$, pa važi $\angle SBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ i $\angle SCB = \frac{1}{2}\angle ACB$, odakle sledi $\angle BSC = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\pi - \angle BAC) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$. Dakle, ivica BC se iz tačke S vidi pod uglom[2] $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$, tj. $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$. □

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35**. □

[2]Kažemo da se duž XY iz tačke Z *vidi pod uglom* α, ako je $\angle XZY = \alpha$.

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka su O i S središta njegovog opisanog i upisanog kruga. Na osnovu leme, duž BC iz tačke S vidi se pod uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$. Ako tačka O pripada duži BC, važi $2r = a$. Ako tačka O ne pripada duži BC, na osnovu nejednakosti trougla, važi $BO + OC > BC$, tj. $2r > a$.

Ako su tačke A i O sa iste strane prave BC, onda je $\angle BAC < \frac{\pi}{2}$ i važi $2r > a$. Tada je, na osnovu teoreme **28.1**, periferijski ugao jednak polovini centralnog ugla koji zahvata lûk BC i važi $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$. Odatle sledi $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\angle BOC$.

Ako su tačke A i O sa raznih strana prave BC, onda je $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$ i važi $2r > a$ i $\frac{1}{2}\angle BOC + \angle BAC = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Odatle sledi $\angle BAC = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BOC$ i $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BOC) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\angle BOC$.

Ako tačka O pripada duži BC, onda je tačka O je središte duži BC, i važi $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Tačka O je presečna tačka krugova sa središtima B i C i poluprečnicima r. Upisani krug dodiruje ivicu BC, pa je tačka S presečna tačka lûka iz čijih se tačaka duž BC vidi uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$ i prave koja je na rastojanju ρ od prave BC i nalazi se sa iste njene strane kao i pomenuti lûk. Tačka A je presečna tačka tangenti iz tačaka B i C na krug sa središtem S i poluprečnikom ρ.

Konstrukcija: Konstruišimo duž podudarnu duži a i označimo njena temena sa B i C. Konstruišimo krugove sa središtima B i C i poluprečnicima r i (jednu) njihovu presečnu tačku označimo sa O. Razlikujemo dva slučaja:

$2r = a$**:** Ako je $2r = a$, tačka O pripada duži BC i važi $\angle BOC = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Konstuišimo lûk $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ Konstruišimo, sa iste te strane prave BC, pravu d paralelnu pravoj BC i to na rastojanju ρ. Presek prave d i lûka $\hat{k}$ označimo sa S. Konstruišimo krug l sa središtem S i poluprečnikom ρ. Konstruišimo tangente iz tačaka B i C na krug l i označimo njihov presek sa A. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

$2r > a$**:** Ako je $2r > a$, onda tačka O ne pripada duži BC i važi $\angle BOC < 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Konstruišimo lûk $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\angle BOC$ sa iste strane prave BC sa koje je tačka O (ili konstruišimo lûk $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\angle BOC$ sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku O). Konstruišimo, sa iste te strane prave BC, pravu d paralelnu pravoj BC i to na rastojanju ρ. Presek prave d i lûka $\hat{k}$ označimo sa S. Konstruišimo krug l sa središtem S i poluprečnikom ρ. Konstruišimo tangente iz tačaka B i C na krug l i označimo njihov presek sa A. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Ivica BC trougla $\triangle ABC$, na osnovu konstrukcije podudarna je datoj duži a. Na osnovu konstrukcije, prave BC, AB i AC dodiruju krug l i pri tome su krug l i tačka A sa iste strane prave BC; krug l i tačka B su iste strane prave AC i krug l i tačka C su iste strane prave AB, odakle sledi da je krug l upisani krug trougla $\triangle ABC$. Rastojanje tačke S od prave BC je, na osnovu konstrukcije, podudarno datoj duži ρ, pa je poluprečnik kruga l jednak ρ. Neka je k krug sa središtem O koji sadrži tačke B i C. Njegov poluprečnik, na osnovu konstrukcije, podudaran je datoj duži r. Potrebno je dokazati da je krug k opisani krug trougla $\triangle ABC$, odnosno dokazati da tačka A pripada krugu k.

Tačka S je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, pa, na osnovu leme, važi $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$.

$2r = a$**:** Ako je $2r = a$, tačka O pripada duži BC i važi $\angle BOC = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Na osnovu konstrukcije, tačka S pripada lûku iz iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $\frac{3\pi}{4}$, tj. važi $\angle BSC = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$. Na osnovu leme važi $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$, pa sledi $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, što znači da tačka A pripada krugu čiji je prečnik duž BC. Za tačku O, dakle, važi $OB = OC = OA = \frac{a}{2} = r$, pa je krug k opisani krug trougla $\triangle ABC$ i njegov poluprečnik podudaran je datoj duži r.

$2r > a$**:** Na osnovu konstrukcije, tačka S pripada lûku iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\angle BOC$ i koji je sa iste strane prave BC sa koje je tačka O ili lûku iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\angle BOC$ i koji je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku O.

Pretpostavimo da tačka S pripada lûku iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\angle BOC$ i koji je sa iste strane prave BC sa koje je tačka O. Tačka S je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, pa je, na osnovu leme, $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$. Dakle, važi $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ i tačke A i O su iste strane prave BC, pa tačka A pripada krugu k. Krug k je, dakle, opisani krug trougla $\triangle ABC$ i njegov poluprečnik podudaran je datoj duži r, što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo da tačka S pripada lûku iz čijih se tačaka duž BC vidi pod uglom $2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\angle BOC$ i koji je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku O. Tačka S je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, pa je, na osnovu leme, $\angle BSC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$. Dakle, važi $2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\angle BOC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC$, odakle sledi $\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BOC = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Pored toga, tačke A i O su raznih strana prave BC, pa sledi da tačka A pripada krugu k. Krug k je, dakle, opisani krug trougla $\triangle ABC$ i njegov poluprečnik podudaran je datoj duži r, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ako je $2r < a$, zadatak nema rešenja. Ako je $2r = a$, zadatak ima dva simetrična rešenja ako se lûk $\hat{k}$ i prava d seku, odnosno jedinstveno rešenje (do na podudarnost), ako se lûk $\hat{k}$ i prava d dodiruju. Ako je $2r > a$, zadatak, za oba izbora luka $\hat{k}$ u konstrukciji, može da nema rešenja, da ima jedno ili da ima dva rešenja, u zavisnosti od toga da li se lûk $\hat{k}$ i prava d opisani u konstrukciji seku.

37. *Lema:* Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, A_1 središte ivice BC, P tačka dodira upisanog kruga i prave BC, P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A i P' tačka simetrična tački P u odnosu na tačku S, onda važi

(a) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$;

(b) tačka A_1 je središte duži PP_a.

Dokaz leme: Videti dokaz leme **2** u rešenju **12.** □

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija tangente iz tačke P na krug k:

Neka je O središte kruga k.

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, konstruišimo krug l čiji je prečnik duž OP. Označimo sa T (jednu) presečnu tačku krugova l i k. Konstruišimo pravu t određenu tačkama P i T. Prava t je tangenta iz tačke P na krug k.

Ako tačka P pripada krugu k, konstruišimo pravu t koja sadrži tačku P i normalna je na pravoj OP. Prava t je tangenta na krug k u tački P.

Ako tačka P pripada unutrašnjosti kruga k, ne postoji tangenta iz tačke P na krug k.

Dokaz pomoćne konstrukcije:

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, tačka T pripada krugu čiji je prečnik duž OP, pa je $\angle OTP$ prav, tj. $OT \perp PT$. Kako, pored toga, tačka T pripada krugu k, sledi da je prava t zaista tangenta iz tačke P na krug k.

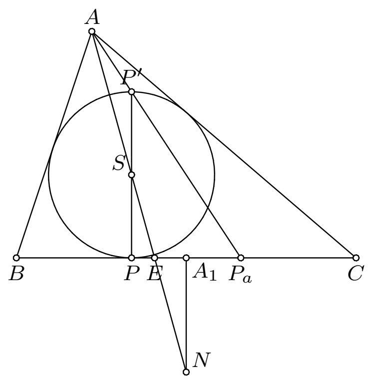
Ako tačka P pripada krugu k, prava t sadrži tačku P koja pripada krugu k i važi $t \perp OP$, sledi prava t zaista tangenta na krug k u tački P. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je P tačka dodira upisanog kruga i prave BC, P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A i P' tačka simetrična tački P u odnosu na tačku S — (koja je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$). Na osnovu leme, tačka A_1 je središte duži PP_a i važi $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Tačka A pripada pravoj SE i pravoj $P'P_a$, a tačke B i C pripadaju pravoj EA_1 i tangentama iz tačke A na krug sa središtem S i poluprečnikom SP. Važi i $\mathcal{B}(S, E, N)$, pa kako su tačke S i N sa raznih strana prave BC i kako tačke E i A_1 nisu identične (u protivnom bi tačke S, E i A_1 bile kolinearne, što je u suprotnosti sa zadatim uslovima) važi raspored $\mathcal{B}(P, E, A_1)$, odnosno ugao $\angle SEA_1$ je tup.

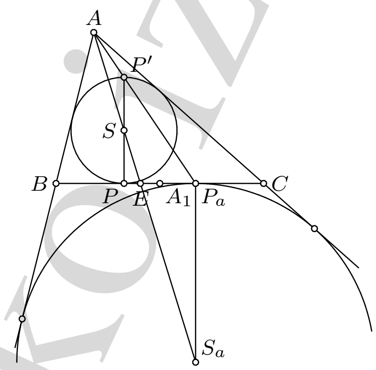
Konstrukcija: Konstruišimo i označimo sa P podnožje normale iz tačke S na pravoj EA_1. Označimo sa P_a tačku simetričnu tački P u odnosu na A_1, a sa P' tačku simetričnu tački P u odnosu na S. Presek pravih P_aP' i SE označimo sa A. Konstruišimo krug k sa središtem S i poluprečnikom SP. Konstruišimo (na osnovu opisa pomoćne konstrukcije) tangente iz tačke A na krug k i njihove presečne tačke sa pravom EA_1 označimo sa B i C. Ako je ugao $\angle SEA_1$ tup, trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Prave BC, AB i AC dodiruju krug k, pa je krug k upisani krug trougla $\triangle ABC$, a tačka S je zaista središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Tačke A, S i E su kolinearne na osnovu konstrukcije, pa E pripada bisektrisi unutrašnjeg ugla trougla $\triangle ABC$ kod temena A. Kako su tačka B, C i E kolinearne, sledi da je E zaista tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ seče ivicu BC. P je tačka u kojoj upisani krug trougla $\triangle ABC$ dodiruje pravu BC, tačka P' je (na osnovu konstrukcije) njoj simetrična u odnosu na tačku S, pa je tačka u kojoj se seku prave AP' i BC (tačka P_a), na osnovu leme, tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje pravu BC. Na osnovu leme, središte duži PP_a je središte duži BC. Kako je, na osnovu konstrukcije, tačka A_1 središte duži PP_a, sledi da je tačka A_1, zaista središte ivice BC, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Na osnovu analize sledi da je u svakom trouglu, u kojem tačke S, E i A_1 nisu kolinearne, ugao $\angle SEA_1$ tup. Ako su zadate tačke A_1, S i E takve da ugao $\angle SEA_1$ nije tup, onda rešenje zadatka ne postoji. Ako je ugao $\angle SEA_1$ tup, moguće je izvesti konstrukciju na opisani način i tako konstruisani trougao zadovoljava uslove zadatka. (Tačke označene u konstrukciji sa B i sa C mogu biti i suprotno označene i tom slučaju dobija se drugo moguće rešenje). Dakle, rešenje zadatka postoji samo ako je ugao $\angle SEA_1$ tup i tada je rešenje određeno jedinstveno do na podudarnost.



Slika 37



Slika 38

38. *Lema:* Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, A_1 središte ivice BC, P tačka dodira upisanog kruga i prave BC, P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A i P' tačka simetrična tački P u odnosu na tačku S, onda važi

(a) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$;

(b) tačka A_1 je središte duži PP_a.

Dokaz leme: Videti dokaz leme **2** u rešenju **12**. □

Analiza: Pretpostavimao da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je S središte upisanog kruga ovog trougla, neka su P_a i P podnožja upravnih iz tačaka S_a i S na pravoj BC i neka je P' tačka takva da važi $P' = \mathcal{S}_S(P)$. Tačke S_a, E, S i A su kolinearne i na osnovu leme važi $P = \mathcal{S}_{A_1}(P_a)$ i $\mathcal{B}(P_a, P', A)$. Prave AB i AC su tangente iz tačke A na krug sa središtem S i poluprečnikom SP. Tačke S i S_a su sa raznih strana prave BC, pa su tačke P i P_a sa raznih strana tačke E, odakle, kako je $S_aP_a > SP$, sledi da važi raspored $\mathcal{B}(P, E, A_1, P_a)$.

Konstrukcija: Označimo sa P_a podnožje upravne iz tačke S_a na pravoj EA_1. Označimo sa P tačku takvu da je $P = \mathcal{S}_{A_1}(P_a)$, a sa S presek prave ES_a i prave koja sadrži tačku P i upravna je na pravoj EA_1. Označimo sa P' tačku takvu da je $P' = \mathcal{S}_S(P)$, a sa A presek pravih $P'P_a$ i ES_a. Sa B i C označimo presečne tačke prave EA_1 i tangenti iz tačke A na krug sa središtem S i poluprečnikom SP. Ako važi raspored $\mathcal{B}(P, E, A_1, P_a)$, trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Tačka S je, na osnovu konstrukcije, središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ i P je tačka dodira tog kruga i prave BC. Tačka E pripada pravoj AS (i pravoj BC), pa je ona zaista presečna tačka prave BC i simetrale unutrašnjeg ugla $\angle BAC$. Za tačku P', na osnovu konstrukcije, važi $P' = \mathcal{S}_S(P)$, pa je, na osnovu leme tačka P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji dodiruje ivicu BC (jer je P_a presečna tačka pravih PE i AP'). Tačka S_a pripada pravoj SE i, na osnovu konstrukcije, je prava S_aP_a normalna na pravoj PE, pa je tačka S_a zaista središte spolja upisanog kruga trougla koji dodiruje ivicu BC. Na osnovu konstrukciji tačka A_1 je središte duži PP_a, pa kako su P i P_a tačke dodira prave BC i upisanog i spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, na osnovu leme sledi da je tačka A_1 istovremeno i središte duži BC, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Rešenje postoji ako i samo ako za tačke P i P_a određene kao u konstrukciji važi raspored $\mathcal{B}(P, E, A_1, P_a)$. Ako postoji jedno rešenje, postoji još jedno — njemu simetrično (sa suprotno označenim tačkama B i C).

39. *Lema 1:* Medijatrisa ivice BC, bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i opisani krug tog trougla seku su u jednoj tački.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **2** u rešenju **16.** $\square$

Lema 2: Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, A_1 središte ivice BC, P tačka dodira upisanog kruga i prave BC i P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A, onda je tačka A_1 središte duži PP_a.

Dokaz leme 2: Videti dokaz leme **2** u rešenju **12**. $\square$

Lema 3: Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, S_a središte spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A i N presečna bisektrise ugla $\angle BAC$ i opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ različita od A, onda važi $NB \cong NS \cong NS_a \cong NC$.

Dokaz leme 3: Neka je A_1 središte duži BC, P tačka dodira upisanog kruga i prave BC i P_a tačka dodira prave BC i spolja upisanog kruga trougla koji odgovara temenu A. Neka je n prava koja sadrži tačku N i paralelna je pravoj BC. Neka su S' i S'_a podnožja normala iz tačaka S i S_a na pravoj n. Na osnovu leme **1**, tačka N pripada medijatrisi ivice BC. Medijatrisa duži BC je prava A_1N i ona je paralelna pravama SS' i $S'S'_a$. Pored toga, važi i $PA_1 \| S'N$ i $P_aA_1 \| S'_aN$, pa su četvorouglovi $PS'NA_1$ i $P_aA_1NS'_a$ paralelogrami (štaviše pravougaonici), odakle sledi $S'N \cong PA_1$ i $S'_aN \cong P_aA_1$. Na osnovu leme **2**, tačka A_1 je središte duži PP_a, pa važi $PA_1 \cong P_aA_1$, odakle sledi $S'N \cong S'_aN$. Tačke S i S_a su sa raznih strana prave n, a tačke S' i S'_a su sa raznih strana A_1N, pa su uglovi $\angle SNS'$ i $\angle S_aNS'_a$ podudarni. Pored toga, podudarni, kao pravi, su i uglovi $\angle SS'N$ i $S_aS'_aN$. Iz $\angle SNS' \cong \angle S_aNS'_a$, $\angle SS'N \cong S_aS'_aN$ i $S'N \cong S'_aN$ sledi da su trouglovi $\angle SNS'$ i $\angle S_aNS'_a$ podudarni i $SN \cong S_aN$. Tačke S i S_a su sa raznih strana tačke N, pa je N središte duži SS_a.

Poluprave BS i BS_a su bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena B, pa zahvataju prav ugao, tj. $\angle SBS_a = \frac{\pi}{2}$. Dakle, tačka B pripada krugu čiji je prečnik duž SS_a. Tačka D je središte duži SS_a, pa važi $BN \cong NS \cong NS_a$. Analogno se dokazuje i $CN \cong NS \cong NS_a$, pa važi $BN \cong NS \cong NS_a \cong NC$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 4: Ako je N presečna bisektrise ugla $\angle BAC$ i opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ različita od A, i X i Y tačke prave AN takve da važi $\mathcal{B}(A, S, N, S_a)$ i $NB \cong NX \cong NY \cong NC$, onda je X središte upisanog kruga, a Y središte spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A.

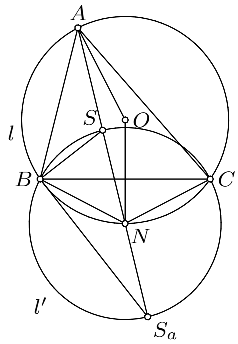
Dokaz leme 4: Neka je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ i S_a središte spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A. Na osnovu leme **3**, važi $NB \cong NS \cong NS_a \cong NC$, pa je $NX \cong NS$. Tačke A i N su sa raznih strana prave BC, pa važi $\mathcal{B}(A, S, N)$. Iz $\mathcal{B}(A, S, N)$, $\mathcal{B}(A, X, N)$ i $NX \cong NS$ sledi da su tačke X i S identične, tj. tačka X je središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Analogno se dokazuje i da je tačka Y središte spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je N presečna tačka bisektrise ugla $\angle BAC$ i opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ različita od A. Tačke S i S_a su središta upisanog i spolja upisanog kruga, pa važi $\mathcal{B}(A, S, S_a)$. Tačke A, B, C i N pripadaju opisanom krugu trougla $\triangle ABC$ čije je središte tačka O, pa važi $ON \cong AO \cong BO \cong CO$. Dakle, tačka A je presečna tačka prave SS_a i kruga sa središtem O koji sadrži tačku N. Na osnovu leme **3**, sledi $NB \cong NC \cong NS$. Tačke B i C su presečne tačke kruga l i kruga l' sa središtem N koji sadrži tačku S.

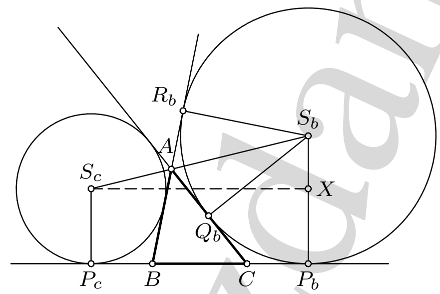
Konstrukcija: Označimo sa N središte duži SS_a. Konstruišimo krug l čije je središte tačka O i koji sadrži tačku N. Presečnu tačku kruga l i prave SS_a različitu od N označimo sa A. Konstruišimo krug l' sa središtem N koji sadrži tačku S. Presečne tačke krugova l i l' označimo sa B i C. Ako važi raspored $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Tačke A, B i C pripadaju krugu l, pa je njegovo središte (tačka O) zaista središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Na osnovu konstrukcije, važi $NB \cong NC$, pa je $\angle BAN \cong CAN$, tj. poluprava AN je bisektrisa ugla $\angle BAC$, a tačka N je presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A i opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Tačka N je, na osnovu konstrukcije, središte duži SS_a, pa ako važi $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, važi i $\mathcal{B}(A, S, N, S_a)$. Tačke S, S_a, B i C pripadaju krugu l' sa središtem N, pa važi $NB \cong NS \cong NS_a \cong NC$. Iz $\mathcal{B}(A, S, N, S_a)$ i $NB \cong NS \cong NS_a \cong NC$, na osnovu leme **4**, sledi da su tačke S i S_a zaista središta upisanog i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A trougla $\triangle ABC$.

Diskusija: Rešenje postoji ako i samo ako krug l seče pravu SS_a u tački A (različitoj od N) takvoj da važi $\mathcal{B}(A, S, S_a)$. U tom slučaju postoje dva podudarna rešenja zadatka (sa simetrično označenim temenima B i C).



Slika 39



Slika 40

40. *Lema 1:* Ako krug čije je središte tačka O dodiruje krake ugla $\angle XYZ$ u tačkama X i Z, onda važi $YX \cong YZ$.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **1** u rešenju **12**. □

Lema 2: Ako su P_b i P_c tačke dodira prave BC i spolja upisanih krugova trougla $\triangle ABC$ koji odgovaraju tačkama B i C, onda je $P_cP_b = AB + AC$.

Dokaz leme 2: Neka su a, b i c ivice BC, AC i AB i neka je $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Neka su Q_b i R_b tačke u kojima prave AC i AB dodiruju spolja upisani krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu B. Na osnovu leme **1**, važi $BP_b \cong BR_b$, $AR_b \cong AQ_b$ i $CP_b \cong CQ_b$. Važi i $\mathcal{B}(B, A, R_b)$, $\mathcal{B}(B, C, P_b)$ i $\mathcal{B}(A, Q_b, C)$, odakle sledi

$$BP_b = \frac{1}{2}(BP_b+BR_b) = \frac{1}{2}(BC+CP_b+BA+AR_b) = \frac{1}{2}(BC+CQ_b+AQ_b+BA) =$$

$$= \frac{1}{2}(BC + AC + BA) = \frac{1}{2}(a + b + c) = p\,.$$

Analogno se dokazuje da važi i $CP_c = p$. Iz $CP_c = p$, $BC = a$ i $\mathcal{B}(P_c, B, C)$ sledi $BP_c = CP_c - BC = p - a$. Iz $BP_c = p - a$, $BP_b = p$ i $\mathcal{B}(P_c, B, P_b)$ sledi $P_cP_b = P_cB + BP_b = (p - a) + p = 2p - a = b + c = AB + AC$. (Ako je A_1 središte ivice BC, važi i $P_cA_1 = P_cB + BA_1 = p - a + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b + c)$, pa je tačka A_1 središte i duži P_cP_b.) □

Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija tangente iz tačke P na krug k:
Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **37**. □

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija zajedničke unutrašnje tangente krugova k_1 i k_2:

Neka su r_1 i r_2 poluprečnici, a O_1 i O_2 središta krugova k_1 i k_2.

Ako se krugovi k_1 i k_2 ne seku, konstruišimo krug k_1' sa središtem O_1 i poluprečnikom r_1+r_2. Na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, konstruišimo (jednu) tangentu t_0 iz tačke O_2 na krug k_1'. Konstruišimo pravu p koja sadrži tačku O_2 i normalna je na pravoj t_0 i označimo sa T_2 njenu presečnu tačku sa krugom k_2 koja je sa iste strane prave t_0 kao i tačka O_1. Konstruišimo pravu t koja sadrži tačku T_2 i paralelna je pravoj t_0. Prava t je jedna od dve zajedničke unutrašnje tangente krugova k_1 i k_2 (druga se konstruiše analogno za drugu tangentu iz tačke O_2 na krug k_1').

Ako se krugovi k_1 i k_2 seku, onda ne postoji njihova zajednička unutrašnja tangenta.

Dokaz pomoćne konstrukcije 2:

Ako se krugovi k_1 i k_2 ne seku, rastojanje između pravih t i t_0 jednako je $O_2T_2 = r_2$. Prava t_0 sadrži tačku O_2, pa je rastojanje prave t od tačke O_2 jednako r_2 i prava t dodiruje krug k_2. Prava t_0 je tangenta na krug k_1', pa je njeno rastojenje od tačke O_1 jednako r_1+r_2, odakle sledi da je rastojanje prave t od tačke O_1 jednako $r_1+r_2-r_2=r_1$ (jer su tačka O_1 i prava t sa iste strane prave t_0), pa prava t dodiruje krug k_1. Krugovi k_1 i k_2 su sa raznih strana prave t, pa je ona njihova unutrašnja zajednička tangenta. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka su S_b i S_c središta spolja upisanih krugova k_b i k_c trougla $\triangle ABC$ koji odgovaraju tačkama B i C. Neka su P_b i P_c tačke dodira prave BC i krugova k_b i k_c. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka, pa važi $AB + AC = d$, $S_bP_b = \rho_b$ i $S_cP_c = \rho_c$ (duži S_bP_b i S_cP_c su, redom, poluprečnici krugova k_b i k_c). Na osnovu leme **2**, važi $P_cP_b = AB + AC$, pa, kako je $AB + AC = d$, sledi $P_cP_b = d$. Tačke P_b i P_c su tačke dodira prave BC i krugova k_b i k_c, pa su uglovi $\angle S_cP_cP_b$ i $\angle S_bP_bP_c$ pravi. Krugovi k_b i k_c dodiruju pravu AB i sa raznih su njenih strana. Ovi krugovi dodiruju i pravu AC i sa raznih su njenih strana. Dakle, prave AB i AC su unutrašnje zajedničke tangente krugova k_b i k_c i tačka A je njihova presečna tačka. Presečne tačke ovih tangenti i prave P_cP_b su tačke B i C pri čemu važi $\mathcal{B}(P_c, B, C, P_b)$.

(Pretpostavimo da je $\rho_b > \rho_c$ i primetimo sledeće: ako trougao $\triangle ABC$ zadovoljava zadate uslove i ako je X tačka takva da važi $\mathcal{B}(S_b, X, P_b)$ i $P_bX = \rho_c$, onda važi $P_cP_b = d$, $S_bX = \rho_c - \rho_b$ (jer je $\mathcal{B}(S_b, X, P_b)$, $P_bX = \rho_c$ i $S_bP_b = \rho_b$) i $S_bS_c > \rho_b + \rho_c$ (jer se spolja upisani krugovi trougla ne seku i ne dodiruju). Na osnovu Pitagorine teoreme važi $P_cP_b^2 + XS_b^2 = S_cX^2 + XS_b^2 = S_bS_c^2 > (\rho_b+\rho_c)^2$, odakle sledi $d^2 + (\rho_b - \rho_c)^2 > (\rho_b + \rho_c)^2$ odnosno $d^2 > 4\rho_b\rho_c$. Ista nejednakost može se slično dokazati i za slučajeve $\rho_b < \rho_c$ i $\rho_b = \rho_c$. Dakle, ako postoji rešenje zadatka, onda važi $d^2 > 4\rho_b\rho_c$.)

Konstrukcija: Konstruišimo duž podudarnu datoj duži d i označimo njena temena sa P_c i P_b. Sa iste strane prave P_cP_b konstruišimo poluprave sa temenima P_b i P_c koje su normalne na pravoj P_cP_b. Na tim polupravama konstruišimo redom tačke S_b i S_c takva da je $S_bP_b \cong \rho_b$ i $S_cP_c \cong \rho_c$. Konstruišimo krug k_b čije je središte tačka S_b i koji sadrži tačku P_b. Konstruišimo krug k_c čije je središte tačka S_c i koji sadrži tačku P_c. Ukoliko se krugovi k_b i k_c ne dodiruju i ne seku (u suprotnom ne postoji rešenje zadatka), konstruišimo, na osnovu pomoćne konstrukcije **2**, njihove zajedničke unutrašnje tangente t' i t''. Presečnu tačku pravih t' i t'' označimo sa A. Presečne tačke prave P_bP_c i pravih t' i t'' označimo sa B i C tako da važi $\mathcal{B}(P_c, B, C, P_b)$. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, prave P_cP_b, t' i t'' su tangente krugova k_b i k_c, pa krugovi k_b i k_c dodiruju prave AB, AC, BC. Krug k_b sadrži tačku P_b i važi $\mathcal{B}(B, C, P_b)$, pa su tačka B i krug k_b sa raznih strana prave AC. Pored toga, krug k_b dodiruje prave AB, AC, BC, pa sledi da je krug k_b spolja upisan krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu B. Analogno se dokazuje da je k_c spolja upisan krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu C. Na osnovu konstrukcije je $S_bP_b \cong \rho_b$ i $S_cP_c \cong \rho_c$, pa su poluprečnici krugova k_b i k_c zaista podudarni datim dužima ρ_b i ρ_c.

Tačke P_c i P_b su tačke dodira prave BC i spolja upisanih krugova trougla $\triangle ABC$ k_b i k_c koji odgovaraju tačkama B i C, pa je na osnovu leme **2**, $P_cP_b = AB + AC$. S druge strane, na osnovu konstrukcije važi $P_cP_b \cong d$, pa sledi da je zbir stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$ jednak datoj duži d, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Rešenje zadatka postoji ako se krugovi k_b i k_c opisani u konstrukciji ne seku i ne dodiruju. Krugovi k_b i k_c se ne seku i ne dodiruju ako je ispunjen uslov $d^2 > 4\rho_b\rho_c$ i, u tom slučaju, trougao $\triangle ABC$ konstruisan na opisan način zadovoljava (na osnovu dokaza) uslove zadatka. S druge strane, ukoliko rešenje zadatka postoji, onda važi $d^2 > 4\rho_b\rho_c$. Dakle, rešenje zadatka postoji ako i samo ako važi $d^2 > 4\rho_b\rho_c$ i tada je rešenje jedinstveno (do na podudarnost).

41. *Analiza:* Pretpostavimo da tačke P i Q zadovoljavaju uslove zadatka. Neka je P' proizvoljna tačka otvorene poluprave AC. Neka je Q' tačka prave AQ, takva da važi $PQ \| P'Q'$ i neka je B' tačka prave AB takva da važi $QB \| Q'B'$ (tačke B, Q i Q' nalaze se sa iste strane prave AC). Na osnovu Talesove teoreme važi $\frac{AP}{AP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QB}{Q'B'}$, pa iz $AP \cong PQ \cong QB$ sledi $A'P' \cong P'Q' \cong Q'B'$. Ako je Q'' tačka prave BC takva da je $Q'Q'' \| B'B$, onda je četvorougao $B'BQ''Q'$ paralelogram i važi $BQ'' \cong B'Q'$. Iz $BQ'' \cong B'Q'$ i $AP' \cong B'Q'$ sledi $BQ'' \cong AP'$. Za tačku Q' važi $AP' \cong P'Q'$, pa je ona presečna tačka kruga sa središtem P' koji sadrži tačku A i prave koja sadrži tačku Q'' i paralelna je pravoj AB. Tačka Q je presečna tačka prave AQ' i prave BC. Tačka P je tačka prave AC takva da je $PQ \| P'Q'$.

Konstrukcija: Označimo sa P' prizvoljnu tačku otvorene poluprave AC. Označimo sa Q'' tačku poluprave BC takvu da je $BQ'' \cong AP'$. Konstruišimo krug k sa središtem P' koji sadrži tačku A. Konstruišimo pravu q koja sadrži tačku Q'' i paralelna je pravoj AB. Presečnu tačku kruga k i prave p (koja je sa iste strane prave AC kao i tačka B) označimo sa Q'. Presečnu tačku prave AQ' i prave BC označimo sa Q. Označimo sa P presečnu tačku prave AC i prave koja sadrži tačku Q i paralelna je pravoj $P'Q'$. Tačke P i Q zadovoljavaju uslove zadatka, tj. važi $AP \cong PQ \cong QB$.

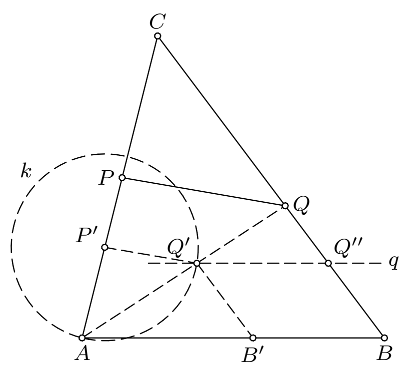
Dokaz: Poluprava AQ' pripada konveksnom uglu $\angle CAB$, pa je tačka Q između tačaka C i B, odakle sledi i da je tačka P između tačaka A i C.

Neka je B' tačka prave AB takva da je $B'Q' \| BQ$. Na osnovu Talesove teoreme važi $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{AQ'}{AQ}$ i $\frac{Q'B'}{QB} = \frac{AQ'}{AQ}$, odakle sledi $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'B'}{QB}$. Na osnovu Talesove teoreme važi i $\frac{AP'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ}$, pa je $\frac{AP'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'B'}{QB}$. Četvorougao $B'BQ''Q'$ je paralelogram (jer je $B'Q' \| BQ''$ i, na osnovu konstrukcije, važi $Q''Q' \| BB'$), pa je $B'Q' \cong BQ''$. Na osnovu konstrukcije je $AP' \cong P'Q'$ i

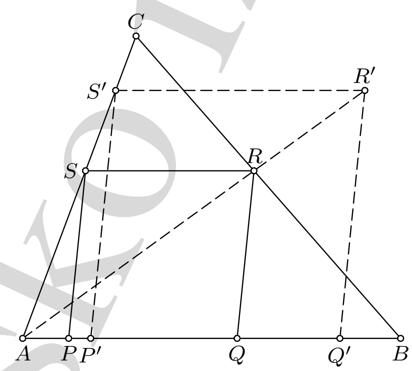
$BQ'' \cong AP'$, pa iz $B'Q' \cong BQ''$ sledi $AP' \cong P'Q' \cong B'Q'$. Iz $\frac{AP'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'B'}{BQ}$ i $AP' \cong P'Q' \cong B'Q'$ sledi $AP \cong PQ \cong BQ$, što znači da tačke P i Q zadovoljavaju uslove zadatka.

Diskusija: Zadatak ima rešenja ako postoji presečna tačku kruga k i prave p koja je sa iste strane prave AC kao i tačka B. Ako je $\angle CAB \geq \frac{\pi}{2}$ ta presečna tačka uvek postoji (tada važi $AC < BC < 2BC$). Ako je $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$ ta presečna tačka postoji ako prava q seče pravu AC u tački P'' takvoj da je $\mathcal{B}(A, P'', A')$, gde je A' simetrična tačka tački A u odnosu na tačku P'. Granični slučaj je kada su tačke A' i P'' identične i tada je $AA' = 2A'B$ i trougao $\triangle AB'A$ je sličan trouglu ABC, pa važi $AC = 2CB$.

Dakle, ako važi $AC < 2CB$ postoji jedinstveno rešenje zadatka, a inače ne postoji nijedno.



Slika 41



Slika 42

42. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija slike tačke A u homotetiji* $\mathcal{H}_{O,-n/m}$, *odnosno u homotetiji* $\mathcal{H}_{O,n/m}$.

Ako su tačke A i O identične, onda je slika tačke A i u homotetiji $\mathcal{H}_{O,n/m}$ i u homotetiji $\mathcal{H}_{O,-n/m}$ ona sama.

Ako tačke A i O nisu identične, neka je M proizvoljna tačka koja ne pripada pravoj OA takva da važi $OM = m$. Neka je N' tačka prave OM takva da su tačke M i N' sa iste strane tačke O i važi $ON' = n$. Neka je N'' tačka prave OM takva da su tačke M i N'' sa raznih strane tačke O i važi $ON'' = n$. Neka je A' presečna tačka prave OA i prave koja sadrži tačku N' i paralelna je pravoj AM. Neka je A'' presečna tačka prave OA i prave koja sadrži tačku N'' i paralelna je pravoj AM. Važi $\mathcal{H}_{O,n/m}(A) = A'$ i $\mathcal{H}_{O,-n/m}(A) = A''$.

Dokaz pomoćne konstrukcije:

Ako su tačke A i O identične, onda je $\mathcal{H}_{O,n/m}(A) = A$ i $\mathcal{H}_{O,-n/m}(A) = A$, na osnovu definicije homotetije.

Ako tačke A i O nisu identične, na osnovu Talesove teoreme sledi $OA' : OA = n : m$. Iz $\neg\mathcal{B}(M, O, N')$ sledi $\neg\mathcal{B}(A, O, A')$, pa na osnovu definicije homotetije sledi $\mathcal{H}_{O,n/m}(A) = A'$. Na osnovu Talesove teoreme sledi $OA'' : OA = n : m$. Iz $\mathcal{B}(M, O, N'')$ sledi $\mathcal{B}(A, O, A'')$, pa, na osnovu definicije homotetije, sledi

$\mathcal{H}_{O,-n/m}(A) = A''$. $\square$

Analiza: Pretpostavimo da romb $PQRS$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je P' proizvoljna tačka poluprave AB i neka je p' poluprava sa temenom P' koja sa polupravom $P'A$ zahvata ugao $2R - \delta$ i sa iste je strane prave AB kao i tačka C. Neka je S' presečna tačka poluprave p' i poluprave AC. Neka je R' tačku koja je sa iste strane prave AC kao i tačka P' i za koju važi $S'R' \| AB$ i $S'R' \cong P'S'$. Neka je Q' tačka takva da je $P'Q' \| S'R'$ i $R'Q' \| S'P'$. Tačka Q' pripada polupravoj AB, četvorougao $P'Q'R'S'$ je romb i njegov unutrašnji ugao $\angle S'P'Q'$ jednak je uglu $\angle SPQ = \delta$. Očigledno, rombovi $P'Q'R'S'$ i $PQRS$ su slični. Neka je $\mathcal{H}_{A,k}$ homotetija sa središtem A, pri čemu je $k = AP/AP'$. U ovoj homotetiji romb $P'Q'R'S'$ preslikava se na romb $PQRS$, a tačka R' u tačku R, pa je R presečna tačka poluprave AR' i ivice BC.

Konstrukcija: Označimo sa P' proizvoljnu tačku poluprave AB. Konstruišimo polupravu p' sa temenom P' i koja sa polupravom $P'A$ zahvata ugao $2R - \delta$. Presečnu tačku poluprave p' i poluprave AC označimo sa S'. Označimo sa R' tačku koja je sa iste strane prave AC kao i tačka P' i za koju važi $S'R' \| AB$ i $S'R' \cong P'S'$. Označimo sa Q' tačku takvu da je $P'Q' \| S'R'$ i $R'Q' \| S'P'$. (Očigledno, tačka Q' pripada polupravoj AB i četvorougao $P'Q'R'S'$ je romb.) Označimo sa R presečnu tačku poluprave AR' i ivice BC. Neka je $\mathcal{H}_{A,k}$ homotetija sa središtem A, pri čemu je $k = AR/AR'$. Na osnovu pomoćne konstrukcije, konstruišimo slike P, Q, R i S tačaka P', Q', R', S' u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$. Četvorugao $PQRS$ je romb koji zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Četvorougao $PQRS$ je zaista romb (jer je $P'Q'R'S'$ romb). Na osnovu konstrukcije, ugao $\angle S'P'Q' = 2R - \angle SPA = 2R - (2R - \delta) = \delta$, pa je i ugao $\angle SPQ$ podudaran datom uglu δ. Teme R, na osnovu konstrukcije, pripada pravoj BC. Tačka S', na osnovu konstrukcije pripada polupravoj AC, pa i tačka S — njena slika u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ — pripada polupravoj AC; štaviše, kako tačka R pripada ivici BC, sledi i da tačka S pripada ivici AC. Analogno se dokazuje da tačke P i Q pripadaju ivici AB, pa romb $PQRS$ zaista zadovoljava uslove zadatka.

Diskusija: Ako je $\delta \geq \angle CAB$, rešenje postoji i jedinstveno je. U suprotnom, rešenje ne postoji.

43. *Lema:* Neka su a_1, ρ_1 i r_1 ivica B_1C_1, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle A_1B_1C_1$. Neka su a_2, ρ_2 i r_2 ivica B_2C_2, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle A_2B_2C_2$. Ako su trouglovi $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ slični (pri čemu tačkama A_1, B_1, C_1 odgovaraju redom tačke A_2, B_2 i C_2) onda važi $a_1 : a_2 = \rho_1 : \rho_2 = r_1 : r_2$.

Dokaz leme:

I način:

Trouglovi $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ su slični, pa postoji transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ kojom se prvi preslikava na drugi i važi $kB_1C_1 = B_2C_2$ tj. $ka_1 = a_2$ (gde je k koeficijent sličnosti). Tom transformacijom se upisani i opisani krug prvog trougla preslikavaju na upisani i opisani krug drugog, odakle sledi $k\rho_1 = \rho_2$ i $kr_1 = r_2$, pa je $a_1 : a_2 = \rho_1 : \rho_2 = r_1 : r_2 = 1 : k$, što je i trebalo dokazati.

II način:

Trouglovi $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ su slični, pa su njihovi odgovarajući uglovi podudarni (**T27.7**). Neka je $\alpha = \angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$, $\beta = \angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ i $\gamma = \angle B_1C_1A_1 = \pi - \angle B_1A_1C_1 - \angle A_1B_1C_1 = \pi - \angle B_2A_2C_2 - \angle A_2B_2C_2 = \angle B_2C_2A_2$. Neka su O_1 i S_1 središta opisanog i upisanog kruga trougla $\triangle A_1B_1C_1$, a O_2 i S_2 središta opisanog i upisanog kruga trougla $\triangle A_2B_2C_2$.

Ako je ugao α oštar, onda su tačke O_1 i A_1 sa iste strane prave B_1C_1, pa je, na osnovu teoreme **28.1**, $\angle B_1O_1C_1 = 2\alpha$. Trougao $\triangle C_1O_1B_1$ je jednakokraki (jer je $B_1O_1 = C_1O_1 = r_1$), pa je $\angle O_1B_1C_1 = \angle B_1C_1O_1 = (\pi - 2\alpha)/2$. Analogno se dokazuje da važi $\angle B_2O_2C_2 = 2\alpha$ i $\angle O_2B_2C_2 = \angle B_2C_2O_2 = (\pi - 2\alpha)/2$, pa su trouglovi $\triangle C_1O_1B_1$ i $\triangle C_2O_2B_2$ slični i važi $B_1C_1 : B_2C_2 = B_1O_1 : B_2O_2$, tj. $a_1 : a_2 = r_1 : r_2$.

Ako je ugao α prav, onda je tačka O_1 središte duži B_1C_1 tj. $2r_1 = a_1$. Analogno se dokazuje i $2r_2 = a_2$, pa sledi $a_1 : a_2 = r_1 : r_2$.

Ako je ugao α tup, onda su tačke O_1 i A_1 sa raznih strana prave B_1C_1, pa je, na osnovu teoreme **28.1**, $\angle B_1O_1C_1 = \pi - 2\alpha$. Trougao $\triangle C_1O_1B_1$ je jednakokraki (jer je $B_1O_1 = C_1O_1 = r_1$), pa je $\angle O_1B_1C_1 = \angle B_1C_1O_1 = \alpha$. Analogno se dokazuje da važi $\angle B_2O_2C_2 = \pi - 2\alpha$ i $\angle O_2B_2C_2 = \angle B_2C_2O_2 = \alpha$, pa su trouglovi $\triangle C_1O_1B_1$ i $\triangle C_2O_2B_2$ slični i važi $B_1C_1 : B_2C_2 = B_1O_1 : B_2O_2$, tj. $a_1 : a_2 = r_1 : r_2$.

Neka je P_1 tačka dodira upisanog kruga trougla $\triangle A_1B_1C_1$ i prave B_1C_1, a P_2 tačka dodira upisanog kruga trougla $\triangle A_2B_2C_2$ i prave B_2C_2. Važi $\angle S_1B_1C_1 = \beta/2 = \angle S_2B_2C_2$ i $\angle S_1C_1B_1 = \gamma/2 = \angle S_2C_2B_2$, pa su trouglovi $\triangle S_1B_1C_1$ i $\triangle S_2B_2C_2$ slični i važi $S_1B_1 : S_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2 = a_1 : a_2$. Važi $\angle S_1B_1P_1 = \beta/2 = \angle S_2B_2P_2$ i $\angle S_1P_1B_1 = \pi/2 = \angle S_2P_2B_2$, pa su trouglovi $\triangle S_1B_1P_1$ i $\triangle S_2B_2P_2$ slični i važi $S_1B_1 : S_2B_2 = S_1P_1 : S_2P_2 = \rho_1 : \rho_2$, odakle sledi $a_1 : a_2 = S_1B_1 : S_2B_2 = \rho_1 : \rho_2$,

Dakle, važi $a_1 : a_2 = r_1 : r_2$ i $a_1 : a_2 = \rho_1 : \rho_2$, odakle sledi $a_1 : a_2 = \rho_1 : \rho_2 = r_1 : r_2$, što je i trebalo dokazati. □

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija slike tačke A u homotetiji $\mathcal{H}_{O,n/m}$.

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **42**. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka, tj. pretpostavimo da je zbir poluprečnika ρ upisanog kruga i poluprečnika r opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ jednak datoj duži d. Neka su a, ρ i r dužina ivice BC, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Neka je $\triangle A'B'C'$ proizvoljan trougao sličan trouglu $\triangle ABC$ (takav da je $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ i $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$) i neka su a', ρ' i r' dužina ivice $B'C'$, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle A'B'C'$.

Iz $\phi = \angle BAC + \angle ABC = \angle B'A'C' + \angle A'B'C' = \pi - \angle B'C'A'$, sledi $\angle B'C'A' = \pi - \phi$. Analogno, važi $\angle A'B'C' = \pi - \psi$.

Na osnovu leme, važi $a : a' = \rho : \rho' = r : r'$, pa je $\rho = \frac{a}{a'}\rho'$ i $r = \frac{a}{a'}r'$, odakle sledi $d = \rho + r = \frac{a}{a'}(\rho' + r')$ i $a = \frac{d}{\rho' + r'}a'$.

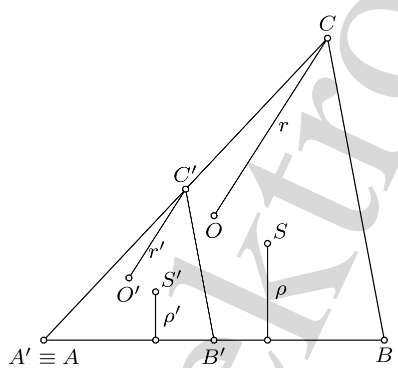
Konstrukcija: Konstruišimo proizvoljnu duž $B'C'$. Konstruišimo polupravu p' koja sa polupravom $B'C'$ zahvata ugao $\pi - \psi$. Sa iste strane prave $B'C'$ konstruišimo polupravu q' koja sa polupravom $C'B'$ zahvata ugao $\pi - \phi$. Presečnu tačku polupravih p' i q' označimo sa A'. Konstruišimo središte O' opisanog i središte S' upisanog kruga $\triangle A'B'C'$. Neka su a', ρ' i r' dužina ivice $B'C'$, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle A'B'C'$. Neka je $\mathcal{H}$ homotetija $\mathcal{H}_{A',d/(\rho'+r')}$. Korišćenjem pomoćne konstrukcije, konstruišimo slike A, B i C tačaka A', B' i C' u homotetiji $\mathcal{H}$ (tačke A i A' su identične). Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, važi $\angle A'B'C' = \pi - \psi$ i $\angle B'C'A' = \pi - \phi$. Na osnovu konstrukcije, tačke A, B, C su slike tačaka A', B', C' u homotetiji, pa su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slični i važi $\angle ABC = \angle A'B'C'$ i $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Odatle sledi $\angle ABC = \pi - \psi$, pa je $\angle CAB + \angle BCA = \pi - \angle ABC = \psi$ (tj. zbir unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$ kod temena A i C jednak je datom uglu ψ). Analogno se dokazuje $\angle BAC + \angle ABC = \phi$ (tj. zbir unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$ kod temena A i B jednak je datom uglu ϕ).

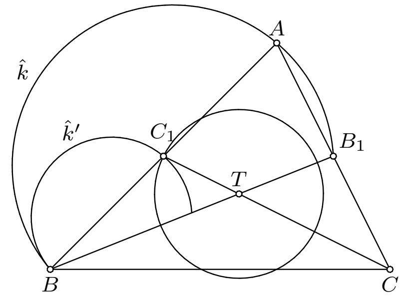
Neka su a, ρ i r dužina ivice BC, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Na osnovu leme, važi $a : a' = \rho : \rho' = r : r'$, pa je $\rho = \frac{a}{a'}\rho'$ i $r = \frac{a}{a'}r'$, odakle sledi $\rho + r = \frac{a}{a'}(\rho' + r')$ i $a = \frac{\rho+r}{\rho'+r'}a'$. Na osnovu konstrukcije je $a = \frac{d}{\rho'+r'}a'$ (jer je duž BC slika duži $B'C'$ u homotetiji $\mathcal{H}_{A',d/(\rho'+r')}$), pa je $\frac{\rho+r}{\rho'+r'} = \frac{d}{\rho'+r'}$ odakle sledi $\rho + r = d$, tj. zbir poluprečnika opisanog i upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ jednak je datoj duži d, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Da bi postojalo rešenje zadatka, tj. da bi postojao trougao $\triangle ABC$ koji zadovoljavao uslove zadatka, njegovi unutrašnji uglovi $\angle ABC$, $\angle BCA$ i $\angle ACB$ moraju da budu redom jednaki $\pi - \psi$, $\pi - \phi$, $\pi - (\pi - \phi) + (\pi - \psi)$, pa moraju da budu zadovoljeni uslovi $0 < \pi - \phi < \pi$, $0 < \pi - \psi < \pi$ i $0 < \pi - (\pi - \phi) + (\pi - \psi) < \pi$, tj. uslovi $0 < \phi < \pi$, $0 < \psi < \pi$, $\pi < \phi + \psi$. Ako su zadovoljeni ti uslovi, rešenje zadatka postoji bez obzira na zadatu duž d.

Dakle, rešenje zadatka postoji ako i samo ako važe uslovi $0 < \phi < \pi$, $0 < \psi < \pi$, $\pi < \phi + \psi$ i tada je rešenje jedinstveno (do na podudarnost).



Slika 43



Slika 44

44. *Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):*

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35**. □

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija slike tačke A u homotetiji $\mathcal{H}_{O,-n/m}$, *odnosno u homotetiji* $\mathcal{H}_{O,n/m}$:

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **42**. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je lûk $\hat{k}$ skup tačaka X takvih da je $\angle BXB_1 = \alpha$. Tačka A pripada tom lûku i C_1 je središte duži BA, pa tačka C_1 pripada lûku $\hat{k}'$, gde je $\hat{k}'$ slika lûka $\hat{k}$ u homotetiji $\mathcal{H}_{B,1/2}$. Neka je T težište trougla $\triangle ABC$ (tačka T je, dakle, tačka duži BB_1 takva da je $TB : TB_1 = 2 : 1$). Na osnovu svojstava težišta sledi da tačka C_1 pripada krugu k sa središtem T i poluprečnikom $t_c/3$. Dakle, tačka C_1 je presečna tačka lûka $\hat{k}'$ i kruga $k(T, t_c/3)$. Tačka A simetrična je tački B u odnosu na tačku C_1. Tačka C simetrična je tački A u odnosu na tačku B_1.

Konstrukcija: Konstruišimo duž BB_1 podudarnu datoj duži t_b. Konstruišimo tačku T duži BB_1, takvu da važi $BT : TB_1 = 2 : 1$. Konstruišimo, na osnovu prve pomoćne konstrukcije, skup tačaka X takvih da je $\angle BXB_1 = \alpha$. Neka je to lûk $\hat{k}$. Konstruišimo sliku $\hat{k}'$ lûka $\hat{k}$ u homotetiji $\mathcal{H}_{B,1/2}$ (koristeći drugu pomoćnu konstrukciju). Konstruišimo krug k sa središtem T i poluprečnikom $t_c/3$. Označimo sa C_1 presečnu tačku lûka $\hat{k}'$ i kruga k. Označimo sa A tačku simetričnu tački B u odnosu na tačku C_1. Označimo sa C tačku simetričnu tački A u odnosu na tačku B_1. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, tačka B_1 je središte ivice AC, pa je BB_1 težišna duž koja odgovara temenu B. Na osnovu konstrukcije težišna duž BB_1 je zaista podudarna datoj duži t_b.

Na osnovu konstrukcije tačka C_1 je središte ivice AB, pa je CC_1 težišna duž koja odgovara temenu C i ona sadrži težište trougla $\triangle ABC$. Na osnovu konstrukcije, tačka T deli težišnu duž BB_1 u odnosu $2 : 1$, pa je ona težište trougla $\triangle ABC$. Dakle, duž CC_1 sadrži tačku T. Težište T deli duž CC_1 u odnosu $2 : 1$ ($CT : TC_1 = 2 : 1$), a kako, na osnovu konstrukcije, tačka C_1 pripada krugu čije je središte tačka T, a poluprečnik $t_c/3$, sledi da je $CC_1 = 3TC_1 = t_c$. Dakle, duž CC_1 je težišna duž i podudarna je datoj duži t_c.

Tačka C_1 je središte duži AB, pa se u homotetiji $\mathcal{H}_{B,2}$, preslikava u tačku A. Na osnovu konstrukcije, lûk $\hat{k}$ preslikava se u homotetiji $\mathcal{H}_{B,1/2}$ na lûk $\hat{k}'$, pa sledi da se u homotetiji $\mathcal{H}_{B,2}$ lûk $\hat{k}'$ preslikava na lûk $\hat{k}$. Kako tačka C_1 pripada lûku $\hat{k}'$, sledi da njena slika u homotetiji $\mathcal{H}_{B,2}$, pripada slici lûka $\hat{k}'$ u toj homotetiji, pa sledi da tačka A pripada lûku $\hat{k}$. Na osnovu konstrukcije, lûk $\hat{k}$ je skup tačaka X za koje je $\angle BXB_1 = \alpha$, odakle sledi $\angle BAB_1 = \alpha$ i, kako je B_1 pripada duži AC, $\angle BAC = \alpha$.

Diskusija: Rešenje postoji ako postoji presek lûka $\hat{k}'$ i kruga sa središtem T i poulprečnikom t_c i tada je rešenje jedinstveno (odnosno sva rešenja su podudarna).

45. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija slike tačke A u homotetiji* $\mathcal{H}_{O,-n/m}$, *odnosno u homotetiji* $\mathcal{H}_{O,n/m}$:

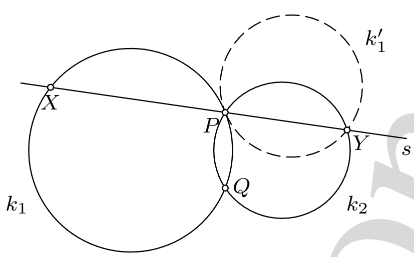
Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **42.** □

Analiza: Pretpostavimo da prava s zadovoljava uslove zadatka. Ako je $\mathcal{B}(X,P,Y)$, neka je $\mathcal{H}$ homotetija $\mathcal{H}_{P,-n/m}$, a u suprotnom, neka je $\mathcal{H}$ homotetija $\mathcal{H}_{P,n/m}$. Važi $PX : PY = m : n$, pa je $\mathcal{H}(X) = Y$. Kako tačka X pripada krugu k_1, sledi da njena slika pripada slici kruga k_1 u homotetiji $\mathcal{H}$, tj. tačka Y pripada krugu $k_1' = \mathcal{H}(k_1)$. Dakle, tačka Y je presečna tačka krugova k_1' i k_2 (različita od P). Prava s sadrži tačke Y i P.

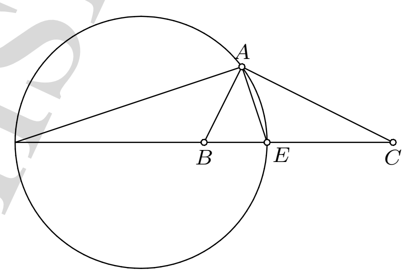
Konstrukcija: Konstruišimo (na osnovu pomoćne konstrukcije) sliku kruga k_1 u homotetiji $\mathcal{H}$ (gde je $\mathcal{H}$ homotetija $\mathcal{H}_{P,-n/m}$ ili $\mathcal{H}_{P,n/m}$). Presečnu tačku krugova k_1' i k_2 (različitu od P) označimo sa Y. Prava s određena tačkama Y i P zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Neka je X presečna tačka prave s i kruga k_1 (različita od tačke P). U homotetiji $\mathcal{H}$ se krug k_1 preslikava na krug k_1' (na osnovu konstrukcije) i prava s se preslikava na sebe (jer sadrži središte homotetije — tačku P). Dakle, presečna tačka kruga k_1 i prave s različita od tačke P preslikava u presečnu tačku kruga k_1' i prave s, tj. $\mathcal{H}(X) = Y$. Odatle sledi $PX : PY = m : n$. Tačka Y na osnovu konstrukcije pripada krugu k_2, pa konstruisana prava s zadovoljava uslove zadatka.

Diskusija: Krugovi k_1 i k_2 seku se i imaju zajedničku tačku P, pa se seku i krugovi k_1' i k_2 (ne dodiruju se u tački P). Za obe homotetije $\mathcal{H}_{P,-n/m}$ i $\mathcal{H}_{P,n/m}$ postoji po jedno rešenje zadatka. Zadatak, dakle, uvek ima tačno dva rešenja.



Slika 45



Slika 46

46. *Lema:* Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seče naspramnu ivicu BC u tački E, onda važi: $BA : CA = BE : CE$.

Dokaz leme: Videti dokaz leme u rešenju **14.** $\square$

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija skupa tačaka X za koje je $AX : BX = m : n$, gde su A i B date različite tačke, a m i n date duži:

Razlikujemo tri slučaja:

$m = n$**:** Konstruišimo medijatrisu s duži AB. Ona je traženi skup tačaka.

$m > n$**:** Neka je p proizvoljna prava sa temenom A i neka su X, Y i Z tačke te poluprave takve da važi $AX = m$, $\mathcal{B}(A,Y,X,Z)$, $XY = n$, $XZ = n$.

Označimo sa P presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BZ. Označimo sa Q presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BY. Konstruišimo krug k čiji je prečnik duž PQ. Krug k je traženi skup tačaka (zovemo ga *Apolonijev krug*). (Primetimo da u ovom slučaju važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $\mathcal{H}(A,B;P,Q)$.)

$m < n$: Konstrukcija je analogna konstrukciji u drugom slučaju. (U ovom slučaju važi $\mathcal{B}(Q,A,P,B)$ i $\mathcal{H}(A,B;P,Q)$.)

Dokaz pomoćne konstrukcije:

$m = n$: Tačka X pripada medijatrisi s duži AB ako i samo ako važi $AX : BX = 1 = m : n$, pa je medijatrisa duži AB zaista traženi skup tačaka.

$m > n$: Na osnovu Talesove teoreme važi $AP : BP = AX : XZ = m : n$ i $AQ : BQ = AX : XY = m : n$, pa tačke P i Q pripadaju traženom skupu. Dokažimo da je krug k čiji je prečnik duž PQ zaista traženi skup tačaka.

Neka je M proizvoljna tačka kruga k koja ne pripada pravoj AB. Neka je R presečna tačka prave MQ i prave koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj AM. Neka je S presečna tačka pravih BR i MP. Važi $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$, pa, na osnovu Talesove teoreme, sledi $\frac{AM}{BS} = \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BR}$, odnosno $BS = BR$, tj. tačka B je središte duži SR. Tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž PQ, pa je ugao $\angle PMQ$ prav. Tačke R i S pripadaju polupravama MQ i MP, pa je i ugao $\angle SMR$ prav, tj. tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž SR, a središte tačka B. Dakle, važi $MB = BS = BR$, pa je, na osnovu Talesove teoreme, $\frac{AM}{BM} = \frac{AM}{BR} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$, što znači da tačka M pripada traženom skupu tačaka.

Neka je M proizvoljna tačka za koju važi $AM : BM = m : n$ i ne pripada pravoj AB. Neka je R presečna tačka prave MQ i prave koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj AM. Neka je S presečna tačka pravih BR i MP. Tačka M pripada traženom skupu tačaka, pa iz $\frac{AM}{BM} = \frac{m}{n} = \frac{AP}{BP}$, na osnovu Talesove teoreme sledi $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BS}$, odakle je $BM = BS$. Analogno važi i $\frac{AM}{BM} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BR}$, odakle je $BM = BR$. Iz $BM = BS = BR$ sledi da tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž SR, pa je ugao $\angle SMR$ prav. Tačke R i S pripadaju polupravama MQ i MP, pa je i ugao $\angle PMQ$ prav, tj. tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž PQ, tj. tačka M pripada krugu k.

Dakle, za tačku M važi $AM : BM = m : n$ ako i samo ako tačka M pripada krugu k (Apolonijevom krugu), što je i trebalo dokazati.

$m < n$: Dokaz za ovaj slučaj analogan je dokazu za slučaj $m > n$.

□

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Kako je $\delta = \angle ABC - \angle ACB > 0$, sledi da je $AC > AB$. Neka je E tačka preseka bisektrise unutrašnjeg ugla trougla $\triangle BAC$ i ivice BC. Tačke A i E pripadaju skupu tačaka za koje je odnos rastojanja od tačaka B i C jednak $m : n$. Važi $\angle BEA = \pi - \frac{1}{2}\angle BAC - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\delta$.

Konstrukcija: Konstruišimo duž podudarnu datoj duži a i označimo njena temena sa B i C. Konstruišimo, na osnovu pomoćne konstrukcije, skup tačaka za koje je odnos rastojanja od tačaka B i C jednak odnosu $m : n$. Označimo sa E presek kruga k i duži BC. Konstruišimo polupravu l sa temenom E koja sa polupravom EB zahvata ugao $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\delta$. Presek poluprave l i kruga k označimo sa A. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Ivica BC je, na osnovu konstrukcije, zaista podudarna duži a. Na osnovu konstrukcije, tačka A pripada skupu tačaka za koje je odnos rastojanja od tačaka B i C jednak odnosu $m : n$, pa i za tačku A važi $AB : AC = m : n$. Za tačku E važi $\mathcal{B}(B, E, C)$ i $EB : EC = m : n = AB : AC$. Postoji tačno jedna tačka X za koju važi $\mathcal{B}(B, X, C)$ i $XB : XC = AB : AC$, a na osnovu leme to važi za presečnu tačku bisektrise unutrašnjeg ugla trougla $\triangle BAC$ i ivice BC. Dakle, tačka E je presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla trougla $\triangle BAC$ i ivice BC. Za tačku E onda važi: $\angle BEA = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Na osnovu konstrukcije je $\angle BEA = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\delta$, odakle sledi $\angle ABC - \angle ACB = \delta$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ako je $m < n$ i $\delta < \pi$ postoje dva (podudarna) rešenja (za dva moguća izbora poluprave l). U suprotnom, rešenje ne postoji (podrazumeva se da je $\delta > 0$).

47. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija skupa tačaka X za koje je $AX : BX = m : n$, gde su A i B date tačke, a m i n date duži:*

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **46**. □

Analiza: Pretpostavimo da tetivni četvorougao $ABCD$ zadovoljava uslove zadatka, tj. pretpostavimo da važi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ i $DA = d$ gde su a, b, c i d date duži.

Neka je C_1 tačka poluprave BC takva da važi $BC_1 = a$ i neka je D_1 presečna tačka prave BD i prave koja sadrži tačku C_1 i paralelna je pravoj CD. Iz $\angle BCD \cong \angle BC_1D_1$ i $\angle DBC \cong \angle D_1BC_1$, sledi da su trouglovi $\triangle BCD$ i $\triangle BC_1D_1$ slični, pa važi $BC : BC_1 = CD : C_1D_1$, odnosno $b : a = c : C_1D_1$, tj. $C_1D_1 = c\frac{a}{b}$. Neka je D_2 tačka takva da važi $\mathcal{B}(D, A, D_2)$ i $AD_2 = C_1D_1 = c\frac{a}{b}$. Četvorougao $ABCD$ je tetivan, pa je $\angle BAD + \angle BCD = \pi$, odakle sledi $\angle D_2AB = \pi - \angle BAD = \angle BCD = \angle BC_1D_1$. Iz $\angle D_2AB \cong \angle BC_1D_1$, $AD_2 \cong C_1D_1$ i $BA \cong BC_1$ sledi da su trouglovi $\triangle BAD_2$ i $\triangle BC_1D_1$ podudarni i $BD_2 \cong BD_1$. Važi

$$\frac{BD_2}{BD} = \frac{BD_1}{BD} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{a}{b} \ .$$

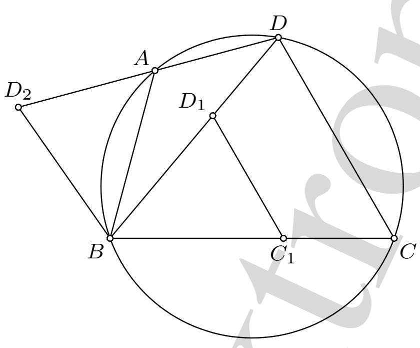
Dakle, tačka B pripada skupu tačaka za koje je odnos rastojanja od tačaka D_2 i D jednak odnosu dužina a i b (taj skup je prava ako je $a = b$ i (Apolonijev) krug u slučaju $a \neq b$). Tačka B je, dakle, presečna tačka tog skupa tačaka i kruga sa središtem A i poluprečnikom a. Tačka C je presečna tačka kruga sa središtem D i poluprečnikom c i kruga sa središtem B i poluprečnikom b.

Konstrukcija: Konstruišimo duž podudarnu datoj duži d i označimo njena temena sa A i D. Konstruišimo tačku D_2 takvu da važi $\mathcal{B}(D, A, D_2)$ i $AD_2 = c\frac{a}{b}$. Konstruišimo, na osnovu opisa pomoćne konstrukcije, skup tačaka za koje je odnos rastojanja od tačaka D_2 i D jednak odnosu dužina a i b (taj skup je prava ako je $a = b$ i (Apolonijev) krug ako je slučaju $a \neq b$). Označimo sa B presečnu tačka tog skupa i kruga sa središtem A i poluprečnikom a. Označimo sa C presečnu tačku kruga sa središtem D i poluprečnikom c i kruga sa središtem B i poluprečnikom b. Četvorougao $ABCD$ zadovoljava uslove zadatka.

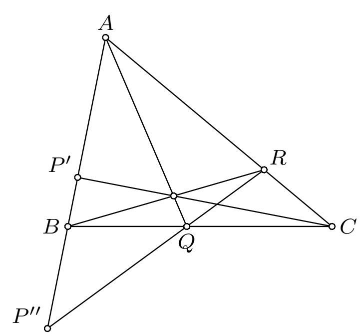
Dokaz: Na osnovu konstrukcije važi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ i $DA = d$. Potrebno je još dokazati da je četvorougao $ABCD$ tetivan.

Neka je D_1 tačka poluprave BD takva da je $BD_1 = BD_2$ i neka je C_1 tačka poluprave BC takva da je $BC_1 = a$. Iz $\frac{BD_1}{BD} = \frac{BD_2}{BD} = \frac{a}{b}$ i $\frac{BC_1}{BC} = \frac{a}{b}$ sledi $\frac{BD_1}{BD} = \frac{BC_1}{BC}$, pa su trouglovi $\triangle BC_1D_1$ i $\triangle BCD$ slični (na osnovu teoreme **27.7(*i*)**) i važi $\angle BC_1D_1 \cong \angle BCD$ i $BC : BC_1 = CD : C_1D_1$, odnosno $b : a = c : C_1D_1$, tj. $C_1D_1 = c\frac{a}{b}$. Na osnovu konstrukcije je $AD_2 = c\frac{a}{b}$, pa važi $C_1D_1 = AD_2$. Iz $C_1D_1 = AD_2$, $BC_1 = a = BA$, $BD_1 = BD_2$ sledi da su trouglovi $\triangle BC_1D_1$ i $\triangle BAD_2$ podudarni odakle sledi $\angle BC_1D_1 \cong \angle BAD_2$. Iz $\angle BC_1D_1 \cong \angle BCD$ i $\angle BC_1D_1 \cong \angle BAD_2$, pa je $\angle BCD = \angle BAD_2$. Važi $\angle BAD_2 + \angle BAD = \pi$, pa, kako je $\angle BCD = \angle BAD_2$, važi i $\angle BCD + \angle BAD = \pi$, što znači da je četvorougao $ABCD$ zaista tetivan.

Diskusija: Rešenje zadatka postoji ako je dužina BD (gde su B i D tačke određene kao u konstrukciji) manja od zbira dužina b i c i ako se konstruisani Apolonijev krug i krug sa središtem A i poluprečnikom A seku. Tada za obe presečne tačke postoje po dva rešenja određena dvema presečnim tačkama kruga sa središtem D i poluprečnikom c i kruga sa središtem B i poluprečnikom b (jedno od rešenja je samopresecajući četvorougao). Inače, rešenje ne postoji.



Slika 47



Slika 48

48. *Čevaova teorema:* Ako su P, Q i R tačke pravih AB, BC i AC, prave AQ, BR i CP su konkurentne ili paralelne ako i samo ako važi

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1 \ .$$

Menelajeva teorema: Ako su P, Q i R tačke pravih AB, BC i AC, one su kolinearne ako i samo ako važi

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1\ .$$

Analiza: Iz $\mathcal{B}(B,Q,C)$, $\mathcal{B}(C,R,A)$, na osnovu Pašove aksiome, sledi da se prave AQ i BR seku u tački S takvoj da je $\mathcal{B}(A,S,Q)$ i $\mathcal{B}(B,S,R)$.

Pretpostavimo da postoji tačka P takva da zadovoljava uslove zadatka i da pripada ivici AB. Iz $BQ\cdot CR\cdot AP=QC\cdot RA\cdot PB$ sledi $\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}\frac{AP}{PB}=1$. Kako je $\mathcal{B}(B,Q,C)$, $\mathcal{B}(C,R,A)$, $\mathcal{B}(A,P,B)$, važi i $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=1$. Prave AQ i BR se seku (dakle, nisu paralelne), pa na osnovu Čevaove teoreme, sledi da se prave BR, AQ i CP seku u jednoj tački, tj. prava CP sadrži tačku S. Dakle, tačka P je presečna tačka prave AB i prave CS.

Pretpostavimo da postoji tačka P takva da zadovoljava uslove zadatka i ne pripada ivici AB. Iz $BQ\cdot CR\cdot AP=QC\cdot RA\cdot PB$ sledi $\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}\frac{AP}{PB}=1$. Kako je $\mathcal{B}(B,Q,C)$, $\mathcal{B}(C,R,A)$, $\neg\mathcal{B}(A,P,B)$, važi i $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-1$, pa, na osnovu Menelajeve teoreme, sledi da su tačke Q, R i P kolinearne. Dakle, tačka P je presečna tačka prave QR i prave AB.

Konstrukcija: Označimo sa S presečnu tačku pravih BR i AQ. Označimo sa P' presečnu tačku pravih CS i AB. Tačka P' zadovoljava uslove zadatka.

Ako prave QR i AB nisu paralelne, označimo sa P'' presečnu tačku pravih CS i AB. Tačka P'' zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu Pašove aksiome, iz $\mathcal{B}(B,Q,C)$ i $\mathcal{B}(C,R,A)$ sledi $\mathcal{B}(A,S,Q)$. Takođe na osnovu Pašove aksiome, iz $\mathcal{B}(B,Q,C)$ i $\mathcal{B}(A,S,Q)$ sledi $\mathcal{B}(A,P',B)$. Na osnovu konstrukcije, prave BR, AQ i CP' seku se u tački S, pa na osnovu Čevaove teoreme sledi $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}}=1$. Odatle sledi $\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}\frac{AP'}{P'B}=1$ i $BQ\cdot CR\cdot AP'=QC\cdot RA\cdot P'B$, što znači da tačka P' zadovoljava uslove zadatka.

Ako prave QR i AB nisu paralelne, iz $\mathcal{B}(B,Q,C)$ i $\mathcal{B}(C,R,A)$, na osnovu Pašove aksiome, sledi $\neg\mathcal{B}(A,P'',B)$. Na osnovu konstrukcije, tačke Q, R i P'' su kolinearne, pa na osnovu Menelajeve teoreme sledi $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\frac{\overrightarrow{AP''}}{\overrightarrow{P''B}}=-1$. Odatle sledi $\frac{BQ}{QC}\frac{CR}{RA}\frac{AP''}{P''B}=1$ i $BQ\cdot CR\cdot AP''=QC\cdot RA\cdot P''B$, što znači da tačka P'' zadovoljava uslove zadatka.

Diskusija: Ako su prave QR i AB paralelne, postoji samo jedno rešenje zadatka (tačka P' koja je između tačaka A i B). Ako prave QR i AB nisu paralelne, postoje tačno dva rešenja: tačka P' koja je između tačaka A i B i tačka P'' koja nije između tačaka A i B (i tada važi $\mathcal{H}(A,B;P',P'')$).

49. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija tačke D takve da važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, gde su A, B i C različite kolinearne tačke i tačka C nije središte duži AB:*

Označimo sa O proizvoljnu tačku koja ne pripada pravoj AB. Konstruišimo pravu a određenu tačkama A i O i pravu b koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj a. Konstruišimo pravu c određenu tačkama O i C i označimo sa E presečnu tačku pravih c i b (ta presečna tačka postoji, jer se prave a i c seku, a prave a i b su paralelne). Konstruišimo i označimo sa F tačku simetričnu tački E u odnosu na tačku B. Konstruišimo pravu d koja je određena tačkama O i F. Ako tačka C nije središte duži AB, onda postoji presečna tačka pravih d i AB i to je tražena tačka D. Ako je tačka C središte duži AB, onda tražena tačka D ne postoji.

Dokaz pomoćne konstrukcije:

Pretrpostavimo da važi $\mathcal{B}(A,C,B)$. Trouglovi $\triangle ACO$ i $\triangle CEB$ su slični, pa važi[3] $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{EB}}$. Tačka F simetrična je tački E u odnosu na tačku B, pa je $\overrightarrow{EB}$=$\overrightarrow{BF}$. Pored toga, trouglovi $\triangle ADO$ i $\triangle BDF$ su slični, pa važi $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BF}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Dakle,

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BF}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}},$$

odnosno $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, tj. važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, što je i trebalo dokazati.

Ispravnost konstrukcije dokazuje se analogno i u slučaju $\neg\mathcal{B}(A,C,B)$. $\square$

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je tačka E presečna tačka bisektrise ugla $\angle BAC$ i ivice BC.

Ako je $AB \cong AC$, tačka E je središte ivice BC i bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A je normalna na ivici BC, pa su rastojanja temena B i C od te bisektrise jednaka BE i CE. Tačka E je središte duži BC, pa je $BE \cong CE$, odakle sledi da su duži m i n podudarne. U ovom slučaju važi $BE = CE = m$ i tačka A pripada pravoj koja je normalna na pravoj BC i pri tome važi $AE \cong l_a$. Navedena svojstva omogućavaju konstrukciju trougla $\triangle ABC$ u slučaju $m = n$.

Ako nije $AB \cong AC$, tačka E nije središte ivice BC i bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A nije normalna na ivici BC (jer bi u protivnom bilo $AB \cong AC$). Neka su P i Q podnožja normala iz tačaka B i C na bisektrisu unutrašnjeg ugla kod temena A. Važi $\angle BPE = \angle CQE = \frac{\pi}{2}$ i $\angle BEP = \angle CEQ$, pa su trouglovi $\triangle BEP$ i $\triangle CEQ$ slični, odakle sledi $PE : EQ = BE : CE = BP : CQ = m : n$. (Primetimo da iz $AB \neq AC$, $BE : EC = AB : AC$ i $BE : CE = m : n$ sledi $m \neq n$.) Iz $\angle BAP \cong \angle CAQ$ i $\angle BPA = \angle CQA = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle BPA$ i $\triangle CAQ$ slični i $PA : AQ = BP : CQ = m : n$. Tačka E pripada duži PQ, a tačka A ne, pa iz $PE : QE = PA : QA$ sledi $\mathcal{H}(P,Q;E,A)$ i

[3] Za različite tačke X i Y i različite tačke U i V koje pripadaju jednoj pravoj, vrednost $\frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{UV}}$ definišemo kao $\frac{XY}{UV}$, ako su orijentisane duži XY i UV istosmerne, odnosno kao $-\frac{XY}{UV}$, ako su orijentisane duži XY i UV suprotnosmerne.

$\mathcal{H}(A, E; P, Q)$. Pored toga, važi $AE = l_a$, $PE : EQ = m : n$, $BP = m$ i $CQ = n$. Navedena svojstva omogućavaju konstrukciju trougla $\triangle ABC$ u slučaju $m \neq n$.

Konstrukcija:

Slučaj $m = n$: Konstruišimo tačke B i C takve da je $BC = 2m$. Središte duži BC označimo sa E. Konstruišimo pravu p normalnu na pravoj BC u tački E. Konstruišimo na pravoj p tačku A takvu da je $AE = l_a$. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Slučaj $m \neq n$: Označimo sa P', E' i Q' tačke takve da je $\mathcal{B}(P', E', Q')$, $P'E' \cong m$ i $E'Q' \cong n$. Na osnovu pomoćne konstrukcije, konstruišimo tačku A takvu da važi $\mathcal{H}(A, E'; P', Q')$. Označimo sa E proizvoljnu tačku koja ne pripada pravoj AE' takvu da važi $AE \cong l_a$. Označimo sa P i Q tačke na pravoj AE takve da je $P'P \parallel Q'Q \parallel E'E$. Konstruišimo normale na pravu AE koje sadrže tačke P i Q i na njima, sa raznih strana prave AE konstruišimo tačke B i C takve da je $BP \cong m$ i $CQ \cong n$. Trougao ABC zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz:

Slučaj $m = n$: Iz $BE \cong CE$, $AE \cong AE$ i $\angle BEA = \angle CEA = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle BEA$ i $\triangle CAE$ podudarni, pa je $\angle BAE = CAE$, tj. poluprava AE je bisektrisa ugla $\angle BAC$. Na osnovu konstrukcije je $AE \cong l_a$. Na osnovu konstrukcije je $BE = CE = m = n$, pa, kako je $BE \perp AE$ i $CE \perp AE$, sledi da su rastojanja tačaka B i C od bisektrise ugla $\angle BAC$ jednaka $BE = m$ i $CE = n$.

Slučaj $m \neq n$:

Na osnovu Talesove teoreme, iz $\frac{P'E'}{E'Q'} = \frac{m}{n}$, sledi $\frac{PE}{EQ} = \frac{m}{n}$.

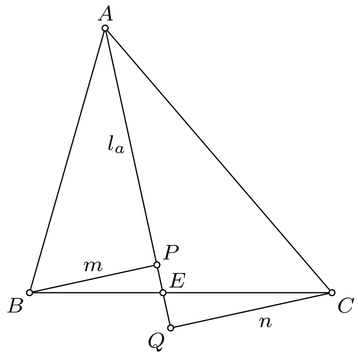
Na osnovu dokaza pomoćne konstrukcije važi $\mathcal{H}(A, E'; P', Q')$ tj. $\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'E'}} = -\frac{\overrightarrow{AQ'}}{\overrightarrow{Q'E'}}$ i $\frac{AP}{AQ} = \frac{EP}{EQ}$. Dakle, $\frac{AP}{AQ} = \frac{EP}{EQ} = \frac{m}{n}$.

Na osnovu konstrukcije je $BP = m$ i $CQ = n$, pa iz $\frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$ i $\angle BPA = \angle CQA = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle ABP$ i $\triangle AQC$ slični, pa su uglovi $\angle BAP$ i $\angle CAQ$ podudarni. Dakle, poluprava AE je zaista bisektrisa ugla $\angle BAC$. Na osnovu konstrukcije je $AE = l_a$. Na osnovu konstrukcije, prave BP i CQ su normalne na pravoj AE i podudarne datim dužima m i n, pa su rastojanja tačaka B i C od prave AE, tj. od bisektrise ugla $\angle BAC$ zaista jednaka merama datih duži m i n, što je i trebalo dokazati.

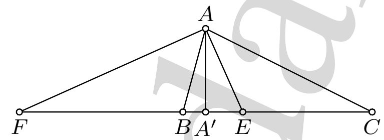
Diskusija:

Slučaj $m = n$: Rešenje uvek postoji i jedinstveno je određeno do na podudarnost.

Slučaj $m \neq n$: Rešenje uvek postoji i jedinstveno je određeno do na podudarnost.



Slika 49



Slika 50

50. *Lema 1:* Ako su A, B, C, D i O kolinearne tačke takve da je O središte duži AB i $\mathcal{B}(A,O,C,B,D)$, onda važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ako i samo ako važi $AO^2 = OC \cdot OD$.

Dokaz leme 1:

Na osnovu pretpostavke je $\mathcal{B}(A,O,C,B,D)$, pa važi:

$$\mathcal{H}(A,B;C,D) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO+OC}{OB-OC} = \frac{AO+OD}{OD-OB} \Leftrightarrow \frac{AO+OC}{OA-OC} = \frac{AO+OD}{OD-OA} \Leftrightarrow$$

$$(AO+OC)(OD-OA) = (AO+OD)(OA-OC) \Leftrightarrow AO^2 = OC \cdot OD$$

□

Lema 2: Neka su A, B, C i D tačke za koje važi $\mathcal{B}(A,C,B,D)$. Neka je k krug čiji je prečnik duž AB i l bilo koji krug koji sadrži tačke C i D. Važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ako i samo ako su krugovi k i l međusobno normalni.

Dokaz leme 2:

Neka je O središte kruga k i O' središte kruga l

Pretpostavimo da važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Neka je T presečna tačka krugova k i l. Tačke A i T pripadaju krugu k, pa važi $OA = OT$. Na osnovu leme **1**, važi $OA^2 = OC \cdot OD$, pa sledi $OT^2 = OC \cdot OD$. Na osnovu svojstava potencije tačke u odnosu na krug (**T28.3**), sledi da je tačka T dodirna tačka kruga l i njegove tangente koja sadrži tačku O. Dakle, važi $\angle OTO' = \frac{\pi}{2}$, pa su krugovi k i l međusobno normalni.

Pretpostavimo da su krugovi k i l međusobno normalni. Neka je T presečna tačka krugova k i l. Prava OT je tangenta na krug l, pa na osnovu svojstava potencije tačke u odnosu na krug, važi $OT^2 = OC \cdot OD$. Tačke A i T pripadaju krugu k, odakle sledi $OA = OT$, pa važi i $OA^2 = OC \cdot OD$. Tačka O pripada tangenti na krug l, pa važi raspored $\mathcal{B}(A,O,C,B,D)$. Na osnovu leme **1**, sledi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. □

Lema 3: Skup tačaka X euklidske ravni takvih da važi $AX : BX = m : n$ (A i B su date različite tačke, a m i n su date duži) je:

- medijatrisa duži AB, ako je $m = n$;
- krug čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m > n$;
- krug čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(Q,A,P,B)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m < n$.

Dokaz leme 3:

$m = n$**:** Tačka X pripada medijatrisi m duži AB ako i samo ako važi $AX : BX = 1 = m : n$, pa je medijatrisa duži AB zaista skup tačaka X takvih da je $AX : BX = m : n$.

$m > n$**:** Dokažimo najpre da postoje tačke P i Q prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$. Neka je p proizvoljna poluprava sa temenom A i neka su X, Y i Z tačke te poluprave takve da važi $AX = m$, $\mathcal{B}(A,Y,X,Z)$, $XY = n$, $XZ = n$. Označimo sa P presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BZ. Označimo sa Q presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BY. Iz $\mathcal{B}(A,Y,X,Z)$ sledi da važi i $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$. Na osnovu Talesove teoreme važi $AP : BP = AX : XZ = m : n$ i $AQ : BQ = AX : AY = m : n$, odakle sledi da tačke P i Q zadovoljavaju uslov $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$.

Dokažimo da je krug k čiji je prečnik duž PQ zaista skup tačaka X za koje važi $AX : BX = m : n$ (taj krug zovemo *Apolonijev krug*).

Neka je M proizvoljna tačka kruga k koja ne pripada pravoj AB. Neka je R presečna tačka prave MQ i prave koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj AM. Neka je S presečna tačka pravih BR i MP. Važi $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$, pa, na osnovu Talesove teoreme, sledi $\frac{AM}{BS} = \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BR}$, odnosno $BS = BR$, tj. tačka B je središte duži SR. Tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž PQ, pa je ugao $\angle PMQ$ prav. Tačke R i S pripadaju polupravama MQ i MP, pa je i ugao $\angle SMR$ prav, tj. tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž SR, a središte tačka B. Dakle, važi $MB = BS = BR$, pa je, na osnovu Talesove teoreme, $\frac{AM}{BM} = \frac{AM}{BR} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$, što znači da tačka M pripada traženom skupu tačaka.

Neka je M proizvoljna tačka za koju važi $AM : BM = m : n$ i ne pripada pravoj AB. Neka je R presečna tačka prave MQ i prave koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj AM. Neka je S presečna tačka pravih BR i MP. Tačka M pripada traženom skupu tačaka, pa iz $\frac{AM}{BM} = \frac{m}{n} = \frac{AP}{BP}$, na osnovu Talesove teoreme sledi $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BS}$, odakle je $BM = BS$. Analogno važi i $\frac{AM}{BM} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BR}$, odakle je $BM = BR$. Iz $BM = BS = BR$ sledi da tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž SR, pa je ugao $\angle SMR$ prav.

Tačke R i S pripadaju polupravama MQ i MP, pa je i ugao $\angle PMQ$ prav, tj. tačka M pripada krugu čiji je prečnik duž PQ, tj. tačka M pripada krugu k.

Dakle, za tačku M važi $AM : BM = m : n$ ako i samo ako tačka M pripada krugu k (Apolonijevom krugu), što je i trebalo dokazati.

$m < n$**:** Dokaz za ovaj slučaj analogan je dokazu za slučaj $m > n$.

□

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija tačaka C i D takvih da važi $CD = a$ i $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, gde su A i B date različite tačke i a je data duž:

Označimo sa O_1 središte duži AB. Konstruišimo krug k_1 čiji je prečnik duž AB. Označimo sa T proizvoljnu njegovu tačku i konstruišimo tangentu t na krug k_1 u tački T. Označimo sa O tačku prave t takvu da je $OT = \frac{a}{2}$. Konstruišimo krug l sa središtem O_1 koji sadrži tačku O. Označimo sa O_2 presečnu tačku prave AB i kruga l. Konstruišimo krug l' čiji je prečnik duž O_1O_2. Označimo sa T' presečnu tačku kruga l' i kruga k_1. Konstruišimo krug k_2 sa središtem O_2 koji sadrži tačku T'. Presečne tačke prave AB i kruga k_2 označimo sa C i D. Važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD = a$.

(Svakoj presečnoj tački kruga l i prave AB odgovara po jedno rešenje zadatka. Za jedno rešenje važi $\mathcal{B}(A, C, B, D)$, a za drugo $\mathcal{B}(D, A, C, B)$ Tačke C i D mogu da budu i suprotno označene, pa ukupno ima četiri rešenja zadatka.)

Dokaz pomoćne konstrukcije:

Tačka T' pripada krugu čiji je prečnik duž O_1O_2, pa važi $\angle O_1T'O_2 = \frac{\pi}{2}$. Tačke O i O_2 pripadaju krugu l, pa je $O_1O \cong O_1O_2$. Tačke T i T' pripadaju krugu k_1, pa je $O_1T \cong O_1T'$. Iz $\angle O_1T'O_2 = \frac{\pi}{2} = \angle O_1TO$, $O_1O \cong O_1O_2$ i $O_1T \cong O_1T'$, sledi da su trouglovi $\triangle O_1OT$ i $\triangle O_1O_2T'$ podudarni i $O_2T' = OT = \frac{a}{2}$, tj. poluprečnik kruga k_2 jednak je $\frac{a}{2}$. Duž CD je prečnik kruga k_2, pa je $CD = a$. Krugovi k_1 i k_2 su međusobno normalni (jer je $O_1T' \perp O_2T'$), pa na osnovu leme **2**, sledi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Dakle, važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD = a$, što je i trebalo dokazati. □

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka je A' podnožje visine koja odgovara temenu A i neka su E i F presečne tačke prave BC i simetrala unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla $\triangle ABC$ kod temena A. Tačka E pripada bisektrisi ugla $\angle BAC$, pa važi $\mathcal{B}(B, E, C)$.

Ako je $AA' \cong AE$, tj. ako je $h_a = l_a$, trougao $\triangle ABC$ je jednakokraki ($AB \cong AC$). Teme A je presečna tačka medijatrise duži BC i prave koja je paralelna pravoj BC i nalazi se na rastojanju $h_a = l_a$ od nje.

Ako nije $AA' \cong AE$, trougao $\triangle AA'E$ je pravougli ($\angle AA'E = \frac{\pi}{2}$), pa važi $AE > AA'$, tj. $l_a > h_a$. Prave AE, AF, AB i AC su harmonijski spregnute (jer su prave AF i AE simetrale uglova koje zahvataju prave AB i AC), pa su harmonijski spregnute i tačke F, E, B i C, tj. $\mathcal{H}(F, E; B, C)$. Pored toga, važi i $BC = a$. Navedena svojstva omogućavaju konstrukciju.

Konstrukcija: Ako je $h_a = l_a$, označimo sa B i C temena duži podudarne datoj duži a. Označimo sa A presečnu tačka medijatrise duži BC i prave koja je paralelna pravoj BC i nalazi se na rastojanju $h_a = l_a$ od nje.

Ako je $l_a > h_a$, označimo sa A i A' temena duži podudarne datoj dužu h_a. Konstruišimo pravu p koja je u tački A' normalna na pravoj AA'. Označimo sa E presečnu tačku prave p i kruga sa središtem A i poluprečnikom podudarnim datoj duži l_a. Konstruišimo pravu q koja je u tački A normalna na pravoj AE. Označimo sa F presečnu tačku pravih p i q. Na osnovu pomoćne konstrukcije, konstruišimo tačke B i C takve da važi $\mathcal{H}(F, E; B, C)$ i $BC = a$ i da je tačka E između tačaka B i C (tada važi raspored $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ ili $\mathcal{B}(F, C, E, B)$). Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Ako je $h_a = l_a$, neka je E središte duži BC. Na osnovu konstrukcije je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki (jer tačka A pripada medijatrisi duži BC). Poluprava AE je bisketrisa ugla $\angle BAC$ i duž AE je visina koja odgovara temenu A. Na osnovu konstrukcije je $AE = h_a = l_a$ i $BC = a$, pa trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Ako je $l_a > h_a$, na osnovu konstrukcije je $AA' \perp p$ i tačke B i C pripadaju pravoj p, pa važi $AA' \perp BC$ i $AA' = h_a$, tj. AA' je visina koja odgovara temenu A i ona je podudarna datoj duži h_a. Na osnovu konstrukcije, ivica BC podudarna je datoj duži A. Na osnovu konstrukcije je $AE = l_a$. Potrebno je još dokazati da je poluprava AE zaista bisektrisa ugla $\angle BAC$. Na osnovu konstrukcije, moguća su dva rešenja: rešenje za koje je $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ i rešenje za koje je $\mathcal{B}(F, C, E, B)$. Dokažimo da je poluprava AE bisektrisa ugla $\angle BAC$ za slučaj $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ (dokaz je analogan i za drugi slučaj). Na osnovu konstrukcije važi $\mathcal{H}(F, E; B, C)$, pa je $\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{BE}} = -\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{EC}}$. Iz $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ sledi $\frac{FB}{BE} = \frac{FC}{EC}$ i $\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{EC}$. Na osnovu leme **3**, skup tačaka X takvih da važi $XB : XC = FB : FC = EB : EC$ (iz $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ sledi $FB > FC$) je krug čiji je prečnik duž FE. Na osnovu konstrukcije, ugao $\angle EAF$ je prav, pa tačka A pripada krugu čiji je prečnik duž FE i za nju, dakle, važi $AB : AC = FB : FC = EB : EC$. Neka je D tačka prave AC takva da je $\mathcal{B}(D, A, C)$ i važi $AD \cong AB$. Važi $AD \cong AB$, pa je trougao $\triangle DBA$ jednakokraki i $\angle DBA = \angle BDA = \frac{1}{2}(\pi - \angle DAB) = \frac{1}{2}\angle BAC$. Iz $AD : AC = AB : AC = ED : EC$, na osnovu Talesove teoreme, sledi da su trouglovi $\triangle BCD$ i $\triangle ECA$ slični i $\angle EAC = \angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$, tj. prava AE je simetrala ugla $\angle BAC$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ako je $l_a < h_a$ rešenje zadatka ne postoji. Ako je $l_a = h_a$ postoji jedinstveno rešenje zadatka. Ako je $l_a > h_a$ postoje dva rešenja zadatka sa simetrično označenim temenima B i C.

51. *Lema 1:* Ako se simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A trougla $\triangle ABC$ i prava BC seku u tački E, a simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A i prava BC u tački F, onda važi $BA : CA = BE : CE = BF : CF$.

Dokaz leme 1: Neka je D tačka prave AC takva da važi $\mathcal{B}(D, A, C)$ i $DA \cong AB$. Trougao $\triangle DBA$ je jednakokraki, pa iz $\angle BDA = \angle DBA$ sledi $\angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}(\pi - \angle DAB) = \frac{1}{2}(\angle BDA + \angle DBA) = \angle BDA$. Dakle, prave DB i AE su paralelne, a trouglovi $\triangle DBC$ i $\triangle AEC$ slični, pa važi $BA : CA = DA : CA = BE : CE$.

Pretpostavimo da je $AC > AB$. Tada važi $\mathcal{B}(F, B, C)$ (ako je $AC < AB$, onda važi $\mathcal{B}(B,C,F)$, a ako je $AC = AB$, onda simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A ne seče pravu BC). Neka je G tačka prave AC takva da važi $\mathcal{B}(A,G,C)$ i $AG \cong AB$. Trougao $\triangle BAG$ je jednakokraki, pa je simetrala ugla $\angle BAG$ (tj. ugla $\angle BAC$) — prava AE normalna na pravoj BG. S druge strane, prave AE i AF su simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla trougla $\triangle ABC$ kod temena A, pa su one međusobno normalne. Iz $BG \perp AE$ i $AF \perp AE$ sledi da su prave AF i BG paralelne, a trouglovi $\triangle AFC$ i $\triangle GBC$ slični, pa važi $BA : CA = GA : CA = BF : CF$. (Tvrđenje se dokazuje analogno za slučaj $AC < AB$.)

Dakle, važi $BA : CA = BE : CE$ i $BA : CA = BF : CF$, pa sledi $BA : CA = BE : CE = BF : CF$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 2: Ako su S i S_a središta upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A i ako je E presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ i prave BC, onda važi $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$.

Dokaz leme 2: Tačke S, E i S_a pripadaju bisektrisi unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i važi $\mathcal{B}(A,S,E,S_a)$. Tačka S pripada bisektrisi ugla $\angle ABE$ (tj. ugla $\angle ABC$), pa je ona presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena B i ivice AE trougla $\triangle ABE$. Analogno, tačka S_a je presečna tačka simetrale spoljašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABE$ i prave AE, pa, na osnovu leme **1**, vazi $AS : SE = AB : BE = AS_a : S_aE$. Pored toga, važi i $\mathcal{B}(A,S,E,S_a)$, pa je $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, tj. $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 3: Neka su S i S_a središta upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A i neka je E presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ i prave BC. Ako je A' podnožje normale iz tačke A na pravoj BC, a $\overline{S}$ i $\overline{S_a}$ podnožja normala iz tačaka S i S_a na pravoj AA', onda važi $\mathcal{H}(A,A';\overline{S},\overline{S_a})$.

Dokaz leme 3: Prave $S\overline{S}$, $E\overline{A'}$ i $S_a\overline{S_a}$ su paralelne, pa su trouglovi $\triangle A\overline{S}S$, $\triangle AA'E$ i $\triangle A\overline{S_a}S_a$ slični, odakle sledi $AS : SE = A\overline{S} : AA'$ i $AS_a : S_aE = A\overline{S_a} : AA'$. Važi $\mathcal{B}(A,S,E,S_a)$ i $\mathcal{B}(A,\overline{S},A',\overline{S_a})$, pa sledi $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = \frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}}$ i $\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}} = \frac{\overrightarrow{A\overline{S_a}}}{\overrightarrow{\overline{S_a}A'}}$. Na osnovu leme **1**, važi $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$, tj. $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, pa sledi $\frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}} = -\frac{\overrightarrow{A\overline{S_a}}}{\overrightarrow{\overline{S_a}A'}}$ tj. $\mathcal{H}(A,A';\overline{S},\overline{S_a})$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 4: Ako krug čije je središte tačka O dodiruje krake ugla $\angle XYZ$ u tačkama X i Z, onda važi $YX \cong YZ$.

Dokaz leme 4: Videti dokaz leme **1** u rešenju **12**. □

Lema 5: Ako je R tačka dodira prave AB i upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, a R_a tačka dodira prave AB i spolja upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A, onda važi $AR = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, $AR_a = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ i $RR_a = BC$.

Dokaz leme 5: Neka su Q i P tačke u kojima prave AC i BC dodiruju upisani krug trougla $\triangle ABC$. Na osnovu leme **4**, važi $AR \cong AQ$, $BR \cong BP$ i

$CQ \cong CP$. Važi i $\mathcal{B}(A,R,B)$, $\mathcal{B}(B,P,C)$ i $\mathcal{B}(A,Q,C)$, odakle sledi

$$AR = \frac{1}{2}(AR + AQ) = \frac{1}{2}(BA - BR + CA - CQ) = \frac{1}{2}(BA - BP + CA - CP) =$$

$$= \frac{1}{2}(BA + AC - (BP + PC)) = \frac{1}{2}(BA + AC - BC).$$

Neka su Q_a i P_a tačke u kojima prave AC i BC dodiruju spolja upisani krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A. Na osnovu leme **4**, važi $AR_a \cong AQ_a$, $BR_a \cong BP_a$ i $CQ_a \cong CP_a$. Važi i $\mathcal{B}(A,B,R_a)$, $\mathcal{B}(B,P_a,C)$ i $\mathcal{B}(A,C,Q_a)$, odakle sledi

$$AR_a = \frac{1}{2}(AR_a + AQ_a) = \frac{1}{2}(AB + BR_a + AC + CQ_a) = \frac{1}{2}(AB + BP_a + AC + CP_a)$$

$$= \frac{1}{2}(AB + AC + (BP_a + P_aC)) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

Kako važi raspored $\mathcal{B}(A,R,R_a)$, iz $AR = \frac{1}{2}(BA + AC - BC)$ i $AR_a = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ sledi $RR_a = AR_a - AR = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) - \frac{1}{2}(BA + AC - BC) = BC$, što je i trebalo dokazati. $\Box$

Lema 6: Za različite kolinearne tačke A, B i C postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ako i samo ako tačka C nije središte duži AB.

Dokaz leme 6:

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da tačka C nije središte duži AB. Neka je O proizvoljna tačka van prave AB i neka je G presečna tačka prave OC i prave koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj OA. Neka je H tačka simetrična tački G u odnosu na tačku B. Neka je D presečna tačka pravih AB i OH. Dokažimo da za tačku D važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Na osnovu sličnosti trouglova $\triangle OAC$ i $\triangle GBC$ sledi $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$. S druge strane, na osnovu sličnosti trouglova $\triangle OAD$ i $\triangle HBD$ važi $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$. Kako je $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BG}$ sledi

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\ .$$

Dakle, ako tačka C nije središte duži AB, onda postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, što je i trebalo dokazati.

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, tj. $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ i da je tačka C središte duži AB. Tada je $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1$, pa je $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$. Dakle, orijentisane duži AD i DB nisu istosmerne, pa tačka D nije između tačaka A i B (i različita je od tačaka A i B). Ako važi $\mathcal{B}(A,B,D)$, onda je $AD = AB + BD > BD$ i $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{AD}{DB} < -1$. Analogno, ako važi $\mathcal{B}(D,A,B)$, onda je $BD = DA + AB > AD$ i $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{AD}{DB} > -1$. Dakle, ni u jednom slučaju ne važi $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$, što je kontradikcija. Odatle sledi da, ako je tačka C središte duži AB, onda ne postoji tačka D, takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija tačke D takve da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, gde su A, B i C različite kolinearne tačke i tačka C nije središte duži AB:

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **49**. $\square$

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija tangente iz tačke P na krug k:

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **37**. $\square$

Pomoćna konstrukcija 3 — konstrukcija zajedničke unutrašnje tangente krugova k_1 i k_2:

Videti opis pomoćne konstrukcije **2** u rešenju **40**. $\square$

Pomoćna konstrukcija 4 — konstrukcija zajedničke spoljašnje tangente krugova k_1 i k_2.

Neka su r_1 i r_2 poluprečnici, a O_1 i O_2 središta krugova k_1 i k_2.

Ako je $r_1 = r_2$ i ako su krugovi k_1 i k_2 identični, onda je svaka tangenta kruga k_1 tangenta i kruga k_2. Ako je $r_1 \neq r_2$ i krugovi se k_1 i k_2 dodiruju iznutra u tački T, onda postoji jedna zajednička spoljašnja tangenta krugova k_1 i k_2. Nju konstruišemo kao normalu u tački T na pravoj O_1O_2.

Ako nijedan od krugova k_1 i k_2 ne pripada unutrašnjosti drugog, ako se oni ne dodiruju iznutra i ako je $r_1 > r_2$, konstruišimo krug k_1' sa središtem O_1 i poluprečnikom $r_1 - r_2$. Na osnovu pomoćne konstrukcije **2**, konstruišimo (jednu) tangentu t_0 iz tačke O_2 na krug k_1'. Konstruišimo pravu p koja sadrži tačku O_2 i normalna je na pravoj t_0 i označimo sa T_2 njenu presečnu tačku sa krugom k_2 koja je sa suprotne strane prave t_0 u odnosu na tačku O_1. Konstruišimo pravu t koja sadrži tačku T_2 i paralelna je pravoj t_0. Prava t je jedna od dve zajedničke spoljašnje tangente krugova k_1 i k_2 (druga se konstruiše analogno za drugu tangentu iz tačke O_2 na krug k_1'). Konstrukcija je analogna za slučaj $r_2 > r_1$.

Ako nijedan od krugova k_1 i k_2 ne pripada unutrašnjosti drugog, ako se oni ne dodiruju iznutra i ako je $r_1 = r_2$, konstruišimo pravu t_0 određenu tačkama O_1 i O_2. Konstruišimo pravu p koja sadrži tačku O_2 i normalna je na pravoj t_0 i označimo sa T_2 jednu njenu presečnu tačku sa krugom k_2. Konstruišimo pravu t koja sadrži tačku T_2 i paralelna je pravoj t_0. Prava t je jedna od dve zajedničke spoljašnje tangente krugova k_1 i k_2 (druga se konstruiše analogno za drugu presečnu tačku prave p i kruga k_2).

Ako jedan od krugova k_1 i k_2 pripada unutrašnjosti drugog, onda ne postoji njihova zajednička spoljašnja tangenta.

Dokaz pomoćne konstrukcije 4:

Ako se krugovi k_1 i k_2 dodiruju iznutra u tački T, onda normala u tački T dodiruje oba kruga i oni su sa iste strane te normale, pa je ona njihova spoljašnja zajednička tangenta.

Ako nijedan od krugova k_1 i k_2 ne pripada unutrašnjosti drugog, ako se ne dodiruju iznutra i ako je $r_1 > r_2$, rastojanje između pravih t i t_0 jednako je $O_2T_2 = r_2$. Prava t_0 sadrži tačku O_2, pa je rastojanje prave t od tačke O_2

jednako r_2 i prava t dodiruje krug k_2. Prava t_0 je tangenta na krug k_1', pa je njeno rastojenje od tačke O_1 jednako $r_1 - r_2$, odakle sledi da je rastojanje prave t od tačke O_1 jednako $r_1 - r_2 + r_2 = r_1$ (jer su tačka O_1 i prava t sa raznih strana prave t_0), pa prava t dodiruje krug k_1. Krugovi k_1 i k_2 su sa iste strane prave t, pa je ona njihova spoljašnja zajednička tangenta.

Ako nijedan od krugova k_1 i k_2 ne pripada unutrašnjosti drugog, ako se ne dodiruju iznutra i ako je $r_1 = r_2$, rastojanje između pravih t i t_0 jednako je $O_2T_2 = r_2 = r_1$. Prava t_0 sadrži tačku O_2, pa je rastojanje prave t od tačke O_2 jednako r_2 i prava t dodiruje krug k_2. Analogno, prava t_0 dodiruje krug k_1. Krugovi k_1 i k_2 su sa iste strane prave t, pa je ona njihova spoljašnja zajednička tangenta. $\square$

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Neka su S i S_a središta upisanog kruga k trougla $\triangle ABC$ i spolja upisanog kruga k_a koji odgovara temenu A i neka je E presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i prave BC. Neka je A' podnožje normale iz tačke A na pravoj BC, a $\overline{S}$ i $\overline{S_a}$ podnožja normala iz tačaka S i S_a na pravoj AA'. Važi $AA' \cong h_a$ i $\overline{S}A' \cong \rho$, a na osnovu leme **3** je $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Za tačke A, A' i $\overline{S}$ jedinstveno je određena tačka $\overline{S_a}$ takva da je $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Važi i $\mathcal{B}(A, \overline{S}, A', \overline{S_a})$, pa je tačka $\overline{S}$ između tačke A' i središta duži AA', odakle sledi da važi $h_a > 2\rho$.

Neka su R i R_a tačke u kojima upisani krug trougla $\triangle ABC$ i spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruju pravu AB. Na osnovu leme **5**, važi $RR_a \cong BC \cong a$. Važi $\angle R_aRS = \angle RR_aS_a = \pi/2$, $RS \cong \overline{S}A' \cong \rho$ i $R_aS_a \cong A'\overline{S_a}$. Tačka A je presečna tačka pravih RR_a i SS_a. Tačka B je presečna tačka zajedničke unutrašnje tangente t krugova k i k_a i prave RR_a. Tačka C je presečna tačka prave t i zajedničke spoljašnje tangente krugova k i k_a različite od prave RR_a.

Konstrukcija: Konstruišimo duž A_0A_0' podudarnu datoj duži h_a. Konstruišimo tačku $\overline{S_0}$ takvu da važi $A_0'\overline{S_0} \cong \rho$ i $\mathcal{B}(A_0, \overline{S_0}, A_0')$ (ukoliko je $h_a > 2\rho$, takva tačka postoji, a u suprotnom ne postoji rešenje zadatka). Na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, konstruišimo tačku $\overline{S_{0,a}}$ takvu da važi $\mathcal{H}(A_0, A_0'; \overline{S_0}, \overline{S_{0,a}})$.

Konstruišimo duž RR_a podudarnu datoj duži a. Konstruišimo sa iste strane prave RR_a tačke S i S_a takve da važi $\angle R_aRS = \angle RR_aS_a = \pi/2$, $RS \cong \rho$ i $R_aS_a \cong A_0'\overline{S_{0,a}}$. Označimo sa A presečnu tačku pravih RR_a i SS_a. Konstruišimo krug k sa središtem S koji sadrži tačku R. Konstruišimo krug k_a sa središtem S_a koji sadrži tačku R_a. Na osnovu pomoćne konstrukcije **3**, konstruišimo unutrašnju zajedničku tangentu t krugova k i k_a. Označimo sa B presečnu tačku pravih t i RR_a. Na osnovu pomoćne konstrukcije **4**, konstruišimo spoljašnju zajedničku tangentu t' krugova k i k_a koja je različita od prave RR_a. Označimo sa C presečnu tačku pravih t i t'. Trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Krug k dodiruje prave RR_a, t i t' tj. prave AB, BC i AC. Tačka B i krug k su sa iste strane prave AC, tačka A i krug k su sa iste strane prave BC i tačka C i krug k su sa iste strane prave AB, pa je krug k upisani krug trougla $\triangle ABC$. Analogno, krug k_a dodiruje prave RR_a, t i t' tj. prave AB, BC i AC.

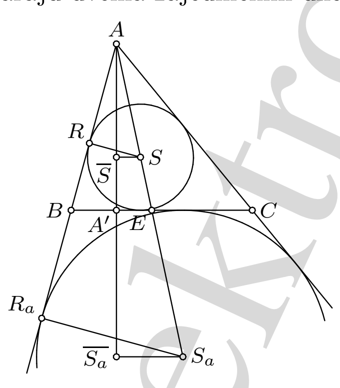
Tačka B i krug k_a su sa iste strane prave AC, tačka A i krug k_a su sa raznih strana prave BC i tačka C i krug k_a su sa iste strane prave AB, pa je krug k_a spolja upisani krug trougla $\triangle ABC$ koji odgovara temenu A. Tačke S i S_a su središta tih krugova, a tačke R i R_a su tačke dodira tih krugova i prave AB. Na osnovu leme **5**, važi $RR_a \cong BC$. Na osnovu konstrukcije je $RR_a \cong a$, pa sledi $BC \cong a$.

Na osnovu konstrukcije je $SR \cong \rho$, pa je poluprečnik upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ podudaran duži ρ.

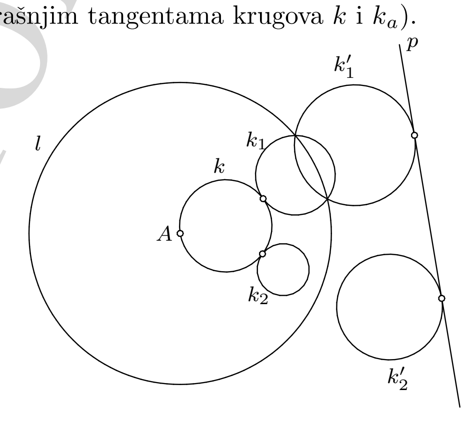
Neka je A' podnožje normale iz tačke A na pravoj BC, a $\overline{S}$ i $\overline{S_a}$ podnožja normala iz tačaka S i S_a na pravoj AA'. Na osnovu leme **3**, važi $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Duž $A'\overline{S_a}$ podudarna je poluprečniku kruga k_a, tj. duži R_aS_a, a na osnovu konstrukcije je $R_aS_a \cong A'_0\overline{S_{0,a}}$, pa sledi $A'\overline{S_a} \cong A'_0\overline{S_{0,a}}$. Pored toga, važi $\overline{S}A' \cong SR \cong \rho \cong \overline{S_0}A'_0$ i $\mathcal{B}(A, \overline{S}, A', \overline{S_a})$. Trojka tačaka $(\overline{S}, A', \overline{S_a})$, dakle, podudarna je trojki tačaka $(\overline{S_0}, A'_0, \overline{S_{0,a}})$. Neka je $\overline{A}$ tačka takva da je četvorka tačaka $(\overline{A}, \overline{S}, A', \overline{S_a})$, podudarna četvorki tačaka $(A_0, \overline{S_0}, A'_0, \overline{S_{0,a}})$. Tada važi $\mathcal{H}(\overline{A}, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Međutim, na osnovu leme **6**, postoji jedinstvena tačka A takva da je $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$, pa su tačke $\overline{A}$ i A identične, odakle sledi $AA' \cong \overline{A}A' \cong A_0A'_0$. Na osnovu konstrukcije je $A_0A'_0 \cong h_a$, pa je duž AA', tj. visina koja odgovara temenu A podudarna datoj duži h_a, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Da bi rešenje zadatka postojalo mora da važi $h_a > 2\rho$. Pored toga, da se krugovi k i k_a ne bi sekli (tj. da bi imali zajedničku unutrašnju tangentu) mora da važi $SS_a > \rho + \rho_a$ (gde je ρ_a dužina S_aR_a). Iz $(RR_a)^2 + (S_aR_a - SR)^2 = (SS_a)^2$ sledi $a^2 + (\rho_a - \rho)^2 = (SS_a)^2$, pa je uslov $SS_a > \rho + \rho_a$ ekvivalentan sa $a^2 + (\rho_a - \rho)^2 > (\rho + \rho_a)^2$, odakle se dobija $a^2 > 4\rho\rho_a$. Tačke A, A', $\overline{S}$ i $\overline{S_a}$ su harmonijski spregnute, pa iz $\frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}} = -\frac{\overrightarrow{A\overline{S_a}}}{\overrightarrow{\overline{S_a}A'}}$ sledi $\frac{h_a - \rho}{\rho} = \frac{h_a + \rho_a}{\rho_a}$ i $\rho_a = \frac{h\rho}{h - 2\rho}$.

Dakle, da bi zadatak imao rešenja treba da važi $a^2 > 4\rho\rho_a = \frac{4h\rho^2}{h - 2\rho}$ i $h_a > 2\rho$. Ako su ispunjeni ovi uslovi, onda zadatak ima dva podudarna rešenja (koja odgovaraju dvema zajedničkim unutrašnjim tangentama krugova k i k_a).



Slika 51



Slika 52

52. *Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija tangente iz tačke P na krug k:*

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **37.** $\square$

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija slike tačke P u inverziji ψ_k:

Neka je O središte kruga k koji određuje inverziju ψ_k.

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, konstruišimo (na osnovu pomoćne konstrukcije **1**) najpre tangentu iz tačke P na krug k i označimo sa T njenu tačku dodira sa krugom k. Tražena tačka $P' = \psi_k(P)$ je podnožje normale iz tačke T na pravoj OP.

Ako tačka P pripada krugu k, onda se tačka P u inverziji ψ_k preslikava u sebe, pa je tražena tačka P' upravo tačka P.

Ako tačka P pripada unutrašnjosti kruga k, konstruišimo najpre normalu iz tačke P na pravoj OP i označimo sa T njenu presečnu tačku sa krugom k. Tražena tačka $P' = \psi_k(P)$ je presečna tačka prave OP i tangente t na krug k u tački T.

Dokaz pomoće konstrukcije 2:

Neka je r poluprečnik kruga k.

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, važi $\mathcal{B}(O, P', P)$, pa su uglovi $\angle TOP'$ i $\angle TOP$ podudarni. Pored toga, uglovi $\angle OTP$ i $\angle OP'T$ su pravi, pa su trouglovi $\triangle OPT$ i $\triangle OP'T$ slični odakle sledi $OP : OT = OT : OP'$ i $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$. Iz $\mathcal{B}(O, P', P)$ i $OP \cdot OP' = r^2$, na osnovu definicije inverzije, sledi $P' = \psi_k(P)$.

Ako tačka P pripada krugu k, onda je $P' = P$, pa su tačke P i P' sa iste strane tačke O i važi $OP \cdot OP' = r^2$, pa je $P' = \psi_k(P)$.

Ako tačka P pripada unutrašnjosti kruga k, važi $\mathcal{B}(O, P, P')$, pa su uglovi $\angle TOP$ i $\angle TOP'$ podudarni. Pored toga, uglovi $\angle OTP'$ i $\angle OPT$ su pravi, pa su trouglovi $\triangle OPT$ i $\triangle OP'T$ slični odakle sledi $OP : OT = OT : OP'$ i $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$. Iz $\mathcal{B}(O, P, P')$ i $OP \cdot OP' = r^2$, na osnovu definicije inverzije, sledi $P' = \psi_k(P)$. $\square$

Pomoćna konstrukcija 3 — konstrukcija slike prave p u inverziji ψ_k:

Neka je O središte kruga k koji određuje inverziju ψ_k.

Ako prava p sadrži tačku O onda je slika prave p bez tačke O u inverziji ψ_k sâma prava p bez tačke O.

Ako prava p ne sadrži tačku O[4], neka je P podnožje normale iz tačke O na pravoj p. Na osnovu pomoćne konstrukcije **2**, konstruišimo sliku tačke P u inverziji ψ_k. Konstruišimo krug p' čiji je prečnik duž OP'. Slika prave p u inverziji ψ_k je krug p' bez tačke O.

Dokaz pomoćne konstrukcije 3:

Ako prava p sadrži tačku O onda se ona bez tačke O, zaista, na osnovu teoreme **28.7** preslikava na sebe bez tačke O.

Ako prava p ne sadrži tačku O, onda se ona preslikava na krug koji sadrži tačku O bez tačke O. U inverziji ψ_k prava OP se preslikava na sebe (**T28.7**), i prava p normalna je na pravoj OP, pa kako se inverzijom uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove (**T28.9**), sledi da je krug koji je slika prave p normalan

[4]U specijalnom slučaju, ako prava p ne sadrži tačku O i seče krug k u tačkama P i Q, onda se ona preslikava na krug određen tačkama P, Q i O bez tačke O.

na pravoj OP. Prava p sadrži tačku P, pa slika prave p u inverziji ψ_k sadrži sliku tačke P u inverziji ψ_k — tačku P'. Dakle, krug koji je slika prave p u inverziji ψ_k sadrži tačke O i P' i normalan je na pravoj OP, odnosno pravoj OP', tj. krug koji je slika prave p je krug čiji je prečnik duž OP', a to je upravo krug p'. Dakle, prava p se u inverziji ψ_k zaista preslikava na krug p' bez tačke O. □

Pomoćna konstrukcija 4 — konstrukcija slike kruga l u inverziji ψ_k:

Neka je O središte kruga k koji određuje inverziju ψ_k i neka je O' središte kruga l.

Ako krug l sadrži tačku O[5], neka je P tačka kruga l koja je simetrična tački O u odnosu na tačku O'. Na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, konstruišimo sliku tačke P u inverziji ψ_k i označimo je sa P'. Konstruišimo pravu l' koja sadrži tačku P' i normalna je na pravoj OO'. Slika kruga l bez tačke O u inverziji ψ_k je prava l'.

Ako krug l ne sadrži tačku O, neka su P i Q presečne tačke kruga l i prave OO'. Na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, konstruišimo slike tačaka P i Q u inverziji ψ_k i označimo ih sa P' i Q'. Konstruišimo krug l' čiji je prečnik duž $P'Q'$. Krug l' je slika kruga l u inverziji ψ_k.

Dokaz pomoćne konstrukcije 4:

Ako krug l sadrži tačku O, onda se on bez tačke O, na osnovu teoreme **28.8** preslikava na pravu. U inverziji ψ_k prava OO' se preslikava na sebe (**T28.7**), i krug l je normalan na pravoj OO', pa kako se inverzijom uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove (**T28.9**), sledi da je prava koja je slika kruga l normalna na pravoj OO'. Krug l sadrži tačku P, pa slika kruga l u inverziji ψ_k sadrži sliku tačke P u inverziji ψ_k — tačku P'. Dakle, prava koja je slika kruga l u inverziji ψ_k sadrži tačku P' i normalna je na pravoj OO'. Kako prava l' sadrži tačku P' i normalna je na pravoj OO' i kako je takva prava jedinstvena **12.1**, sledi da je prava l' slika kruga l bez tačke O u inverziji ψ_k.

Ako krug l ne sadrži tačku O, onda se on na osnovu teoreme **28.8** preslikava na krug. U inverziji ψ_k prava OO' se preslikava na sebe (**T28.7**), i krug l je normalan na pravoj OO', pa kako se inverzijom uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove (**T28.9**), sledi da je krug koji je slika kruga l normalan na pravoj OO'. Krug l sadrži tačke P i Q, pa slika kruga l u inverziji ψ_k sadrži slike tačaka P i Q u inverziji ψ_k — tačke P' i Q'. Dakle, krug koji je slika kruga l u inverziji ψ_k sadrži tačke P' i Q' i normalna je na pravoj OO'. Tačke P' i Q' pripadaju pravoj OO', pa sledi da slika kruga l u inverziji ψ_k krug čiji je prečnik duž $P'Q'$, a to je, na osnovu konstrukcije, upravo krug l'. □

Pomoćna konstrukcija 5 — konstrukcija zajedničke spoljašnje tangente (različitih) krugova k_1 i k_2:

Videti opis pomoćne konstrukcije **4** u rešenju **51.** □

Pomoćna konstrukcija 6 — konstrukcija zajedničke unutrašnje tangente krugova k_1 i k_2:

[5] U specijalnom slučaju, ako krug l sadrži tačku O i seče krug k u tačkama P i Q, onda se on bez tačke O preslikava na pravu PQ.

Videti opis pomoćne konstrukcije **2** u rešenju **40**. □

Analiza: Pretpostavimo da krug k zadovoljava uslove zadatka. Neka je l prozvoljan krug sa središtem A. Krug k sadrži tačku A, pa se u inverziji ψ_l on preslikava na neku pravu p koja ne sadrži tačku A. Krugovi k_1 i k_2 ne sadrže tačku A, pa se u inverziji ψ_l preslikavaju na krugove k_1' i k_2'. Krug k dodiruje krugove k_1 i k_2, pa, s obzirom na to da inverzija čuva incidencije, prava p dodiruje krugove k_1' i k_2', tj. prava p je zajednička tangenta za krugove k_1' i k_2'. Inverzija je involucija, pa je $\psi_l(p) = k$.

Konstrukcija: Konstruišimo najpre proizvoljan krug l sa središtem A i zatim (na osnovu pomoćne konstrukcije **4**) konstruišimo krugove k_1' i k_2' na koje se redom, u inverziji ψ_l, preslikavaju krugovi k_1 i k_2. Konstruišimo zajedničku tangentu p ovih krugova (na osnovu pomoćnih konstrukcija **5** i **6**). Ako p ne sadrži tačku A, konstruišimo krug k koji je slika prave p u inverziji ψ_l (na osnovu pomoćne konstrukcije **3**). Krug k zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, krugovi k_1 i k_2 se u inverziji ψ_l preslikavaju na krugove k_1' i k_2'. Inverzija je involucija, pa važi i obratno, tj. krugovi k_1' i k_2' se u inverziji ψ_l preslikavaju na krugove k_1 i k_2. Na osnovu konstrukcije, prava p preslikava se, u inverziji ψ_l, na krug k, pa, kako prava p dodiruje krugove k_1' i k_2', sledi da slika prave p — krug k dodiruje slike krugova k_1' i k_2', tj. krugove k_1 i k_2. Kako p ne sadrži tačku A, ona se preslikava na krug koji sadrži tačku A. Dakle, krug k sadrži tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: U zavisnosti od njihovog međusobnog položaja, krugovi k_1' i k_2' mogu imati 0, 1, 2, 3 ili 4 zajedničke tangente. Svaka od tih tangenti koja ne sadrži tačku A određuje jedno rešenje. Dakle, u zavisnosti od međusobnog položaja krugova k_1' i k_2' i tačke A, može postojati 0, 1, 2, 3 ili 4 rešenja zadatka.

53. *Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija slike prave p u inverziji ψ_k:*
Videti opis pomoćne konstrukcije **3** u rešenju **52.** □

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija slike kruga l u inverziji ψ_k:
Videti opis pomoćne konstrukcije **4** u rešenju **52.** □

Pomoćna konstrukcija 3 — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):
Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35.** □

Pomoćna konstrukcija 4 — konstrukcija prave p koja sadrži tačku P i seče krug k pod uglom α (gde je $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$)[6] *:*

Neka je O središte kruga k. Razlikujemo dva slučaja:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: Konstuišimo pravu p određenu tačkama P i O. Prava p i krug k seku se pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (U ovom slučaju prava p je jedinstvena prava koja sadrži tačku P i seče krug k pod uglom α.)

[6] Ugao preseka prave p i kruga k koji se seku u tački T je oštar ili prav ugao koji zahvataju prava p i tangenta t kruga k u tački P. (Ako se prava p i krug k seku u dve tačke T_1 i T_2 i ako su t_1 i t_2 tangente kruga k u tačkama P_1 i P_2, oštri ili pravi uglovi koji zahvata prava p sa pravama t_1 odnosno t_2 su podudarni.)

$\alpha < \frac{\pi}{2}$**:** Ako tačka P pripada unutrašnjosti kruga k, konstruišimo otvoreni lûk za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (na osnovu pomoćne konstrukcije **3**). Presečnu tačku tog lûka i kruga k označimo sa T. Konstuišimo pravu p određenu tačkama P i T. (Druga prava koja sadrži tačku P i seče krug k pod uglom α odgovara drugom lûku za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \frac{\pi}{2} - \alpha$.)

Ako tačka P pripada krugu k, konstruišimo pravu t koja sadrži P i normalna je na pravoj OP. Konstruišimo pravu p koja pravoj t zahvata ugao α. (Druga prava koja sadrži tačku P i seče krug k pod uglom α odgovara drugoj pravoj koja sadrži tačku P i sa pravom t zahvata ugao α.)

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, konstruišimo otvoreni lûk za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \alpha + \frac{\pi}{2}$ (na osnovu pomoćne konstrukcije **3**). Presečnu tačku tog lûka i kruga k označimo sa T. Konstuišimo pravu p određenu tačkama P i T. (Druga prava koja sadrži tačku P i seče krug k pod uglom α odgovara drugom lûku za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \alpha + \frac{\pi}{2}$.)

Prava p i krug k seku se pod uglom α.

Dokaz pomoćne konstrukcije 4:

Neka je T jedna presečna tačka prave p i kruga k i neka je t tangenta na krug k u tački T.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$**:** Tangenta t na krug k u tački P je normalna na pravoj OP, pa su prave p i t međusobno normalne, odakle sledi da je prava p normalna na krug k, tj. prava p i krug k seku se pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$\alpha < \frac{\pi}{2}$**:** Ako tačka P pripada unutrašnjosti kruga k, tačka T pripada lûku za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \frac{\pi}{2} - \alpha$, pa je $\angle OTP = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Prave OT i t su međusobno normalne, pa, kako su tačke O i P sa iste strane prave t, sledi da prave p i t zahvataju ugao $\frac{\pi}{2} - \angle OTP = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$, što je i trebalo dokazati.

Ako tačka P pripada krugu k, prave p i t zahvataju ugao α na osnovu konstrukcije.

Ako tačka P pripada spoljašnjosti kruga k, tačka T pripada lûku za čiju svaku tačku X važi $\angle OXP = \alpha + \frac{\pi}{2}$, pa je $\angle OTP = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Prave OT i t su međusobno normalne, pa, kako su tačke O i P sa raznih strana prave t, sledi da prave p i t zahvataju ugao $\angle OTP - \frac{\pi}{2} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \alpha$, što je i trebalo dokazati.

□

Analiza: Pretpostavimo da krug k zadovoljava uslove zadatka. Neka je ψ inverzija u odnosu na krug čije je središte tačka A i koji sadrži tačku B. Krug k sadrži tačku A, pa se, bez tačke A, u inverziji ψ preslikava na pravu k' koja ne sadrži tačku A (**T28.8**). Tačka B se preslikava u sebe, pa, kako krug k sadrži tačku B, sledi da prava k' takođe sadrži tačku B. Krug l ne sadrži tačku A, pa se, u inverziji ψ, preslikava na krug l' koji ne sadrži tačku A. Krugovi k i l se seku pod uglom α, pa se (na osnovu teoreme **28.9**) prava k' i krug l' seku pod uglom α.

Dakle, prava k' sadrži tačku B i seče krug l' pod uglom α. Krug k određen je slikom prave k' u inverziji ψ (jer je inverzija involucija).

Konstrukcija: Konstruišimo krug k_0 takav da mu je središte tačka A i da sadrži tačku B. Konstruišimo krug l' koji je slika kruga l u inverziji ψ u odnosu na krug k_0 (na osnovu pomoćne konstrukcije **2**). Konstruišimo pravu k' koja sadrži tačku B i seče krug l' pod uglom α (na osnovu pomoćne konstrukcije **4**). Ako tačka A ne pripada pravoj k', onda konstruišimo sliku prave k' u inverziji ψ (na osnovu pomoćne konstrukcije **1**). Tada je slika prave k' u inverziji ψ traženi krug k kome nedostaje tačka A. (Ako tačka A pripada pravoj k', onda rešenje ne postoji.)

Dokaz: Kako tačka A ne pripada pravoj k', na osnovu teoreme **28.7**, ona se u inverziji ψ preslikava na krug k koji sadrži tačku A bez tačke A. Tačka B pripada krugu k_0, pa se u inverziji ψ preslikava u sebe. Na osnovu konstrukcije, prava k' sadrži tačku B, pa tačku B sadrži i krug k.

Na osnovu konstrukcije, krug l se u inverziji ψ preslikava na krug l'. Inverzija je involucija, pa sledi da se krug l' u inverziji ψ preslikava na krug l. Prava k' i krug l se, na osnovu konstrukcije, seku pod uglom α, pa kako inverzija "čuva uglove" (**T28.9**), sledi da se i njihove slike u inverziji ψ seku pod uglom α. Dakle, krug k i krug l seku se pod uglom α.

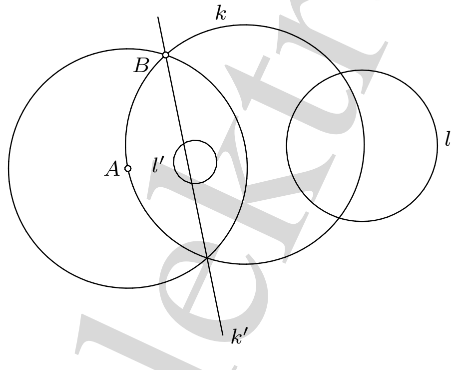
Dakle, krug k sadrži tačke A i B i seče krug l pod uglom α.

Diskusija: Ako tačka A pripada pravoj k' rešenje ne postoji.

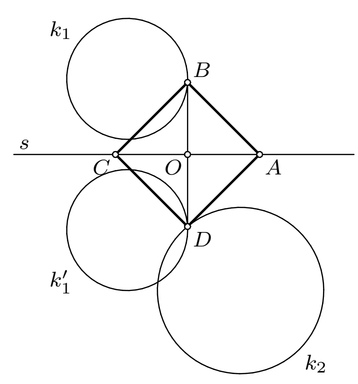
Ako tačka A ne pripada pravoj k':

- ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ postoje dve prave koje sadrže tačku B i seku krug l' pod uglom α i svakoj odgovara po jedno rešenje zadatka.

- ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku B i seče krug l' pod pravim uglom i toj pravoj odgovara jedinstveno rešenje zadatka.



Slika 53



Slika 54

54. *Analiza:* Pretpostavimo da kvadrat $ABCD$ zadovoljava uslove zadatka. Tačke B i D su simetrične u odnosu na pravu AC tj. pravu s, pa važi $D = \mathcal{S}_s(B)$. Tačka B pripada krugu k_1, pa slika tačke B u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ (tačka D) pripada slici kruga k_1 u istoj toj osnoj refleksiji (krug k_1'). Tačka D je, dakle, presečna tačka krugova k_2 i k_1'. Tačka B je slika tačke D u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$. Ako je O podnožje normale iz D, onda za tačke A i C važi $\mathcal{B}(A, O, C)$ i $AO \cong CO \cong DO$.

Konstrukcija: Konstruišimo i označimo sa k_1' krug simetričan krugu k_1 u odnosu na pravu s ($k_1' = \mathcal{S}_s(k_1)$). Jednu od prečnih tačaka krugova k_1' i k_2 (ako postoji) označimo sa D. Sa B označimo tačku simetričnu tački D u odnosu na pravu s ($B = \mathcal{S}_s(D)$). Sa O označimo podnožje normale iz D na pravu s, a sa A i C tačke prave s takve da je $\mathcal{B}(A, O, C)$ i $AO \cong CO \cong DO$. Četvorougao $ABCD$ je kvadrat koji zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, tačka D pripada krugu k_2, a tačke A i C pripadaju pravoj s i važi $\mathcal{B}(A, O, C)$, $AO \cong CO \cong DO$ i $DO \perp AC$, pa su trouglovi $\triangle AOD$ i $\triangle CDO$ pravougli jednakokraki i međusobno podudarni, odakle sledi $AD \cong CD$ i $\angle ADO = \angle ODC = \frac{\pi}{4}$. Na osnovu konstrukcije je $\mathcal{B}(A, O, C)$, pa je $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ i $\angle OAD = \angle OCD = \frac{\pi}{4}$. Na osnovu konstrukcije tačka D pripada krugu k_1', pa važi tačka $B = \mathcal{S}_s(D)$ pripada krugu $\mathcal{S}_s(k_1') = k_1$. Kako tačke A i C pripadaju pravoj s i $B = \mathcal{S}_s(D)$, sledi $BA \cong AD$ i $BC \cong CD$ i $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle OAB = \angle OCB = \frac{\pi}{4}$. Dakle, $BA \cong AD \cong CD \cong BC$ i $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, pa je četvorougao $ABCD$ kvadrat i tačke A i C pripadaju pravoj s, tačka B pripada krugu k_1 i tačka D pripada krugu k_2, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ako se krugovi k_2 i $k_1' = \mathcal{S}_s(k_1)$ dodiruju, zadatak ima dva rešenja (tačke A i C mogu biti izabrane na dva (simetrična) načina). Ako se krugovi k_2 i k_1' seku, zadatak ima četiri rešenja (za svaku presečnu tačku ovih krugova tačke A i C mogu biti izabrane na po dva (simetrična) načina). Ako su krugovi k_2 i k_1' identični, zadatak ima beskonačno mnogo rešenja. Inače, zadatak nema rešenja.

55. *Lema 1:* Kompozicija tri centralne simetrije (euklidske) ravni takođe je centralna simetrija te ravni.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **2** u rešenju **26**. □

Lema 2: Kompozicija neparnog broja centralnih simetrija ravni takođe je centralna simetrija te ravni.

Dokaz leme 2: Matematičkom indukcijom dokažimo da je kompozicija $\mathcal{S}_{O_1} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{O_{2n-1}}$ centralna simetrija.

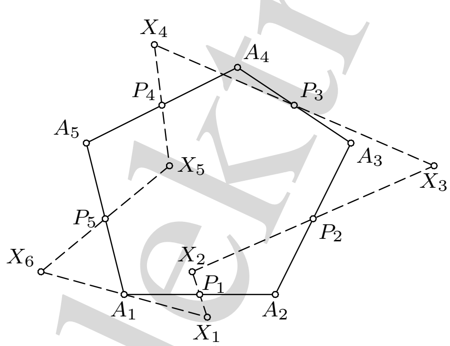
Tvđenje trivijalno važi za $n = 1$ ($\mathcal{S}_{O_1}$ je zaista centralna simetrija ravni). Pretpostavimo da tvrđenje važi za n i dokažimo da važi i za $n+1$, tj. dokažimo da je za proizvoljne tačke O_1, O_2, $\ldots$, O_{2n-1}, O_{2n}, O_{2n+1} kompozicija $\mathcal{S}_{O_1} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{O_{2n-1}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n+1}}$ centralna simetrija. Na osnovu induktivne pretpostavke važi $\mathcal{S}_{O_1} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{O_{2n-1}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n+1}} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{O_{2n}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n+1}}$. Na osnovu leme **1**, važi $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{O_{2n}} \circ \mathcal{S}_{O_{2n+1}} = \mathcal{S}_{O'}$. Dakle, tvrđenje važi za svaku vrednost n, čime je dokazano tvrđenje leme. □

Analiza: Pretpostavimo da petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ zadovoljava uslove zadatka. Tačke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 su središta ivica A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 petougla $A_1A_2A_3A_4A_5$, pa je $\mathcal{I}(A_1) = \mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2} \circ \mathcal{S}_{P_1}(A_1) = A_1$, tj. tačka A_1 je invarijantna tačka preslikavanja $\mathcal{I}$. Na osnovu leme **2**, $\mathcal{I}$ je centralna simetrija. Kako je $\mathcal{I}(A_1) = A_1$, sledi da je A_1 centar centralne simetrije $\mathcal{I}$. Neka je X_1 proizvoljna tačka ravni i neka je $X_2 = \mathcal{S}_{P_1}(X_1)$, $X_3 = \mathcal{S}_{P_2}(X_2)$, $X_4 = \mathcal{S}_{P_3}(X_3)$, $X_5 = \mathcal{S}_{P_4}(X_4)$, $X_6 = \mathcal{S}_{P_4}(X_5)$. Dakle, $X_6 = \mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2} \circ \mathcal{S}_{P_1}(X_1) = \mathcal{I}(X_1) = \mathcal{S}_{A_1}(X_1)$. Dakle, u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_{A_1}$ tačka X_1 se preslikava u tačku X_6, pa je tačka A_1 središte duži X_1X_6 ili su tačke X_1, X_6 i A_1 identične. Važi i $A_2 = \mathcal{S}_{P_1}(A_1)$, $A_3 = \mathcal{S}_{P_2}(A_2)$, $A_4 = \mathcal{S}_{P_3}(A_3)$, $A_5 = \mathcal{S}_{P_4}(A_4)$.

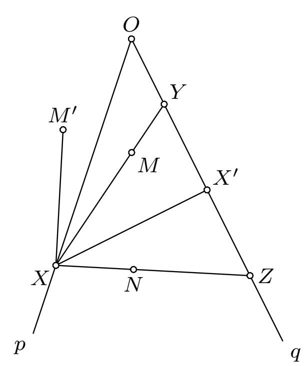
Konstrukcija: Označimo sa X_1 proizvoljnu tačku ravni. Konstruišimo tačke X_2, X_3, X_4 i X_5 takve da je $X_2 = \mathcal{S}_{P_1}(X_1)$, $X_3 = \mathcal{S}_{P_2}(X_2)$, $X_4 = \mathcal{S}_{P_3}(X_3)$, $X_5 = \mathcal{S}_{P_4}(X_4)$, $X_6 = \mathcal{S}_{P_5}(X_5)$. Označimo sa A_1 središte duži X_1X_6 ako su tačke X_1 i X_6 različite, ili tačku X_1 ako su tačke X_1 i X_6 identične. Konstruišimo tačke A_2, A_3, A_4 i A_5 takve da je $A_2 = \mathcal{S}_{P_1}(A_1)$, $A_3 = \mathcal{S}_{P_2}(A_2)$, $A_4 = \mathcal{S}_{P_3}(A_3)$, $A_5 = \mathcal{S}_{P_4}(A_4)$. Petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ zadovoljava uslove zadatka.

Dokaz: Tačke P_1, P_2, P_3, P_4 su središta duži A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 na osnovu konstrukcije. Potrebno je još dokazati da je tačka P_5 središte duži A_1A_5. Na osnovu leme **2**, kompozicija $\mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2} \circ \mathcal{S}_{P_1}$ je centralna simetrija. U toj centralnoj simetriji tačka X_1 preslikava se u tačku X_6, pa je centar te simetrije istovremeno središte duži X_1X_6 (ako su tačke X_1 i X_6 različite) ili tačka X_1 (ako su tačke X_1 i X_6 identične). Kako je, na osnovu konstrukcije, tačka A_1 središte duži X_1X_6 (ako su tačke X_1 i X_6 različite) ili je identična tački X_1 (ako su tačke X_1 i X_6 identične), sledi da je $\mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2} \circ \mathcal{S}_{P_1} = \mathcal{S}_{A_1}$. Na osnovu konstrukcije je $\mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2} \circ \mathcal{S}_{P_1}(A_1) = \mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3} \circ \mathcal{S}_{P_2}(A_2) = \mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4} \circ \mathcal{S}_{P_3}(A_3) = \mathcal{S}_{P_5} \circ \mathcal{S}_{P_4}(A_4) = \mathcal{S}_{P_5}(A_5)$. S druge strane je $\mathcal{S}_{A_1}(A_1) = A_1$, pa važi $\mathcal{S}_{P_5}(A_5) = \mathcal{S}_{A_1}(A_1) = A_1$, odakle sledi da je tačka P_5 zaista središte duži A_1A_5.

Diskusija: Petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ sa zadatim svojstvima uvek postoji s tim što može biti samopresecajući ili degenerisan (sa kolinearnim susednim ivicama).



Slika 55



Slika 56

56. *Pomoćna konstrukcija — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):*

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35**. $\square$

Analiza: Pretpostavimo da tačka X zadovoljava uslove zadatka. Neka su tačke X', $\overline{M}$ i $\overline{N}$ podnožja normala iz tačaka X, M i N na polupravoj q i neka je $M' = \mathcal{S}_p(M)$.

Pretpostavimo da su identične tačke $\overline{M}$ i $\overline{N}$ (tj. da važi $MN \perp q$). Ako tačka X' ne bi bila identična sa njima, onda bi tačke Y i Z bile različite i sa iste strana tačke X', što je u kontradikciji sa $XY \cong XZ$. Dakle, u ovom slučaju tačka X' je identična sa tačkama $\overline{M}$ i $\overline{N}$, a tačka X je presečna tačka prave MN i poluprave p.

Pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(O, \overline{M}, \overline{N})$ (analogno za slučaj $\mathcal{B}(O, \overline{N}, \overline{M})$). Ako tačka X' nije između tačaka $\overline{M}$ i $\overline{N}$, onda tačke Y i Z nisu sa raznih strana tačke X', odakle (i iz $XY \cong XZ$) sledi da su tačke Y i Z identične; u tom slučaju tačka X je presečna tačka prave MN i poluprave p. Ako je tačka X' između tačaka $\overline{M}$ i $\overline{N}$, iz $\angle OXM' = \angle OXM$ i $\angle YXX' = \angle X'XZ$ sledi $\angle M'XN = 2\angle OXX' = 2(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \angle XX'O - \angle pOq) = 2(\frac{\pi}{2} - \angle pOq)$. Dakle, tačka X pripada polupravoj p i skupu tačaka K takvih da je $\angle M'KN = 2(\frac{\pi}{2} - \angle pOq)$ (i da su sa suprotne strane prave $M'N$ u odnosu na tačku O).

Konstrukcija: Konstruišimo tačku $M' = \mathcal{S}_p(M)$, a zatim, na osnovu pomoćne konstrukcije, lûk koji je skup tačaka K takvih da je $\angle M'KN = 2(\frac{\pi}{2} - \angle pOq)$. (i da su sa suprotne strane prave $M'N$ u odnosu na tačku O). Presek tog lûka i poluprave p označimo sa X. Tačka X zadovoljava uslove zadatka.

Ako prava MN seče polupravu p, ta presečna tačka je drugo rešenje zadatka.

Dokaz: Ako tačka X nije konstruisana kao presečna tačka prave MN i poluprave p, neka je tačka X' podnožje normale iz tačke X na polupravoj q. Na osnovu konstrukcije je $\angle M'XO = \angle OXM$ i $\angle M'XN = 2(\frac{\pi}{2} - \angle pOq)$. Kako je $\angle OXX' = \frac{\pi}{2} - \angle pOq$ sledi $\angle X'XZ = \angle M'XN - \angle OXX' - \angle M'XO = 2(\frac{\pi}{2} - \angle pOq) - (\frac{\pi}{2} - \angle pOq) - \angle M'XO = (\frac{\pi}{2} - \angle pOq) - \angle M'XO = \angle OXM + \angle YXX' - \angle M'XO = \angle YXX'$. Iz $\angle YXX' = \angle ZXX'$, $\angle YX'X = \angle ZX'X = \frac{\pi}{2}$ i $XX' = XX'$ sledi $\triangle YX'X \cong ZXX'$ i $XY \cong XZ$, što je i trebalo dokazati.

Ako je tačka X konstruisana kao presečna tačka prave MN i poluprave p, onda su tačke Y i Z identične, pa trivijalno važi $XY \cong XZ$.

Diskusija: Tačke N i M' su sa raznih strana poluprave p, pa konstruisani lûk uvek seče polupravu p. Jedno rešenje zadatka, dakle, uvek postoji. Ako prava MN seče polupravu p, zadatak ima dva rešenja. (Ako je prava MN normalna na polupravoj q, onda su ta dva rešenja identična.)

57. *Lema:* Ako se u rotaciji $\mathcal{R}_{O,\omega}$ sa središtem O i za orijentisani ugao ω ($\omega < \pi/2$) poluprava p preslikava na polupravu q, onda je ugao koji zahvataju poluprave p i q i koji je orijentisan kao ugao ω podudaran uglu ω.

Dokaz leme: Neka je P teme poluprave p, Q teme poluprave q i neka je R presečna tačka pravih određenih polupravama p i q. Neka je P_1 proizvoljna tačka otvorene poluprave p i neka je Q_1 tačka poluprave q takva da je $PP_1 \cong QQ_1$.

Pretpostavimo da je $OP \perp p$. Na osnovu svojstava izometrijskih transformacija sledi $OQ \perp q$, pa je četvorougao sa temenima O, P, R, Q tetivan. Ako su tačke O i R sa iste strane prave PQ, onda je $\angle PRQ = \angle POQ = \omega$ i ugao koji zahvataju poluprave p i q podudaran je uglu koji zahvataju poluprave RP i RQ i jednak je $\angle PRQ = \omega$. Ako su tačke O i R sa raznih strana prave PQ, onda je $\angle PRQ = \pi/2 - \angle POQ = \pi/2 - \omega$ i ugao koji zahvataju poluprave p i q podudaran je uglu koji zahvataju poluprave p i RQ i jednak je $\pi/2 - \angle PRQ = \omega$.

Pretpostavimo da nije $OP \perp p$. Neka su P_0 i Q_0 podnožja normala iz tačke O na pravama određenim polupravama p i q. Na osnovu svojstava izometrijskih transformacija sledi $\mathcal{R}_{O,\omega}(P_0) = Q_0$. Neka su p' i q' poluprave sa temenima P_0, odnosno Q_0 koje pripadaju pravama određenim polupravama p i q. Na osnovu prvog dela dokaza sledi da poluprave p' i q' zahvataju ugao ω. Ugao koji zahvataju poluprave p i q jednak je uglu koji zahvataju poluprave p' i q', tj. jednak je ω, što je i trebalo dokazati. □

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35**. □

Analiza: Pretpostavimo da tačke X i Y zadovoljavaju uslove zadatka. Neka je $\mathcal{R}$ rotacija sa središtem O za usmeren ugao $\angle XOY$ (taj ugao podudaran je uglu ω). U toj rotaciji tačka X preslikava se u tačku Y. Neka je P' slika tačke P u rotaciji $\mathcal{R}$ i neka je Z presečna tačka pravih XP i YP'. Neka je x poluprava prave PX sa temenom Z koja je istosmerna sa polupravom XP i neka je y poluprava prave $P'Y$ sa temenom Z koja je istosmerna sa polupravom YP'. Poluprava XP se u rotaciji $\mathcal{R}$ preslikava na polupravu YP', pa ove dve polupravе zahvataju ugao ω i polupravе x i y zahvataju ugao ω. Prave QY i PX su paralelne, pa je ili tačka Q sa iste strane prave $P'Y$ kao i poluprava x i polupravе YQ i YP' zahvataju ugao ω, ili je tačka Q sa suprotne strane prave $P'Y$ u odnosu na polupravu x i polupravе YQ i YP' zahvataju ugao $\pi - \omega$. Dakle, tačka Y je presečna tačka kruga k i skupa tačaka iz kojih se duž $P'Q$ vidi pod uglom ω ili skupa tačaka iz kojih se duž $P'Q$ vidi pod uglom $\pi - \omega$. Tačka X je slika tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$.

Konstrukcija: Neka je $\mathcal{R}$ rotacija sa središtem O za ugao ω (za jednu od dve moguće orijentacije). Označimo sa P' sliku tačke P u rotaciji $\mathcal{R}$.

Konstruišimo, na osnovu opisa pomoćne konstrukcije, skup tačaka iz kojih se duž $P'Q$ vidi pod uglom ω, tj. dva lûka sa raznih strana duži $P'Q$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom ω. Presečnu tačku tog skupa i kruga k označimo sa Y. Označimo sa Z presečnu tačku pravih PX i $P'Y$, sa x polupravu prave PX sa temenom Z koja je istosmerna kao i poluprava XP i sa y polupravu prave $P'Y$ sa temenom Z koja je istosmerna kao i poluprava YP'. Ako je tačka Q sa iste strane prave $P'Y$ kao i poluprava x, označimo sa X sliku tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$ (u protivnom, ne postoji rešenje za izabranu rotaciju $\mathcal{R}$ i presečnu tačku Y).

Druga mogućnost je analogna: konstruišimo, na osnovu opisa pomoćne konstrukcije, skup tačaka iz kojih se duž $P'Q$ vidi pod uglom $\pi - \omega$, tj. dva lûka sa raznih strana duži $P'Q$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom $\pi - \omega$.

Presečnu tačku tog skupa i kruga k označimo sa Y. Označimo sa Z presečnu tačku pravih PX i $P'Y$, sa x polupravu prave PX sa temenom Z koja je istosmerna sa polupravom XP i sa y polupravu prave $P'Y$ sa temenom Z koja je istosmerna sa polupravom YP'. Ako su tačka Q i poluprava x sa raznih strana prave $P'Y$, označimo sa X sliku tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$ (u protivnom, ne postoji rešenje za izabranu rotaciju $\mathcal{R}$ i presečnu tačku Y).

Dokaz: Tačka Y, na osnovu konstrukcije, pripada krugu k. Tačka X je, na osnovu konstrukcije, slika tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$, pa tačka X pripada krugu k i ugao $\angle XOY$ podudaran datom uglu ω.

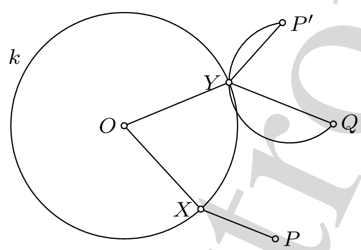
Na osnovu konstrukcije, poluprava YP' se u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$ preslikava na polupravu XP (i poluprava XP se u rotaciji $\mathcal{R}$ preslikava na polupravu YP'), pa poluprave x i y zahvataju ugao ω. Na osnovu konstrukcije, poluprava YQ zahvata sa polupravom YP' ugao ω i sa iste je strane prave $P'Y$ kao i poluprava x, ili poluprava YQ zahvata sa polupravom YP' ugao ω i sa iste je strane prave $P'Y$ kao i poluprava x, pa, u oba slučaja, važi $YQ \| PX$.

Dakle, tačke X i Y pripadaju krugu k i važi $PX \| QY$ i $\angle XOY \cong w$, što je i trebalo dokazati.

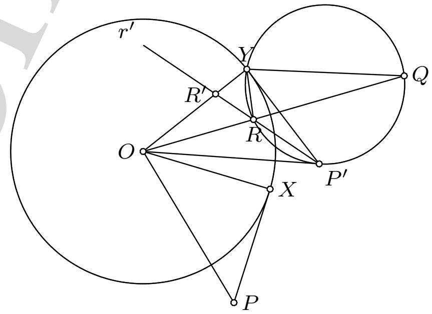
Diskusija: Lukovi iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom ω, odnosno $\pi - \omega$ (po dva za svaki ugao) pripadaju dvama krugovima (koji sadrže tačke P' i Q), pa je broj presečnih tačaka tih lûkova i kruga k najviše četiri.

Za obe moguće rotacije $\mathcal{R}$, u zavisnosti od broja presečnih tačaka kruga k i skupa tačaka iz kojih se duž $P'Q$ vidi pod uglom ω ili pod uglom $\pi - \omega$ moguće je da rešenje ne postoji, da postoji jedno, dva, tri ili četiri rešenja.

Dakle, u zavisnosi od međusobnog odnosa datih tačaka P i Q, kruga k i datog ugla ω, moguće je da zadatak nema rešenja ili da ima između jednog i osam rešenja.



Slika 57



Slika 58

58. *Lema 1:* Ako je tačka P između temena A i B trougla $\triangle ABC$, onda važi $\angle BPC > BAC$.

Dokaz leme 1: Ugao $\angle BPC$ je spoljašnji ugao trougla $\triangle ACP$ koji odgovara temenu P, pa, na osnovu teoreme **11.11** važi $\angle BPC > \angle PAC = \angle BAC$. $\square$

Lema 2: Ako tačka Q pripada unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$, onda važi

$\angle BQC > \angle BAC$.

Dokaz leme 2: Neka je tačka P presečna tačka prave CQ i ivice AB. Tačka Q pripada unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$, pa važi $\mathcal{B}(A,P,B)$ i, na osnovu leme **1**, sledi $\angle BPC > BAC$. Tačka Q je između temena C i P trougla $\triangle CBP$, pa na osnovu leme **1** sledi $\angle BQC > \angle BPC$. Iz $\angle BPC > BAC$ i $\angle BQC > \angle BPC$ sledi $\angle BQC > BAC$. □

Pomoćna konstrukcija — konstrukcija lûka za čiju svaku tačku X važi $\angle AXB = \alpha$ (gde su A i B date tačke, a α dati ugao manji od opruženog ugla):

Videti opis pomoćne konstrukcije u rešenju **35**. □

Analiza: Pretpostavimo da tačke X i Y zadovoljavaju uslove zadatka. Neka je $\mathcal{R}$ rotacija sa središtem O za usmeren ugao $\angle XOY$ (taj ugao podudaran je uglu ω). U toj rotaciji tačka X preslikava se u tačku Y. Neka je P' slika tačke P u rotaciji $\mathcal{R}$. U rotaciji ugao $\angle OPX$ preslikava se u ugao $\angle OP'Y$, pa važi $\angle OP'Y - \angle OQY = \angle OPX - \angle OQY = \delta$, odakle sledi $\angle OQY = \angle OP'Y - \delta$. Orijentisani trougao $\triangle OPX$ se u rotaciji $\mathcal{R}$ (koja je direktna izometrija) preslikava na istosmerni orijentisani trougao $\triangle OP'Y$, pa, kako su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle OPX$ istosmerni, sledi da su istosmerni i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ i da su tačke P' i Q sa iste strane prave OY. Neka je r' poluprava sa temenom P' koja pripada unutrašnjosti ugla $\angle OP'Y$ i zahvata sa polupravom $P'O$ ugao δ i neka je r prava koja sadrži polupravu r'.

Neka je R' presečna tačka prave OY i poluprave r'. Ugao $\angle OP'Y$ veći je od ugla $\angle OQY$, pa su tačke P' i Q različite. Poluprave $P'O$ i $P'R'$ zahvataju ugao δ, pa, kako poluprava $P'R'$ pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave $P'O$ i $P'Y$, sledi $\angle R'P'Y = \angle OP'Y - \angle OP'R' = \angle OP'Y - \delta$. Iz $\angle OQY = \angle OP'Y - \delta$ i $\angle R'P'Y = \angle OP'Y - \delta$ sledi da su uglovi $\angle OQY$ i $\angle R'P'Y$ podudarni. Poluprava r' pripada uglu $\angle OP'Y$, pa važi $\mathcal{B}(O,R',Y)$ i orijentisani trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle R'P'Y$ su istosmerni.

Pretpostavimo da su prave r i OQ paralelne.

(1) Na osnovu leme **1**, važi $\mathcal{B}(Q,P',Y)$, pa iz $OQ \| R'P'$ i $\angle OQY = \angle R'P'Y$ sledi da tačka Y pripada pravoj QP'.

Pretpostavimo da prave r i OQ nisu paralelne. Neka je R presečna tačka pravih r i OQ (ako one nisu paralelne). Razlikujemo sledeće slučajeve:

(2) Tačke P' i R su identične: Ugao $\angle OP'Y$ veći je od ugla $\angle OQY$, pa, na osnovu leme **1**, važi raspored $\mathcal{B}(O,P,Q)$. Važi $\angle YPQ = \pi - \angle OP'R' - \angle R'PY = \pi - \delta - \angle OQY$, pa je $\angle P'QY = \pi - \angle YPQ - \angle PQY = \pi - (\pi - \delta - \angle OQY) - \angle OQY = \delta$. Dakle, tačka Y pripada lûku iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom δ i sa suprotne je strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O.

(3) Tačke Q i R su identične: Ugao $\angle OP'Y$ veći je od ugla $\angle OQY$, pa, na osnovu leme **2**, tačka P pripada unutrašnjosti trougla $\triangle OQY$ i važi $\mathcal{B}(R',P,Q)$. Važi $\angle YP'Q = \pi - \angle R'P'Y = \pi - \angle OQY$ i $\angle P'QY = \angle OQY - \angle OQY = \angle OQY - (\pi - \angle OP'Q - \angle P'OQ) = \angle OQY - (\delta - \angle P'OQ) = \angle OQY + \angle P'OQ - \delta$, pa je $\angle P'YQ = \pi - \angle YP'Q - \angle P'QY =$

$\pi - (\pi - \angle OQY) - (\angle OQY + \angle P'OQ - \delta) = \delta - \angle P'OQ$. Dakle, tačka Y pripada lûku iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom $\delta - \angle P'OQ$ i sa suprotne je strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O.

(4) Tačke Q, P' i R su različite; razmatramo četiri slučaja:

(a) Tačka R pripada otvorenim polupravama r' i QO: Tačka R pripada polupravoj $P'R'$, pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ istosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ istosmerni. Tačka R pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ istosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su istosmerni i trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ istosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa iste strane prave RY. Duž RY vidi se iz tačaka Q i P' pod podudarnim uglovima ($\angle RQY \cong \angle OQY \cong \angle R'P'Y \angle RP'Y$) i tačke Q i P' su iste strane prave RY, pa sledi da tačke R, Y, Q i P' pripadaju jednom krugu.

(b) Tačka R pripada otvorenoj polupravoj QO i ne pripada polupravoj r': Tačka R ne pripada polupravoj $P'R'$ (važi $\mathcal{B}(R, P', R')$, pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni. Tačka R pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ istosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ suprotnosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa raznih strana prave RY. Ugao $\angle R'P'Y$ podudaran je uglu $\angle OQY$, pa iz $\mathcal{B}(R, P', R')$ sledi $\angle RP'Y = \pi - \angle R'PY = \pi - \angle OQY = \pi - \angle RQY$. Duž RY vidi se iz tačaka Q i P' pod uglovima čiji je zbir jednak opruženom uglu i tačke Q i P' su raznih strana prave RY, pa sledi da tačke R, Y, Q i P' pripadaju jednom krugu.

(c) Tačka R ne pripada polupravama r' i QO i različita je od tačaka Q i P': Tačka R ne pripada polupravoj $P'R'$ (važi $\mathcal{B}(R, P', R')$, pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni. Tačka R ne pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ suprotnosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su i trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ istosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa iste strane prave RY. Ugao $\angle R'P'Y$ podudaran je uglu $\angle OQY$, pa iz $\mathcal{B}(R, P', R')$ sledi $\angle RP'Y = \pi - \angle R'P'Y = \pi - \angle OQY$. Iz $\mathcal{B}(O, Q, R')$ sledi $\angle RQY = \pi - \angle OQY$. Dakle, duž RY vidi se iz tačaka Q i P' pod podudarnim uglovima i tačke Q i P' su iste strane prave RY, pa sledi da tačke R, Y, Q i P' pripadaju jednom krugu.

(d) Tačka R pripada otvorenoj polupravoj r' i ne pripada polupravoj QO: Tačka R ne pripada polupravoj QO, pa je sa iste strane prave OY kao i tačke Q i P'. Tačka R, dakle, pripada unutrašnjosti trougla $\triangle OP'Y$, pa je, na osnovu leme **2**, $\angle ORY > OP'Y$. Tačka Q je između tačaka O i R, pa je, na osnovu leme **1**, $\angle OQY > \angle ORY$, odakle sledi $\angle OQY > \angle OP'Y$, što je kontradikcija. Dakle, ovaj slučaj je nemoguć.

Dakle, u slučaju (1), tačka Y je presečna tačka kruga k i prave QP'. U slučaju (2), tačka Y je presečna tačka kruga k i lûka iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom δ i sa suprotne je strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O. U slučaju (3), tačka Y je presečna tačka kruga k i lûka iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom $\delta - \angle P'OQ$ i sa suprotne je strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O. U slučajevima (4a), (4b) i (4c) tačke P', Q, Y i R pripadaju jednom krugu, tj. tačka Y je presečna tačka kruga k i opisanog kruga trougla $\triangle P'QY$.

Tačka X je slika tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$.

Konstrukcija: Neka je $\mathcal{R}$ rotacija sa središtem O za ugao ω (za jednu od dve moguće orijentacije). Označimo sa P' sliku tačke P u rotaciji $\mathcal{R}$. Konstruišimo polupravu r' sa temenom P' takvu da zahvata sa polupravom $P'O$ ugao δ i sa iste je strane prave OP' kao i tačka Q. Označimo sa r pravu koja sadrži polupravu r'.

Ako su tačke P' i Q identične, na osnovu analize, rešenje zadatka ne postoji.

Pretpostavimo da su prave r i OQ paralelne.

(1) Označimo sa Y (jednu) presečnu tačku prave $P'Q$ i kruga k takvu da je $\mathcal{B}(Q, P', Y)$ (ako takva tačka ne postoji, na osnovu analize sledi da ne postoji rešenje zadatka).

Pretpostavimo da prave r i OQ nisu paralelne. Označimo sa R presečnu tačku prave r i prave OQ. Razlikujemo sledeće slučajeve:

(2) Tačke P' i R su identične: Ako važi $\mathcal{B}(O, Q, P')$, na osnovu analize, ne postoji rešenje zadatka. U suprotnom, konstruišimo, na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, lûk $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom δ i koji je sa suprotne strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O. Označimo sa Y (jednu) presečnu tačku tog lûka i kruga k.

(3) Tačke Q i R su identične: Ako važi $\mathcal{B}(R', Q, P')$ (gde je R' presečna tačka poluprave r' i prave OY), onda, na osnovu analize, rešenje zadatka nepostoji. U suprotnom, konstruišimo, na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, lûk $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom $\delta - \angle P'OQ$ i koji je sa suprotne strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O. Označimo sa Y (jednu) presečnu tačku tog lûka i kruga k.

(4) Ako su tačke P' i Q različite od tačke R: Ako R pripada otvorenoj polupravoj r' i ne pripada polupravoj QO, na osnovu analize, rešenje zadatka ne postoji. U suprotnom, konstruišimo presečnu tačku O' medijsatrisa duži $P'R$ i $P'Q$. Konstruišimo krug k' sa središtem O' koji sadrži tačku P'. Označimo sa Y (jednu) presečnu tačku krugova k i k'.

Ako su trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle OP'Y$ istosmerni (tj. ako su tačke Q i P' sa iste strane prave OY), označimo sa X sliku tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$.

Dokaz: Tačka Y, na osnovu konstrukcije, pripada krugu k. Tačka X je, na osnovu konstrukcije, slika tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$, pa tačka X pripada krugu k i ugao $\angle XOY$ podudaran je datom uglu ω. Tačka P je, na osnovu konstrukcije, slika tačke Y u rotaciji $\mathcal{R}^{-1}$, pa je ugao $\angle OP'Y$ podudaran uglu $\angle OPX$.

Trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle OP'Y$ istosmerni tj. tačke Q i P' su sa iste strane prave OY. Na osnovu konstrukcije, poluprava r' pripada uglu $\angle OP'Y$ i zahvata sa polupravom $P'O$ ugao δ, pa sa polupravom $P'Y$ zahvata ugao $\angle OP'Y - \delta = \angle OPX - \delta$. Potrebno je, dakle, dokazati da poluprava r' zahvata sa polupravom $P'Y$ ugao podudaran uglu $\angle OQY$, tj. ako je R' presečna tačka prave OY i poluprave r', poterbno je dokazati da važi $\angle R'P'Y = \angle OQY$.

Pretpostavimo da su prave r i OQ paralelne.

(1) Na osnovu konstrukcije tačka Y pripada pravoj QP' i važi $\mathcal{B}(Q, P', Y)$, pa kako su tačke P' i Q sa iste strane prave OY, iz $QO \| P'R'$ sledi $\angle R'P'Y \cong \angle OQY$.

Pretpostavimo da prave r i OQ nisu paralelne. Pretpostavimo da tačke P' i R identične ili da su tačke Q i R identične:

(2) Tačke P' i R su identične: Na osnovu konstrukcije, tačka Y pripada lûku $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom δ koji je sa suprotne strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O i važi $\mathcal{B}(O, P', Q)$. Dakle, važi $\angle P'YQ = \delta$, pa je $\angle R'P'Y = \pi - \angle OP'R' - \angle YP'Q = \pi - \delta - (\pi - \angle P'YQ - \angle P'QY) = \pi - \delta - (\pi - \delta - \angle P'QY) = \angle P'QY$.

(3) Tačke Q i R su identične: Na osnovu konstrukcije, tačka Y pripada lûku $\hat{k}$ iz čijih se tačaka duž $P'Q$ vidi pod uglom $\delta - \angle P'OQ$ koji je sa suprotne strane prave $P'Q$ u odnosu na tačku O i važi $\mathcal{B}(R', P', Q)$. Dakle, važi $\angle P'YQ = \delta - \angle P'OQ$, pa je $\angle R'P'Y = \angle P'QY + \angle P'YQ = (\angle OQY - \angle OQP') + (\delta - \angle P'OQ) = \angle OQY + (\pi - \angle P'OQ - \angle OP'Q) + \delta - \angle P'OQ = \angle OQY + \pi - \angle P'OQ - (\pi - \angle OP'R') + \delta - \angle P'OQ = \angle OQY + \pi - (\pi - \delta) + \delta = \angle OQY$.

(4) Pretpostavimo da prave r i OQ nisu paralelne i pretpostavimo da tačke P', Q i R različite. Krug k' je, na osnovu konstrukcije, opisani krug trougla $\triangle P'QR$ i tačka Y mu pripada. Dakle, tačke Q, P', Y i R pripadaju jednom krugu. Na osnovu konstrukcije, tačka R pripada polupravoj QO ili ne pripada polupravoj r' i trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle OP'Y$ su istosmerni. Razlikujemo tri slučaja:

    (a) Tačka R pripada polupravama r' i QO: Tačka R pripada polupravoj $P'R'$, pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ istosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ istosmerni. Tačka R pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ istosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su istosmerni i trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ istosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa iste strane prave RY. Tačke Q, P', Y i R pripadaju jednom krugu, pa se duž RY vidi iz tačaka Q i P' pod podudarnim uglovima, tj. $\angle RQY = \angle RP'Y$. Kako tačka R pripada polupravoj r', sledi da poluprava r' zahvata sa polupravom $P'Y$ ugao podudaran uglu $\angle OQY$.

(b) Tačka R pripada polupravoj QO i ne pripada polupravoj r': Tačka R ne pripada polupravoj $P'R'$ (važi $\mathcal{B}(R, P', R')$, pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni. Tačka R pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ istosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ suprotnosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa raznih strana prave RY. Tačke Q, P', Y i R pripadaju jednom krugu, pa se duž RY vidi se iz tačaka Q i P' pod uglovima čiji je zbir jednak opruženom uglu, tj. $\angle RP'Y = \pi - \angle RQY$. Iz $\mathcal{B}(R, P', R')$ sledi $\angle R'P'Y = \pi - \angle RPY = \angle RQY = \angle OQY$. tj. poluprava r' zahvata sa polupravom $P'Y$ ugao podudaran uglu $\angle OQY$.

(c) Tačka R ne pripada polupravama r' i QO: Tačka R ne pripada polupravoj $P'R'$ (važi $\mathcal{B}(R, P', R')$), pa su orijentisani trouglovi $\triangle R'P'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni, odakle sledi da su i trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle RP'Y$ suprotnosmerni. Tačka R ne pripada polupravoj OQ, pa su orijentisani trouglovi $\triangle OQY$ i $\triangle RQY$ suprotnosmerni. Trouglovi $\triangle OP'Y$ i $\triangle OQY$ su istosmerni, pa sledi da su i trouglovi $\triangle RP'Y$ i $\triangle RQY$ istosmerni, tj. tačke Q i P' nalaze se sa iste strane prave RY. Tačke Q, P', Y i R pripadaju jednom krugu, pa se duž RY vidi iz tačaka Q i P' pod podudarnim uglovima, tj. $\angle RQY = \angle RP'Y$. Iz $\mathcal{B}(R, P', R')$ i $\mathcal{B}(O, Q, R')$ sledi $\angle R'P'Y = \pi - \angle RP'Y = \pi - \angle RQY = \angle OQY$, tj. poluprava r' zahvata sa polupravom $P'Y$ ugao podudaran uglu $\angle OQY$.

U svakom od slučajeva, poluprava r' zahvata sa polupravom $P'Y$ ugao podudaran uglu $\angle OQY$, pa je $\angle OPX = \angle OP'Y = \delta + \angle OQY$, tj. $\angle OPX - \angle OQY = \delta$.

Dakle, tačke X i Y pripadaju krugu k i važi $\angle XOY \cong w$ i $\angle OPX - \angle OQY = \delta$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Za obe moguće rotacije $\mathcal{R}$, u zavisnosti od broja presečnih tačaka krugova k i prave, odnosno lûka koji se koriste u konstrukciji, moguće je da rešenje ne postoji, da postoji jedno ili da postoje dva rešenja.

Dakle, u zavisnosi od međusobnog odnosa datih tačaka P i Q, kruga k i datog ugla ω, moguće je da zadatak nema rešenja ili da ima između jednog i četiri rešenja.

59. Nazovimo *pozitivnom* orijentaciju trougla $\triangle O_aO_bO_c$, a *negativnom* suprotnu orijentaciju.

Analiza: Pretpostavimo da trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle O_aO_bO_c$ isto su orijentisani. U rotaciji $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru tačka A preslikava se u tačku B. U rotaciji $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ u negativnom smeru tačka B preslikava se u tačku C. U rotaciji $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}$ u negativnom smeru tačka C preslikava se u tačku A. Dakle, u kompoziciji $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ tačka A preslikava se u sebe.

Neka je c' poluprava sa temenom O_c takva da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave c' i O_cO_a podudaran uglu $\pi/4$ i neka je c prava koja sadrži polupravu c'. Neka je a' poluprava sa temenom O_a takva da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave O_aO_c i a' podudaran uglu $\pi/4$ i neka je a prava koja sadrži polupravu a'. Neka je X presečna tačka polupravih c' i a'. Poluprave a' i c' su sa iste strane prave O_cO_a i sa njom zahvataju uglove $\pi/4$, pa se prave c i a seku pod uglom $\pi - \pi/4 - \pi/4$, tj. prave a i c su međusobno normalne. Važi

$$\mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2} = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{O_cO_a} \circ \mathcal{S}_{O_cO_a} \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_X \, .$$

Dakle, važi $\mathcal{I}(A) = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{S}_X(A) = A$, pa ako su tačke O_b i X identične, onda je $\mathcal{R}_{O_b,3\pi/2}(A) = A$, odakle sledi da su tačke A i O_b identične i, dalje, da su tačke A i C identične (jer je $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}(C) = A$), što je nemoguće. Dakle, tačke O_b i X nisu identične.

Neka je x prava koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj XO_b. Neka je b' poluprava sa temenom O_b takva da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave O_bX i b' podudaran uglu $\pi/4$ i neka je b prava koja sadrži polupravu b'. Centralna refleksija $\mathcal{S}_X$ može biti reprezentovana kao $\mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_x$, a rotacija $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}$ u negativnom smeru kao $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{O_bX}$, pa za kompoziciju $\mathcal{I}$ važi

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2} = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{S}_X = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_x \, .$$

Tačka A je invarijantna tačka izometrije $\mathcal{I}$, tj. kompozicije $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_x$ (koja je rotacija jer se prave x i b seku). Odatle sledi da je tačka A presečna tačka pravih b i x. Tačka B je slika tačke A u rotaciji $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru. Tačka C je slika tačke B u rotaciji $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ u negativnom smeru.

Konstrukcija: Konstruišimo polupravu c' sa temenom O_c takvu da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave c' i O_cO_a podudaran uglu $\pi/4$ i označimo sa c pravu koja sadrži polupravu c'. Konstruišimo polupravu a' sa temenom O_a takvu da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave O_aO_c i a' podudaran uglu $\pi/4$ i označimo sa a pravu koja sadrži polupravu a'. Poluprave c' i a' su sa iste strane prave O_cO_a i seku se u nekoj tački. Označimo njihovu presečnu tačku sa X.

Ukoliko su tačke O_b i X identične, rešenje zadatka ne postoji. Ukoliko tačke O_b i X nisu identične, konstruišimo pravu x koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj XO_b. Konstruišimo polupravu b' sa temenom O_b takvu da je negativno orijentisan konveksan ugao koji zahvataju poluprave O_bX i b' podudaran uglu $\pi/4$ i označimo sa b pravu koja sadrži polupravu b'.

Označimo sa A presečnu tačku pravih x i b. Konstruišimo tačku B koja je slika tačke A u rotaciji $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru. Konstruišimo tačku C koja je slika tačke B u rotaciji $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ u negativnom smeru.

Ako je trougao $\triangle ABC$ pozitivno orijentisan, onda on zadovoljava uslove zadatka (u suprotnom, rešenje zadatka ne postoji).

Dokaz: Na osnovu konstrukcije, tačka B je slika tačke A u rotaciji $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru, pa je tačka O_c središte kvadrata nad ivicom AB (jednog od dva takva kvadrata) i trougao $\triangle ABO_c$ je negativno orijentisan. Kako je trougao $\triangle ABC$ pozitivno orijentisan, tačke O_c i C su sa raznih strana prave

AB, pa je tačka O_c zaista središte kvadrata konstruisanog spolja nad ivicom AB trougla $\triangle ABC$.

Na osnovu konstrukcije je tačka C slika tačke B u rotaciji $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ u negativnom smeru, pa je tačka O_a središte kvadrata nad ivicom BC (jednog od dva takva kvadrata) i trougao $\triangle BCO_a$ je negativno orijentisan. Trougao $\triangle ABC$ je pozitivno orijentisan, pa su tačke O_a i A sa raznih strana prave BC, odakle sledi da je tačka O_a zaista središte kvadrata konstruisanog spolja nad ivicom BC trougla $\triangle ABC$.

Potrebno je još dokazati da je tačka O_b središte kvadrata konstruisanog spolja nad ivicom BC trougla $\triangle ABC$.

Na osnovu konstrukcije sledi da rotacija $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru može biti reprezentovana kao $\mathcal{S}_{O_cO_a} \circ \mathcal{S}_c$. Slično, rotacija $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ u negativnom smeru može biti reprezentovana kao $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{O_cO_a}$. Pored toga, prave a i c se seku u tački X i međusobno su normalne, pa važi $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2} = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{O_cO_a} \circ \mathcal{S}_{O_cO_a} \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_X$. Na osnovu konstrukcije sledi da centralna refleksija $\mathcal{S}_X$ može biti reprezentovana kao kompozicija $\mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_x$, a rotacija $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}$ u negativnom smeru kao $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{O_bX}$. Dakle, za kompoziciju $\mathcal{I}$ rotacija $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}$, $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ i $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ u negativnom smeru važi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2} = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2} \circ \mathcal{S}_X = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_{O_bX} \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_x \ .$$

Trougao $\triangle O_bXA$ je pozitivno orijentisan i iz $\angle AXO_b = \pi/2$ i $\angle XO_bA = \pi/4$ sledi $\angle XAO_b = \pi/4$. Dakle, $\mathcal{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{R}_{A,\pi/4}$, (gde je $\mathcal{R}_{A,\pi/4}$ rotacija u pozitivnom smeru), pa je $\mathcal{I}(A) = A$.

S druge strane, na osnovu konstrukcije, je $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}(A) = B$ i $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}(B) = C$ ($\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ i $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2}$ su rotacije u negativnom smeru), pa je $\mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2}(A) = \mathcal{R}_{O_a,\pi/2}(B) = C$. Dakle, $A = \mathcal{I}(A) = \mathcal{R}_{O_b,\pi/4} \circ \mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2}(A) = \mathcal{R}_{O_b,\pi/2}(C)$, pa se rotacijom $\mathcal{R}_{O_b,\pi/2}$ u negativnom smeru tačka C preslikava u tačku A, odakle sledi da je O_b središte kvadrata nad ivicom CA (jednog od dva takva kvadrata) i trougao $\triangle CAO_b$ je negativno orijentisan. Trougao $\triangle ABC$ je pozitivno orijentisan, pa su tačke O_b i B sa raznih strana prave CA, odakle sledi da je tačka O_b zaista središte kvadrata konstruisanog spolja nad ivicom CA trougla $\triangle ABC$, što je i trebalo dokazati.

Diskusija: Ukoliko je konstruisana tačka X različita od tačke O_b i ukoliko je trougao $\triangle ABC$ pozitivno orijentisan, onda je on (jedinstveno) rešenje. U suprotnom, ne postoji rešenje zadatka. Odredimo međusobni odnos datih tačaka O_a, O_b, O_c za koji postoji rešenje zadatka.

Ukoliko je trougao $\triangle ABC$ pozitivno orijentisan, on zadovoljava uslove zadatka; ukoliko je negativno orijentisan, on ne zadovoljava uslove zadatka. Granični je slučaj kada su tačke A, B i C kolinearne. Iz

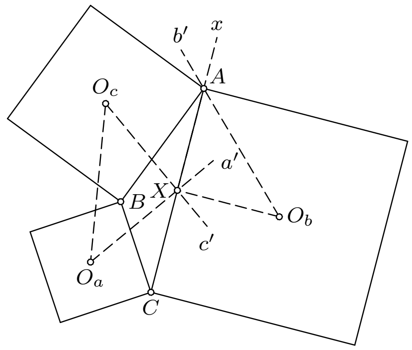
$$C = \mathcal{R}_{O_a,\pi/2} \circ \mathcal{R}_{O_c,\pi/2}(A) = \mathcal{S}_X(A),$$

sledi da je tačka X središte duži AC i da su tačke A, X, C kolinearne. Dakle, tačke A, B i C su kolinearne ako i samo su tačke A, B i X kolinearne. Pretpostavimo da su tačke A, B i X kolinearne. Trougao $\triangle O_cO_aX$ je pozitivno orijentisan i ima jedan ugao prav i dva ugla jednaka $\pi/4$: $\angle O_aXO_c = \pi/2$,

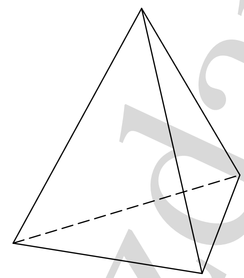
$\angle XO_cO_a = \angle O_cO_aX = \pi/4$, pa je $O_cX = O_aX = O_cO_a/\sqrt{2}$. U rotaciji $\mathcal{R}_{O_c,\pi/2}$ (u negativnom smeru) tačka A preslikava se u tačku B. Trougao $\triangle AO_cB$ je, dakle, pozitivno orijentisan i ima jedan ugao prav i dva ugla jednaka $\pi/4$. Ukoliko je trougao $\triangle AO_cX$ pozitivno orijentisan, onda su tačke B i X sa iste strane prave AO_c, odnosno sa iste strane tačke A, pa je $\angle O_cAX = \angle O_cAB = \pi/4$, odakle sledi da tačka A pripada skupu tačaka iz kojih se duž O_cX vidi pod uglom $\pi/4$ i za čiju je svaku tačku T trougao $\triangle O_cXT$ pozitivno orijentisan. Taj skup tačaka je lûk kruga k' koji sadrži tačke O_c i X i sa središtem S', gde za tačku S' važi da je trougao $\triangle S'O_cX$ pozitivno orijentisan i da je $\angle S'O_cX = \angle S'XO_c = \pi/4$ (odakle sledi $S'O_c = S'X = O_cX/\sqrt{2} = (O_cO_a/\sqrt{2})/\sqrt{2} = O_cO_a/2$). Ukoliko je trougao $\triangle AO_cX$ negativno orijentisan, onda su tačke B i X sa raznih strana tačke A, pa je $\angle O_cAX = 3\pi/4$, odakle sledi da tačka A pripada skupu tačaka iz kojih se duž O_cX vidi pod uglom $3\pi/4$ i za čiju je svaku tačku T trougao $\triangle O_cXT$ negativno orijentisan. Taj skup tačaka je drugi lûk kruga k'. Dakle, tačke A, B i X (odnosno tačke A, B i C) su kolinearne ako i samo ako tačka A pripada krugu k'. Trougao $\triangle AXO_b$ je pozitivno orijentisan i važi $XO_b \cong XA$ i $\angle AXO_b = \pi/2$, pa se u rotaciji $\mathcal{R}_{X,\pi/2}$ u negativnom smeru tačka A preslikava u tačku O_b. Neka je tačka S_b slika tačke S', a krug k_b slika kruga k' u rotaciji $\mathcal{R}_{X,\pi/2}$ (u negativnom smeru). Tačke A, B i X su kolinearne ako i samo ako tačka A pripada krugu k', tj. ako i samo ako tačka O_b pripada krugu k_b. Za središte kruga k_b — tačku S_b — važi $S_bX = S'X = O_cO_a/2$. Trougao $\triangle O_cXO_a$ je orijentisan negativno, a trougao $\triangle O_cXS'$ pozitivno, pa su tačke S' i O_a sa raznih strana prave O_cX, odakle sledi $S'X \| O_cO_a$ (jer je $\angle XO_cO_a = \angle O_cXS' = \pi/4$). Prava $S'X$ se u rotaciji $\mathcal{R}_{X,\pi/2}$ preslikava u pravu S_bX, pa je $S_bX \perp S'X$. Iz $S'X \| O_cO_a$ i $S_bX \perp S'X$ sledi $S_bX \perp O_cO_a$). Prava S_bX sadrži tačku X i normalna je na pravoj O_cO_a. Ako je tačka P središte duži O_cO_a, onda je i XP prava koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj O_cO_a (jer je $O_cX = O_aX$), pa, kako je takva prava jedinstvena (**T12.1**), sledi da prava S_bX sadrži tačku P, tj. prava S_bP je medijatrisa duži O_cO_a. Za tačku S_b važi: trougao $\triangle O_cO_aS_b$ je pozitivno orijentisan, $\angle S_bPO_a = \pi/2$ i $S_bP = S_bX + XP = O_cO_a/2 + O_cX/\sqrt{2} = O_cO_a/2 + O_cO_a/2 = O_cO_a$ (čime je tačka S_b određena na osnovu datih tačaka O_a, O_b, O_c). Središte kruga k_b je tačka S_b, a poluprečnik jednak $O_cO_a/2$ (čime je krug k_b određen na osnovu datih tačaka O_a, O_b, O_c). Tačke A, B i C su kolinearne ako i samo ako tačka O_b pripada krugu k_b.

Trougao $\triangle ABC$ je pozitivno orijentisan ako i samo ako tačka O_b pripada unutrašnjosti kruga k_b. Tada su tačke X i O_b različite i trougao $\triangle ABC$ zadovoljava uslove zadatka. Dakle, rešenje zadatka postoji i jedinstveno je ako i samo ako tačka O_b pripada unutrašnjosti kruga k_b[7].

[7]Ako su krugovi k_a i k_b određeni analogno, analogno se i dokazuje da rešenje zadatka postoji ako i samo ako tačka O_a pripada unutrašnjosti kruga k_a, odnosno ako i samo ako tačka O_c pripada unutrašnjosti kruga k_c. Dakle, tačka O_a pripada unutrašnjosti kruga k_a ako i samo ako tačka O_b pripada unutrašnjosti kruga k_b odnosno ako i samo ako tačka O_c pripada unutrašnjosti kruga k_c.



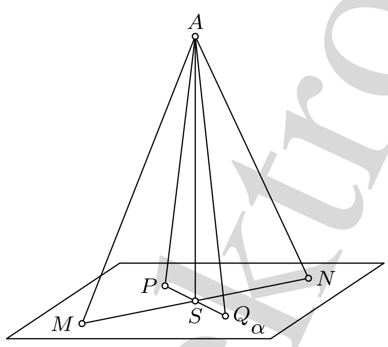
Slika 59



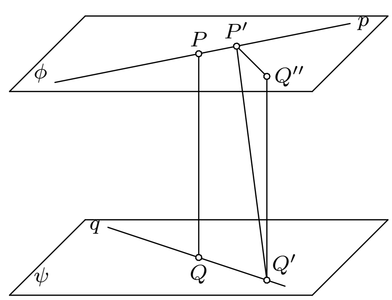
Slika 60

60. U svakoj poliedarskoj površi zbir brojeva ivica za sve pljosni je paran (jer se svaka ivica računa dvaput). Zbir brojeva ivica za pljosni sa parnim brojem ivica je paran (jer je svaki sabirak paran), pa paran mora biti i zbir brojeva ivica za pljosni sa neparnim brojem ivica. Kako su u tom zbiru svi sabirci neparni mora ih biti paran broj. Dakle, broj pljosni sa neparnim brojem ivica je paran. QED

61. Iz $AM \cong AN$, $SM \cong SN$, $AS \cong AS$, na osnovu teoreme **11.15**(iii), sledi da su trouglovi $\triangle AMS$ i $\triangle ANS$ podudarni i da su njihovi odgovarajući uglovi $\angle ASM$ i $\angle ASN$ podudarni. Zbir ova dva ugla jednak je opruženom uglu, pa je svaki od njih prav ($\angle ASM = \angle ASN = \frac{\pi}{2}$), odakle sledi da je prava AS normalna na pravoj MN. Analogno se dokazuje i $AS \perp PQ$. Prava AS ne pripada ravni α, pa kako je normalna na dvema pravama koje pripadaju toj ravni i koje se seku, na osnovu teoreme **12.4**, sledi $AS \perp \alpha$, što je i trebalo dokazati.



Slika 61



Slika 62

62. Neka je ϕ ravan koja je normalna na pravoj PQ i sadrži pravu p, a ψ ravan koja je normalna na pravoj PQ i sadrži pravu q. Neka su P' i Q' tačke pravih p, odnosno q.

$P \neq P'$, $Q = Q'$: Trougao $\triangle PQP'$ je pravougli (sa pravim uglom kod temena P), pa je njegova hipotenuza (duž QP') duža od katete (duž PQ), tj. $PQ < P'Q$.

$P = P'$, $Q \neq Q'$: Analogno prethodnom delu, dokazuje se da važi $PQ < PQ'$.

$P \neq P'$, $Q \neq Q'$: Neka je Q'' podnožje normale iz tačke Q' na ravan ϕ. Iz $Q'Q'' \perp \phi$ i $\psi \| \phi$ sledi $Q'Q'' \perp \psi$ i $Q'Q'' \perp q$. Prava p pripada ravni ϕ, pa iz $Q'Q'' \perp \phi$ sledi $Q'Q'' \perp p$. Tačke P' i Q'' su različite (u suprotnom, prava $Q'Q''$ seče mimoilazne prave p i q i na njima je normalna, što je kontradikcija, jer prava PQ seče mimoilazne prave p i q i na njima je normalna i takva prava je, na osnovu teoreme **25.16** jedinstvena). Dakle, tačke P' i Q'' su različite i prave $Q'Q''$ i $Q''P$ su normalne, pa je trougao $\triangle P'Q'Q''$ pravougli. Hipotenuza trougla $\triangle P'Q'Q''$ (duž $Q'P'$) duža je od katete $Q'Q''$. Kako je $PQ \cong Q'Q''$, sledi da važi $PQ < P'Q'$.

Dakle, ako su P' i Q' tačke pravih p i q i ako nisu identične i tačke P i P' i tačke Q i Q', onda važi $PQ < P'Q'$, što je i trebalo dokazati.

63. *I rešenje:*

Pretpostavimo da tačke A, B, C i D nisu koplanarne, tj. da su prave AB i CD mimoilazne. Mimoilazne prave AB i CD imaju dve različite zajedničke normale (prave BC i DA), što je u suprotnosti sa teoremom **25.16**. Dakle, polazna pretpostavka bila je pogrešna, pa sledi da su tačke A, B, C i D koplanarne.

II rešenje:

Pretpostavimo da tačke A, B, C i D nisu koplanarne. Na osnovu teoreme **13.9**, zbir dvaju ivičnih uglova konveksnog triedra veći je od trećeg ivičnog ugla tog triedra, pa je $\angle DAC + \angle CAB < \angle DAB = \frac{\pi}{2}$. Analogno važi i $\angle DCA + \angle ACB < \angle DCB = \frac{\pi}{2}$. Kako važi i $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ i $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, sledi da za zbir uglova trougla $\triangle ACD$ i $\triangle ABC$ važi:

$$(\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA) + (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) =$$

$$= (\angle DAC + \angle CAB) + (\angle ACD + \angle BCA) + \angle CDA + \angle ABC <$$

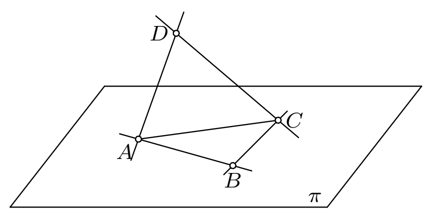
$$< \angle DAB + \angle DCB + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \quad ,$$

što je kontradikcija (jer je zbir uglova dva trougla jednak zbiru četiri prava ugla), pa sledi da je polazna pretpostavka bila pogrešna i da su tačke A, B, C i D koplanarne.

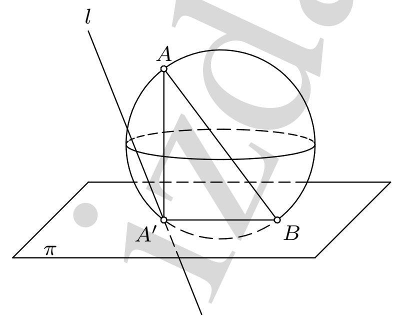
III rešenje:

Pretpostavimo da tačke A, B, C i D nisu koplanarne. Uglovi $\angle ABC$ i $\angle CDA$ su pravi, pa tačke B i D pripadaju sferi nad prečnikom AC. Dakle, središte opisane sfere tetraedra $ABCD$ je središte duži AC. Uglovi $\angle DAB$ i $\angle BCD$ su pravi, pa tačke A i C pripadaju sferi nad prečnikom BD. Dakle, središte opisane sfere tetraedra $ABCD$ je središte duži BD. Postoji tačno jedna opisana sfera tetraedra $ABCD$, pa su središta duži AC i BD identične tačke. Dakle, prave AC i BD se seku, odakle sledi da su tačke A, B, C i D koplanarne, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Dakle, tačke A, B, C i D su koplanarne.



Slika 63

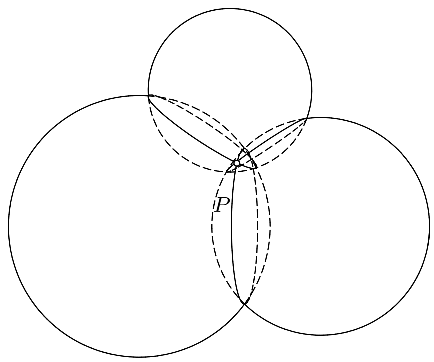


Slika 64

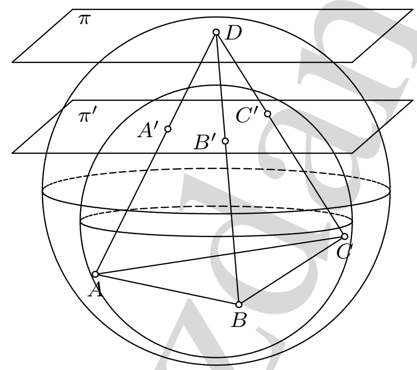
64. Pretpostavimo da ravan π zadovoljava zadate uslove. Neka je A' podnožje normale iz tačke A na ravan π. Važi $AA' \perp A'B$, pa tačka A' pripada sferi s čiji je prečnik duž AB. Dakle, tačka A' je presečna tačka sfere s i prave l. Tražena ravan π je ravan koja sadrži tačku A' i normalna je na pravoj AA'.

65. Od date tri sfere nikoje dve se ne dodiruju. Pretpostavimo suprotno — pretpostavimo da se neke dve sfere dodiruju. Zajednička tangentna ravan tih dveju sfera onda bi sekla treću sferu po krugu (ili bi je dodirivala u tački P). U slučaju da je taj presek krug, tangenta tog kruga u tački P bila bi zajednička tangenta sve tri sfere, što je suprotno pretpostavci zadatka. U slučaju da je pomenuti presek tačka P, bilo koja prava koja sadrži tačku P i pripada zajedničkoj tangentnoj ravni prve dve sfere bila bi zajednička tangenta sve tri sfere, što je suprotno pretpostavci zadatka.

Dakle, dve od datih sfera seku se po krugu koji sadrži tačku P. Taj krug ne može sa trećom sferom da ima samo jednu zajedničku tačku, jer bi, u suprotnom, njegova tangenta u tački P (u ravni kojoj pripada) bila zajednička tangenta sve tri sfere. Tačka preseka tog kruga sa trećom sferom različita od tačke P pripada svim trima sferama, pa, dakle, tri date sfere imaju, pored tačke P, bar još jednu zajedničku tačku. QED



Slika 65



Slika 66

66. *Lema 1:* Ako je t tangenta na opisani krug k trougla $\triangle ABC$ u tački A i t' poluprava sa temenom A koja joj pripada i sa suprotne strane je prave AB u odnosu na tačku C, onda je ugao koji zahvataju poluprave t' i AB podudaran uglu trougla $\triangle ABC$ kod temena C.

Dokaz leme: Neka je O središte kruga k i neka je A' tačka simetrična tački A u odnosu na tačku O. Razlikujemo tri slučaja:

$\angle ACB < \frac{\pi}{2}$**:** Ugao $\angle ACB$ nije prav, pa su tačke A' i B različite. Ugao $\angle ABA'$ je prav i najveći u trouglu $\triangle ABA'$, pa je ugao $\angle AA'B$ oštar. Iz svih tačaka kruga k koje su sa iste strane prave AB kao i tačka C, duž AB vidi se pod uglom $\angle ACB$, a iz svih tačaka kruga k koje su sa suprotne strane, duž AB vidi se pod uglom $\pi - \angle ACB$. Uglovi $\angle ACB$ i $\angle AA'B$ su oštri, a ugao $\pi - \angle ACB$ je tup, pa sledi da su tačke A' i C sa iste strane prave AB i važi $\angle ACB \cong \angle AA'B$. Neka je D presečna tačka pravih $A'B$ i t. Tačke D i A' su sa raznih, a tačke A' i C sa iste strane prave AB, pa sledi da su tačke D i C sa raznih strane prave AB. Trouglovi $\triangle ADB$ i $\triangle ADA'$ su pravougli ($\angle ABD \cong \triangle DAA'$) i imaju jedan ugao zajednički (ugao $\angle ADA'$), pa su im podudarni i uglovi $\angle DAB$ i $\angle DA'A$. Ugao $\angle DA'A$, odnosno ugao $\angle BA'A$ podudaran je uglu $\angle ACB$, pa važi $\angle DAB \cong \angle ACB$, tj. ugao koji zahvataju poluprave t' i AB podudaran je uglu trougla $\triangle ABC$ kod temena C.

$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$**:** Kako je $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, duž AB je prečnik kruga k, pa su tačke A i B identične. Prava t je tangenta na krug k u tački A, pa je $OA \perp t$, odnosno $AB \perp t$, odakle sledi da je ugao koji zahvataju poluprava t' i poluprava AB podudaran uglu trougla $\triangle ABC$ kod temena C.

$\angle ACB > \frac{\pi}{2}$**:** Ugao $\angle ACB$ nije prav, pa su tačke A' i B različite. Ugao $\angle ABA'$ je prav i najveći u trouglu $\triangle ABA'$, pa je ugao $\angle AA'B$ oštar. Iz svih tačaka kruga k koje su sa iste strane prave AB kao i tačka C, duž AB vidi se pod uglom $\angle ACB$, a iz svih tačaka kruga k koje su sa suprotne strane, duž AB vidi se pod uglom $\pi - \angle ACB$. Ugao $\angle ACB$ je tup, a uglovi $\angle AA'B$ i $\pi - \angle ACB$ su oštri, pa sledi da su tačke A' i C sa raznih strane prave

AB i važi $\pi - \angle ACB \cong \angle AA'B$. Neka je D presečna tačka pravih $A'B$ i t. I tačke D i A' i tačke A' i C su sa raznih strana prave AB, pa sledi da su tačke D i C sa iste strane prave AB. Trouglovi $\triangle ADB$ i $\triangle ADA'$ su pravougli ($\angle ABD \cong \triangle DAA'$) i imaju jedan ugao zajednički (ugao $\angle ADA'$), pa su im podudarni i uglovi $\angle DAB$ i $\angle DA'A$. Za ugao $\angle DA'A$ važi $\angle DA'A = \angle BA'A = \pi - \angle ACB$, pa sledi $\angle DAB = \pi - \angle ACB$ i $\angle ACB = \pi - \angle DAB$. Neka je D' proizvoljna tačka prave t takva da sa suprotne strane tačke A u odnosu na tačku A. Tačke D i D' su sa raznih, a tačke D i C su sa iste strane prave AB, pa su tačke D' i C sa raznih strana prave AB. Važi $\angle D'AB + \angle DAB = \pi$, odakle sledi $\angle D'AB = \pi - \angle DAB = \angle ACB$, tj. ugao koji zahvataju poluprave t' i AB podudaran je uglu trougla $\triangle ABC$ kod temena C.

□

Lema 2: Ako proizvoljni krug koji sadrži tačke B i C seče ivice AB i AC trougla $\triangle ABC$ u tačkama B' i C', onda je duž $B'C'$ paralelna tangenti na opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tački A.

Dokaz leme 2: Neka je k opisani krug trougla $\triangle ABC$, neka je t tangenta na krug k u tački A i neka je D njena prozivoljna tačka takva da su tačke D i C sa raznih strana prave AB. Na osnovu leme važi $\angle DAB = \angle ACB$. Četvorougao $BCC'B'$ je tetivan i konveksan, pa važi $\angle BB'C' + \angle BCC' = \pi$, odakle sledi $\angle AB'C' = \pi - \angle BB'C' = \angle BCC' = \angle BCA$. Tačke D i C' su sa raznih strana prave AB, pa iz $\angle DAB = \angle ACB = \angle AB'C'$ sledi da su prave AD i $B'C'$ paralelne, što je i trebalo dokazati. □

Neka je σ opisana sfera tetraedra $ABCD$ i σ_1 sfera koja sadrži tačke A, B, C i seče ivice AD, BD, CD redom u tačkama A', B', C'. Neka je π tangentna ravan na sferu σ u tački A.

Neka je ϕ ravan određena tačkama A, B i D. Ravan ϕ i sfera σ sadrže tačke A, B i D, pa je njihov presek krug k koji takođe sadrži te tačke, tj. k je opisani krug trougla $\triangle ABD$. Ravan π dodiruje sferu σ i pri tome ravni π, ϕ i sfera σ imaju zajedničku tačku D, pa je presek ravni π i ϕ prava t koja je u, ravni ϕ, tangenta na krug k u tački D. Ravan ϕ i sfera σ' sadrže tačke A, B, A' i B', pa je njihov presek krug k' koji takođe sadrži te tačke. Dakle, u ravni ϕ krug k' sadrži tačke A i B i seče ivice AD i BD trougla $\triangle ABD$ u tačkama A' i B' i prava t je tangenta na opisani krug k trougla $\triangle ABD$ u tački D, pa, na osnovu leme **2**, sledi da su prave $A'B'$ i t paralelne. Prava t pripada ravni π, pa iz $A'B' \| t$ sledi $A'B' \| \pi$.

Analogno se dokazuje i $A'C' \| \pi$, pa, kako se prave $A'B'$ i $A'C'$ seku, sledi da je ravan određena tačkama A', B' i C' paralelna ravni π, što je i trebalo dokazati.

67. *Lema 1:* Skup tačaka X euklidske ravni takvih da važi $AX : BX = m : n$ (A i B su date različite tačke, a m i n su date duži) je:

- medijatrisa duži AB, ako je $m = n$;

- krug čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m > n$;
- krug čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(Q,A,P,B)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m < n$.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **3** u rešenju **50**. □

Lema 2: Skup tačaka X prostora takvih da važi $AX : BX = m : n$ (A i B su date različite tačke, a m i n su date duži) je:

- medijalna ravan duži AB, ako je $m = n$;
- sfera čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m > n$;
- sfera čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(Q,A,P,B)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$, ako je $m < n$.

Dokaz leme 2: Označimo sa Φ skup tačaka X prostora takvih da je $AX : BX = m : n$.

$m = n$**:** Dokažimo da je medijalna ravan duži AB skup tačaka koje zadovoljavaju dati uslov (tj. dokažimo da svaka tačka koja pripada medijalnoj ravni duži AB pripada skupu Φ i da svaka tačka koja pripada skupu Φ pripada medijalnoj ravni duži AB).

Pretpostavimo da tačka X pripada medijalnoj ravni duži AB. Važi $AX \cong BX$, pa je $AX : BX = 1 = m : n$, što znači da tačka X pripada skupu Φ.

Pretpostavimo da tačka X pripada skupu Φ, tj. pretpostavimo da važi $AX : BX = m : n = 1$. Neka je π ravan koja sadrži tačke A, B i X (ako su tačke A, B i X kolinearne, neka je π proizvoljna ravan koja sadrži pravu AB). Na osnovu leme **1**, iz $AX : BX = m : n = 1$ sledi da tačka X pripada medijatrisi duži AB (u ravni π), pa je $AX \cong BX$ odakle sledi da tačka X pripada medijalnoj ravni duži AB.

Dakle, skup Φ je medijalna ravan duži AB.

$m > n$**:** Dokažimo najpre da postoje tačke P i Q prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$. Neka je α proizvoljna ravan koja sadrži tačke A i B, neka je p proizvoljna prava ravni α sa temenom A i neka su X, Y i Z tačke te poluprave takve da važi $AX = m$, $\mathcal{B}(A,Y,X,Z)$, $XY = n$, $XZ = n$. Označimo sa P presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BZ. Označimo sa Q presečnu tačku prave AB i prave koja sadrži tačku X i paralelna je pravoj BY. Iz $\mathcal{B}(A,Y,X,Z)$ sledi da važi i $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$. Na osnovu Talesove teoreme važi $AP : BP = AX : XZ = m : n$ i $AQ : BQ = AX : AY = m : n$, odakle sledi da tačke P i Q zadovoljavaju uslov $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$.

Neka je σ sfera čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A,P,B,Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$.

Dokažimo da je sfera σ skup tačaka koje zadovoljavaju dati uslov (tj. dokažimo da svaka tačka koja pripada sferi σ pripada skupu Φ i da svaka tačka koja pripada skupu Φ pripada sferi σ).

Pretpostavimo da tačka X pripada sferi σ. Neka je π ravan koja sadrži tačke A, B i X (ako su tačke A, B i X kolinearne, neka je π proizvoljna ravan koja sadrži pravu AB). Ravan π sadrži tačke A i B, pa sadrži i tačke P i Q i njihovo središte, odakle sledi da je presek ravni π i sfere σ krug k čiji je prečnik duž PQ. Tačka X pripada krugu k, pa, kako je $m > n$, na osnovu leme **1** sledi da za tačku X važi $AX : BX = m : n$, pa tačka X pripada skupu Φ.

Pretpostavimo da tačka X pripada skupu Φ. Neka je π ravan koja sadrži tačke A, B i X (ako su tačke A, B i X kolinearne, neka je π proizvoljna ravan koja sadrži pravu AB). Ravan π sadrži tačke A i B, pa sadrži i tačke P i Q i njihovo središte, odakle sledi da je presek ravni π i sfere σ krug k čiji je prečnik duž PQ. Tačka X pripada skupu Φ, pa za nju važi $AX : BX = m : n$, odakle, kako je $m > n$, na osnovu leme **1** sledi da za tačku X važi da pripada krugu k i sferi σ.

Dakle, skup Φ je sfera čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A, P, B, Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$.

$m < n$**:** Za ovaj slučaju dokaz je analogan dokazu za slučaj $m > n$.

□

Lema 3: Ako su A i B dve različite tačke, skup tačaka X prostora takvih da je ugao $\angle AXB$ prav je sfera čiji je prečnik duž AB bez tačaka A i B.

Dokaz leme 3: Neka je σ sfera čiji je prečnik duž AB i neka je Φ skup tačaka X prostora takvih da je ugao $\angle AXB$ prav.

Pretpostavimo da je tačka X različita od tačaka A i B i da pripada sferi σ. Neka je π proizvoljna ravan koja sadrži tačke A i B. Ravan π sadrži tačke A i B, pa sadrži i njihovo središte, odakle sledi da je presek ravni π i sfere σ krug k čiji je prečnik duž AB. Tačka X pripada ravni π i sferi σ, pa pripada i krugu k, odakle sledi da je ugao $\angle AXB$ prav, pa tačka X pripada skupu Φ.

Pretpostavimo da tačka X pripada skupu Φ. Neka je π proizvoljna ravan koja sadrži tačke A i B. Ravan π sadrži tačke A i B, pa sadrži i njihovo središte, odakle sledi da je presek ravni π i sfere σ krug čiji je prečnik duž AB. Tačka X pripada ravni π i skupu Φ, pa je ugao $\angle AXB$ prav, odakle sledi da je tačka X različita od tačaka A i B i da pripada krugu k odnosno da je tačka X različita od tačaka A i B i da pripada sferi σ.

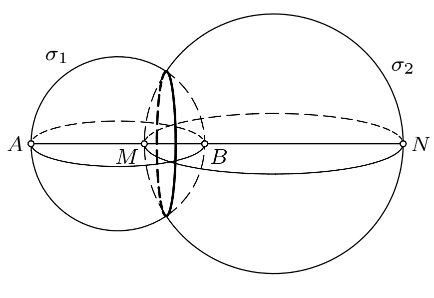
Dakle, skup tačaka X prostora takvih da je ugao $\angle AXB$ prav je sfera čiji je prečnik duž AB bez tačaka A i B. □

Na osnovu leme **3**, skup tačaka X prostora takvih da je ugao $\angle AXB$ prav je sfera σ_2 čiji je prečnik duž AB bez tačaka A i B.

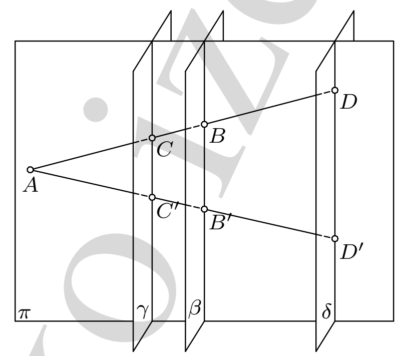
Pretpostavimo da je $m = n$. Na osnovu leme **2**, skup tačaka X prostora takvih da je $AX : BX = m : n = 1$ je medijalna ravan π duži AB. U tom slučaju je, dakle, traženi skup tačaka krug koji je presek ravni π i sfere σ_2.

Pretpostavimo da je $m > n$. Na osnovu leme **2**, skup tačaka X prostora takvih da je $AX : BX = m : n$ je sfera σ_1 čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(A, P, B, Q)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$. Dakle, traženi skup tačka je krug koji je presek sfera σ_1 i σ_2.

Pretpostavimo da je $m < n$. Na osnovu leme **2**, skup tačaka X prostora takvih da je $AX : BX = m : n$ je sfera σ_1 čiji je prečnik duž PQ gde su P i Q tačke prave AB takve da važi $\mathcal{B}(Q, A, P, B)$ i $AP : BP = AQ : BQ = m : n$. Dakle, traženi skup tačka je krug koji je presek sfera σ_1 i σ_2.



Slika 67



Slika 68

68. *Lema 1:* Za različite kolinearne tačke A, B i C postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako i samo ako tačka C nije središte duži AB.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **6** u rešenju **51**. □

Lema 2: Ako tačka C nije središte duži AB, onda postoji tačno jedna tačka D takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Dokaz leme 2: Ako tačka C nije središte duži AB, na osnovu leme **1**, sledi da postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Pretpostavimo da postoji tačka D' različita od tačke D takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D')$. Iz $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ i $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$ sledi $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$. Tačke A, B i D su različite, pa važi jedan od sledeća tri rasporeda: $\mathcal{B}(D, A, B)$, $\mathcal{B}(A, D, B)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$.

Pretpostavimo da važi raspored $\mathcal{B}(D, A, B)$. Duži AD i DB su suprotno orijentisane, pa je vrednost $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ negativna. Dakle, i vrednost $\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$ je negativna, pa su duži AD' i $D'B$ suprotno orijentisane, tj. važi jedan od dva rasporeda: $\mathcal{B}(D', A, B)$, $\mathcal{B}(A, B, D')$.

Ako važi raspored $\mathcal{B}(D', A, B)$, onda, kako su tačke D i D' različite, važi jedan od dva slučaja: $\mathcal{B}(D, D', A, B)$, $\mathcal{B}(D', D, A, B)$. Ako je $\mathcal{B}(D, D', A, B)$, onda je $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{AD}{DB} = -\frac{AD'+DD'}{BD'+DD'}$ i $\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}} = -\frac{AD'}{D'B}$, pa iz $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$ sledi $\frac{AD'+DD'}{BD'+DD'} = \frac{AD'}{D'B}$, odakle je $AD' = BD'$, što je nemoguće (jer važi $\mathcal{B}(D', A, B)$). Analogno se dokazuje da je nemoguće i $\mathcal{B}(D', D, A, B)$. Ako važi raspored

$\mathcal{B}(A,B,D')$, onda važi $\mathcal{B}(D,A,B,D')$, pa je $AD < BD$ i $AD' > BD'$ i $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{AD}{DB} > -1$ i $\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}} = -\frac{AD'}{D'B} < -1$. Dakle, važi $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} > -1 > \frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$ što je nemoguće jer važi $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B}}$.

Slično se dokazuje da ne važi ni $\mathcal{B}(A,D,B)$ niti $\mathcal{B}(A,B,D)$, pa sledi da ne postoji tačka D' različita od tačke D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D')$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Pretpostavimo da slika tačke A u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\gamma$ pripada ravni β. U tom slučaju, ako proizvoljna pravu koja sadrži tačku A seče ravni β i γ u tačkama B i C, onda je tačka C središte duži AB. Na osnovu leme **1**, tada ne postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. U ovom slučaju, dakle, traženi skup tačaka je prazan.

Pretpostavimo da slika tačke A u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\gamma$ ne pripada ravni β. Neka je p proizvoljna prava koja sadrži tačku A i koja seče ravni β i γ u tačkama B i C. Tačka C nije središte duži AB, pa postoji tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ (tu tačku moguće je odrediti na osnovu dokaza leme **1**). Neka je δ ravan koja sadrži tačku D i paralelna je ravnima β i γ. Dokažimo da je ravan δ traženi skup tačaka.

(⊂:) Neka je D' proizvoljna tačka ravni δ različita od D i neka je π ravan koja sadrži pravu p i tačku D'. Ravan π seče ravan δ, pa seče i ravni β i γ (jer je $\beta \| \gamma \| \delta$). Neka su b, c i d presečne prave ravni β, γ i δ sa ravni π. Ravni β, γ i δ su paralelne, pa su paralelne i prave b, c i d. Neka su B' i C' presečne tačke prave AD' sa ravnima β i γ (tj. sa pravama b i c). Tačke A, B, C, D, B', C', D' su koplanarne (pripadaju ravni π) i na osnovu Talesove teoreme (**T27.3**) sledi: $\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B'}$ i $\frac{AD}{DB} = \frac{AD'}{D'B'}$. Pored toga, važi $\mathcal{B}(A,C,B,D)$ i $\mathcal{B}(A,C',B',D')$, pa je $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B'}}$ i $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B'}}$. Važi $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, pa iz

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

sledi

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B'}} = -\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'B'}}\ .$$

Dakle, važi $\mathcal{H}(A,B';C',D')$, pa tačka D pripada traženom skupu tačaka.

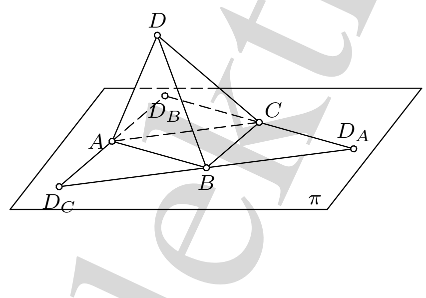
(⊃:) Neka je D' proizvoljna tačka koja je različita od tačke D i koja pripada traženom skupu. Dakle, prava AD' seče ravni β i γ u tačkama B' i C' takvim da važi $\mathcal{H}(A,B';C',D')$. Prava AD' seče ravni β i γ, pa seče i ravan δ (jer su ravni β, γ i δ paralelne). Ako bi prava AD' sekla ravan δ u tački D'' različitoj od tačke D', važilo bi $\mathcal{H}(A,B';C',D'')$ (na osnovu prvog smera dokaza) i $\mathcal{H}(A,B';C',D')$, što je, na osnovu leme **2**, nemoguće.

Dakle, tačka D' je presečna tačka prave AD' i ravni δ, tj. tačka D' pripada ravni δ.

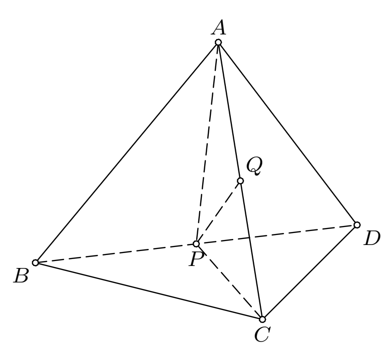
Dakle, ako slika tačke A u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\gamma$ pripada ravni β, traženi skup tačaka je prazan. U suprotnom, traženi skup tačaka je ravan δ koja je paralelna sa ravnima β i γ i sadrži tačku D takvu da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ (tačke B i C su presečne tačke ravni β i γ sa proizvoljnom pravom koja ih seče i sadrži tačku A).

69. Uglovi $\angle BAC$ i $\angle BDC$ su podudarni, jer su to uglovi nad podudarnim lûkovima (BC) podudarnih krugova i oba su oštra. Analogno, podudarni su uglovi $\angle ABC$ i $\angle ADC$ i uglovi $\angle BCA$ i $\angle BDA$, pa je zbir uglova pljosni tetraedra kod temena D jednak $\angle BDC + \angle ADC + \angle BDA = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \pi$ (zbir uglova u trouglu $\triangle ABC$ jednak je π). Analogno se dokazuje da su zbirovi uglova pljosni kod preostala tri temena tetraedra takođe jednaki π.

Neka je π ravan određena tačkama A, B i C. Neka su D_A, D_B i D_C tačke ravni π takve da važi: tačke D_A i A su sa raznih strana prave BC, $BD \cong BD_A$ i $CD \cong CD_A$; tačke D_B i B su sa raznih strana prave AC, $AD \cong AD_B$ i $CD \cong CD_B$; tačke D_C i C su sa raznih strana prave AB, $AD \cong AD_C$ i $BD \cong BD_C$. Podudarni su trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle AD_CB$, pa važi $\angle D_CAB = \angle DAB$. Podudarni su trouglovi $\triangle ACD$ i $\triangle ACD_B$, pa važi $\angle D_BAC = \angle DAC$. Dakle, važi $\angle D_CAD_B = \angle D_CAB + \angle BAC + \angle CAD_B = \angle DAB + \angle BAC + \angle DAC = \pi$ (zbirovi uglova pljosni tetraedra $ABCD$ kod sva četiri temena jednaki su π), pa tačka A pripada duži D_BD_C. Pored toga, važi $D_CA \cong DA \cong D_BA$, pa je tačka A središte duži D_BD_C. Analogno se dokazuje da je tačka B središte duži D_AD_C i da je tačka C središte duži D_BD_A. Duž AB je srednja linija trougla $\triangle D_BD_CD_A$, pa je $AB \cong D_BC \cong CD_A$. Analogno, važi i $AC \cong D_CB \cong BD_A$, $BC \cong D_CA \cong AD_B$, pa su trouglovi $\triangle ABC$, $\triangle D_CBA$, $\triangle BD_AC$ i $\triangle ACD_B$ podudarni. Kako je $\triangle D_CBA \cong \triangle ABD$, $\triangle BD_AC \cong \triangle BCD$ i $\triangle ACD_B \cong \triangle ACD$, sledi da su sve četiri pljosni tetraedra $ABCD$ podudarni trouglovi, što je i trebalo dokazati.



Slika 69



Slika 70

70. Neka je tačka P središte duži BD, a Q središte duži AC. Iz $AB \cong CD$, $AD \cong BC$ i $BD \cong BD$ sledi $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ i $\angle ABD \cong \angle CDB$. Važi i $BP \cong PD$ (jer je tačka P središte duži BD), pa iz $\angle ABD \cong \angle CDB$ (tj. $\angle ABP \cong \angle CDP$), $AB \cong CD$ i $BP \cong PD$ sledi $\triangle ABP \cong \triangle CDP$ i $AP \cong CP$. Važi i $AQ \cong QC$ (jer je tačka Q središte duži AC), pa iz $AP \cong CP$, $PQ \cong PQ$ i $AQ \cong QC$ sledi $\triangle APQ \cong \triangle CPQ$ i $\angle AQP \cong \angle CQP$. Tačka Q je između tačaka A i C, pa je $\angle AQP + \angle CQP = \pi$. Iz $\angle AQP \cong \angle CQP$ i $\angle AQP + \angle CQP = \pi$ sledi $\angle AQP = \angle CQP = \pi/2$, tj. $PQ \perp AC$. Analogno se dokazuje i $QP \perp BD$, pa sledi da je prava PQ zajednička normala za prave AC i BD, što je i trebalo dokazati.

71. ($\Rightarrow$:) Na osnovu Pašove aksiome sledi da ravan π ne može da seče četiri ivice tetraedra od kojih tri sadrže jedno njegovo teme. Dakle, ravan π ne seče neke dve naspramne ivice tetraedra. Pretpostavimo da ravan π seče ivice AC, BC, BD i AD tetraedra i to u tačkama P, Q, R i S takvim da je četvorougao $PQRS$ paralelogram ($PQ \parallel RS$ i $PS \parallel RQ$).

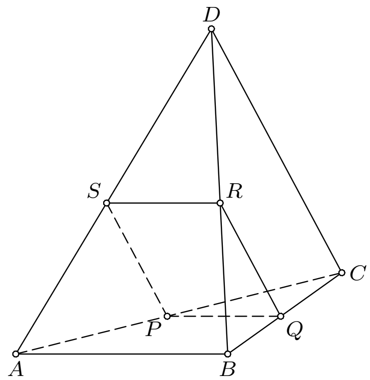
Dokažimo da je ravan π paralelna sa pravom AB. Pretpostavimo suprotno — da se ravan π i prava AB seku u nekoj tački X. Neka je δ ravan određena tačkama A, B i D. i neka je γ ravan određena tačkama A, B i C. Prava AB pripada ravni δ, pa toj ravni pripada i tačka X. Kako tačka X pripada i ravni δ i ravni π, sledi da tačka X pripada presečnoj pravoj ravni δ i π, tj. sledi da tačka X pripada pravoj SR. Analogno se dokazuje da tačka X pripada pravoj PQ, odakle sledi da se prave SR i PQ seku, što je suprotno pretpostavci. Dakle, ravan π i prava AB nemaju zajedničkih tačaka tj. $AB \| \pi$.

Analogno se dokazuje da važi i $CD \parallel \pi$.

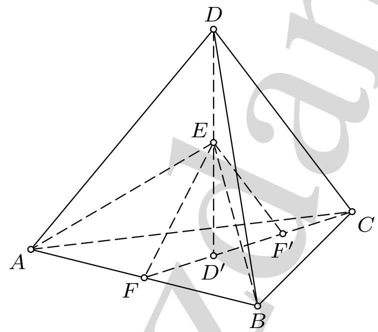
$\Leftarrow$: Pretpostavimo da važi $AB \| \pi$ i $CD \parallel \pi$. Neka su P, Q, R i S tačke u kojima ravan π seče ivice AC, BC, BD i AD tetraedra.

Dokažimo da važi $SR \| AB$, tj. dokažimo da prave SR i AB nemaju zajedničkih tačaka. Pretpostavimo suprotno — da prave SR i AB imaju zajedničku tačku X. Tačka X pripada pravoj SR, a prava SR pripada ravni π, pa sledi da tačka X pripada ravni π, što znači da ravan π i prava AB imaju zajedničku tačku, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, prave SR i AB nemaju zajedničkih tačaka, a kako pripadaju ravni određenoj tačkama A, B i D, one nisu mimoilazne, pa sledi $SR \| AB$.

Analogno se dokazuje $PQ \| AB$, odakle sledi i $SR \| PQ$. Slično, važi i $SP \| QR$, pa je $PQRS$ paralelogram, što je i trebalo dokazati.



Slika 71



Slika 72

72. *I rešenje:*

Tetradear $ABCD$ je pravilan, pa je tačka D' središte trougla $\triangle ABC$. Tačka D' je i težište i ortocentar (i središte opisanog i središte upisanog kruga) trougla $\triangle ABC$.

Neka je a dužina ivice tetraedra $ABCD$. Neka je F presečna tačka prave CD' i prave AB i neka je F' središte duži DC. Tačka D' je ortocentar trougla $\triangle ABC$, pa je duž CF visina trougla $\triangle ABC$. Tačka D' je težište trougla $\triangle ABC$, pa važi $CF' \cong F'D' \cong D'F$. Prave DD' je normalna na ravni ABC, pa je $\angle ED'F = \angle ED'F' = \frac{\pi}{2}$. Kako je i $ED' \cong ED'$ i $FD' \cong D'F'$, sledi $\triangle EFD' \cong \triangle ED'F'$ i $EF \cong EF'$. Duž EF' je srednja linija trougla $\triangle DD'C$, pa važi $EF' = DC/2 = a/2$. Iz $EF \cong EF'$ i $EF' = DC/2 = a/2$ sledi $EF = a/2$. Tačka F je središte duži AB, pa je $AF = FB = a/2$. Dakle, važi $AF = FB = EF = a/2$, pa tačka E pripada krugu sa središtem F i poluprečnikom $a/2$, odakle sledi da se prečnik tog kruga — duž AB vidi pod pravim uglom iz tačke E, tj. $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$.

Analogno se dokazuje i $\angle BEC = \angle CEA = \frac{\pi}{2}$.

II rešenje:

Neka je a dužina ivica pravilnog tetraedra $ABCD$.

Tetradear $ABCD$ je pravilan, pa je tačka D' središte trougla $\triangle ABC$. Tačka D' je i težište i ortocentar (i središte opisanog i središte upisanog kruga) trougla $\triangle ABC$.

Neka je F središte duži AB. Prava CF normalna je na pravoj AB, ona sadrži tačku D' i važi $D'F = \frac{1}{3}CF$ (jer je D' težište trougla $\triangle FBC$). Na osnovu Pitagorine teoreme, važi $FC^2 = BC^2 - FB^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2$, odakle sledi $FC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i $FD' = \frac{1}{3}FC = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2\sqrt{3}}a$.

Važi $AD' = CD' = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$. Ugao $\angle DD'A$ je prav, pa, na osnovu Pitagorine teoreme, važi

$$DD'^2 = AD^2 - AD'^2 = a^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2 = \frac{2}{3}a^2 \ ,$$

odakle sledi $DD' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ i $ED' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a$.

Ugao $\angle ED'F$ je prav, pa na osnovu Pitagorine teoreme sledi

$$EF^2 = ED'^2 + F'D^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a\right)^2 = \frac{1}{12}a^2 + \frac{2}{12}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

i $EF = \frac{a}{2}$.

Dakle, tačka E pripada krugu sa središtem F i poluprečnikom $a/2$, odakle sledi da se prečnik tog kruga — duž AB — vidi pod pravim uglom iz tačke E, tj. $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$.

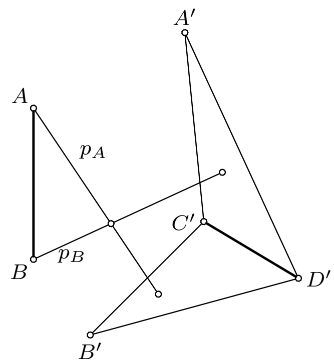
Analogno se dokazuje i $\angle BEC = \angle CEA = \frac{\pi}{2}$.

73. Neka su p_A, p_B, p_C i p_D, redom, prave koje sadrže temena A, B, C, D tetraedra $ABCD$ i normalne su na pljosnima $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ tetraedra $A'B'C'D'$ Neka su s_A, s_B, s_C i s_D, redom, prave koje sadrže temena A', B', C', D' tetraedra $A'B'C'D'$ i normalne su na pljosnima BCD, CDA, DAB, ABC tetraedra $ABCD$.

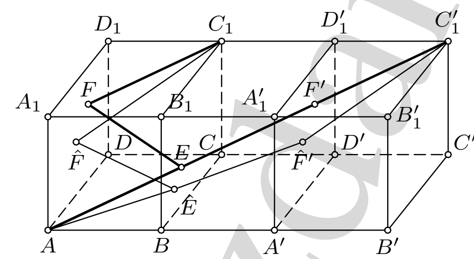
Prave p_A i p_B se seku, pa postoji ravan α koja ih sadrži. Prava p_A normalna je na pljosni $B'C'D'$ tetraedra $A'B'C'D'$, pa je na toj pljosni normalna i ravan α (**T14.2**). Prava p_B normalna je na pljosni $C'D'A'$ tetraedra $A'B'C'D'$, pa je na toj pljosni normalna i ravan α (**T14.2**). Dakle, ravan α normalna je na ravnima $B'C'D'$ i $C'D'A'$, pa je, na osnovu teoreme **14.5**, normalna i na njihovoj presečnoj pravoj — pravoj $C'D'$. Ravan α sadrži pravu AB (jer sadrži prave p_A i p_B) i normalna je na pravoj $C'D'$, odakle sledi da su prave AB i $C'D'$ međusobno normalne.

Prave AB i $C'D'$ su međusobno normalne, pa postoji ravan β koja sadrži pravu $C'D'$ i normalna je na pravoj AB. Neka je X presečna tačka prave AB i ravni β. Prave $D'X$ i AB su međusobno normalne (jer prava $D'X$ pripada ravni β i važi $AB \perp \beta$). Ravan ABC sadrži pravu AB, pa na osnovu teoreme **14.2**, važi $ABC \perp \beta$. Neka je x presečna prava ravni β i ravni ABC i neka je X' podnožje normale iz tačke D' na pravoj x. Prava x pripada ravni β, pa ravni β pripada i tačka X'. Dakle, prava $D'X'$ pripada ravni β, pa kako je $\beta \perp ABC$ i $D'X' \perp x$, na osnovu teoreme **14.1** sledi $D'X' \perp ABC$. Na osnovu teoreme **12.6**, postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku i normalna je na zadatoj ravni, pa su prave $D'X'$ i s_D identične. Dakle, prava s_D pripada ravni koja sadrži pravu $C'D'$ i normalna je na pravoj AB. Slično se dokazuje da i prava s_C pripada istoj ravni. Prave s_D i s_C nisu paralelne (u protivnom bi tačke A, B, C i D bile kolinearne), pa se seku.

Analogno se dokazuje da se svake dve od pravih s_A, s_B, s_C i s_D seku, pa kako one nisu koplanarne (u protivnom bi tačke A', B', C' i D' bile koplanarne), na osnovu teoreme **1.14**, sledi da se seku u jednoj tački, što je i trebalo dokazati.



Slika 73

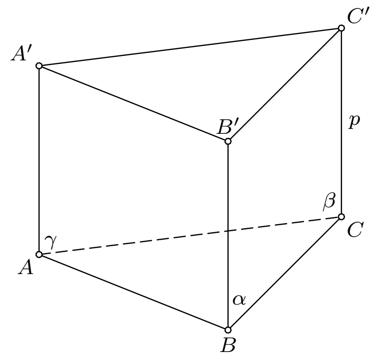


Slika 74

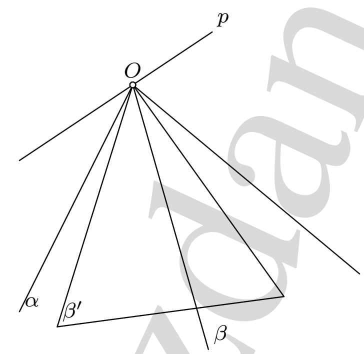
74. Neka su tačke A', A_1', D' i D_1' tačke simetrične tačkama A, A_1, D i D_1 u odnosu na ravan BCC_1B_1 i neka su tačke B', B_1', C' i C_1' tačke simetrične tačkama B, B_1, C i C_1 u odnosu na ravan $A'D'D_1'A_1'$. Označimo sa E i F' tačke preseka prave AC_1' sa ravnima BCC_1B_1 i $A'D'D_1'A_1'$ redom i označimo sa F tačku simetričnu tački F' u odnosu na ravan BCC_1B_1. Ravni $A'D'D_1'A_1'$ i ADD_1A_1 su simetrične u odnosu na ravan BCC_1B_1, pa, kako tačka F' pripada pljosni $A'D'D_1'A_1'$, tačka F simetrična tački F' u odnosu na ravan BCC_1B_1 pripada pljosni ADD_1A_1. Ravni ADD_1A_1, BCC_1B_1, $A'D'D_1'A_1'$ i $B'C'C_1'D_1'$ su paralelne, pa, iz načina na koji su one određene, sledi da važi raspored $\mathcal{B}(A, E, F', C_1')$ i $AE + EF' + F'C_1' = AC_1'$.

Dokažimo da su E i F tražene tačke, tj. dokažimo da za bilo koje dve tačke $\hat{E}$ i $\hat{F}$ koje pripadaju pljosnima BCC_1B_1 i ADD_1A_1 važi: $A\hat{E} + \hat{E}\hat{F} + \hat{F}C_1 \geq AE + EF + FC_1$. Označimo sa $\hat{F}'$ tačku simetričnu tački $\hat{F}$ u odnosu na ravan BCC_1B_1 (tačka $\hat{F}'$ pripada pljosni $A'D'D_1'A_1'$). Tačke $\hat{E}$ i $\hat{F}$ preslikavaju se, u ravanskoj refleksiji čija je osnova ravan BCC_1B_1, u tačke $\hat{E}$ i $\hat{F}'$, pa važi $\hat{E}\hat{F} \cong \hat{E}\hat{F}'$. Slično, važi i $\hat{F}C_1 \cong \hat{F}'C_1$, $\hat{F}'C_1 \cong \hat{F}'C_1'$, $F'C_1' \cong F'C_1$, $F'C_1' \cong FC_1$ i $EF' \cong EF$. Na osnovu nejednakosti trougla važi $A\hat{E} + \hat{E}\hat{F}' \geq A\hat{F}'$ i $A\hat{F}' + \hat{F}'C_1' \geq AC_1'$. Dakle, $A\hat{E} + \hat{E}\hat{F} + \hat{F}C_1 = A\hat{E} + \hat{E}\hat{F}' + \hat{F}'C_1 = A\hat{E} + \hat{E}\hat{F}' + \hat{F}'C_1' \geq A\hat{F}' + \hat{F}'C_1' \geq AC_1' = AE + EF' + F'C_1' = AE + EF' + F'C_1 = AE + EF + FC_1$, što je i trebalo dokazati.

75. Neka su α, β i γ ravni određene bočnim pljosnima prizme i neka je p presečna prava ravni α i β (prava p i ravan γ se ne seku — u protivnom bi sve tri ravni α, β i γ imale zajedničku tačku). Dokažimo da je izometrija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ klizajuća refleksija. Neka su π_1 i δ ravni koje sadrže pravu p takve da je $\delta \perp \gamma$ i da je usmereni ugao ϕ između ravni α i β jednak usmerenom uglu između ravni π_1 i δ). Tada je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{p,2\phi} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$, pa sledi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$. Ako je q presečna prava ravni γ i δ, onda važi $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_q$, pa važi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$. Ako su π_2 i π_3 ravni koje sadrže pravu q, takve da su međusobno upravne i da je $\pi_2 \| \pi_1$ (odakle sledi $\pi_3 \perp \pi_1$), onda važi: $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$. Kako su ravni π_1 i π_2 međusobno paralelne i ravan π_3 je upravna na svakoj od njih, izometrija $\mathcal{I}$ je klizajuća refleksija, što je i trebalo dokazati.



Slika 75



Slika 76

76. Neka su a, b i c presečne prave ravni γ i α, α i β, β i γ.

Neka su ravni α' i β' ravni koje sadrže pravu b (presečnu pravu ravni α i β) takve da je $\beta' \perp \gamma$ i da je usmereni ugao između ravni α' i β' jednak usmerenom uglu ϕ između ravni α i β. Tada je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{b,2\phi} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$, pa sledi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$$

Neka su ravni β'' i γ' ravni koje sadrže presečnu pravu c' ravni β' i γ i takve da je $\beta'' \perp \alpha'$ i $\beta'' \perp \gamma'$. Tada važi $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} = \mathcal{S}_{c'} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''}$, odakle sledi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$$

Neka je p presečna prava ravni α' i γ' i neka je ψ dvostruki usmereni ugao između ravni α' i γ'. Ravni β'' i γ' su normalne, pa ravanske refleksije $\mathcal{S}_{\beta''}$ i $\mathcal{S}_{\gamma'}$ mogu da komutiraju, odakle sledi

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{R}_{p,\psi}$$

Kompozicija $\mathcal{I}$ je, dakle, osnorotaciona refleksija sa osnovom β'', osom p i za ugao ψ.

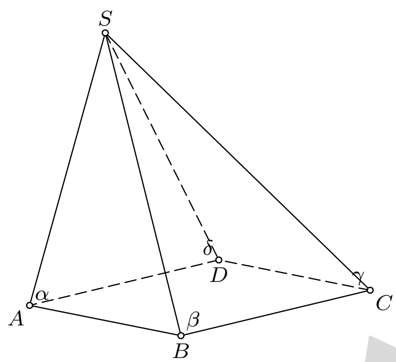
77. Označimo sa α, β, γ i δ ravni određene temenima A, B, S; B, C, S; C, D, S i D, A, S četvorostrane piramide $ABCDS$ čija je osnova četvorougao $ABCD$. Potrebno je dokazati da je kompozicija $\mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ osna rotacija. Neka je π ravan određena tačkama B, D i S. Kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ je osna rotacija (jer ravni α i β imaju zajedničku pravu BS) i ona može biti reprezentovana kao kompozicija $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\phi$, gde je ravan ϕ ravan koja sadrži pravu BS i usmereni ugao koji zahvataju ravni[8] ϕ i π podudaran je usmerenom uglu μ_1 koji zahvataju ravni α i β (jer je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{BS,2\mu} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\phi$). Kompozicija $\mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma$ je osna rotacija (jer ravni γ i δ imaju zajedničku pravu DS) i ona može biti reprezentovana kao kompozicija $\mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\pi$, gde je ravan ψ ravan koja sadrži pravu DS i usmeren

[8] *Uglom koji zahvataju ravni* α *i* β nazivamo ugao diedra koji zahvataju ravni α i β.

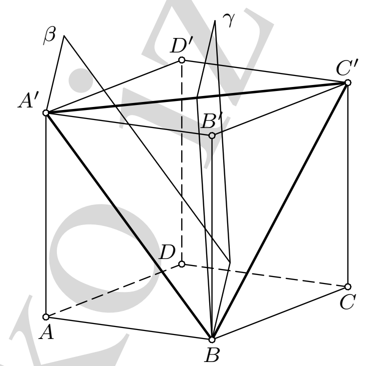
ugao μ_2 koji zahvataju ravni π i ψ podudaran je usmerenom uglu koji zahvataju ravni γ i δ. Dakle,

$$\mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\phi \ .$$

Ravni ϕ i ψ su različite (jer bi u protivnom obe sadržavale prave BS i DS, pa bi bile identične sa ravni π) i obe sadrže tačku S, odakle sledi da imaju neku zajedničku pravu s koja sadrži tačku S. Data kompozicija je, dakle, osna rotacija $\mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\phi$ čija je osa prava s, a ugao rotacije jednak dvostrukom uglu između ravni ϕ i ψ.



Slika 77



Slika 78

78. Iz $A'B' \cong B'C'$, $BB' \cong BB'$ i $\angle A'B'B = \angle C'B'B = \frac{\pi}{2}$ sledi da su trouglovi $\triangle BB'A$ i $\triangle BB'C$ podudarni i $A'B \cong C'B$. Analogno važi $\triangle BB'A' \cong \triangle A'B'C'$ i $A'B \cong A'B'$. Dakle, trougao $\triangle A'BC'$ je pravilan, pa važi $\angle A'BC' = \frac{\pi}{3}$.

Neka je b prava koja sadrži tačku B i normalna je na ravni α. Ravan β sadrži tačku B i normalna je na ravni α, pa sledi da ravan β sadrži pravu b. Za tačku B važi $A'B \cong C'B$, pa ona pripada simetralnoj ravni duži $A'C'$, tj. tačka B pripada ravni γ. Ravan γ sadrži tačku B i normalna je na ravni α (jer je simetralna ravan duži koja joj pripada), odakle sledi da ravan γ sadrži pravu b. Dakle, prava b je presečna prava ravni β i γ.

Ravni β i γ su normalne na ravni α i sadrže prave BA' i BB'' (gde je B'' središte duži $A'C'$), pa je usmereni ugao koji zahvataju ravni β i γ jednak usmerenom uglu koji zahvataju poluprave BA' i BB''. Tačka B'' je središte ivice $A'C'$ pravilnog trougla $\triangle A'BC'$, pa je $\angle A'BB'' = \frac{\pi}{6}$. Dakle, ugao koji zahvataju ravni β i γ jednak je $\frac{\pi}{6}$.

Ravni β i γ imaju zajedničku pravu b, pa je kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta$ osna rotacija $\mathcal{R}_{b,\omega}$ čija je osa prava b, a ugao rotacije ω jednak dvostrukom usmerenom uglu koji zahvataju ravni β i γ. Dakle, važi $\omega = \frac{\pi}{3}$, pa je kompozicija $\mathcal{I}^6$ koincidencija (jer je $\mathcal{R}^6_{b,\omega} = \mathcal{R}_{b,2\pi}$). Odatle sledi da je $\mathcal{I}^{96} = (\mathcal{I}^6)^{16}$ takođe koincidencija, pa je $\mathcal{I}^{96}(A') = A'$.

79. Označimo sa π ravan paralelograma $ABCD$, a sa $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ravni koje sadrže prave AB, BC, CD, DA i normalne su na ravan π. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\alpha = \\ = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$$

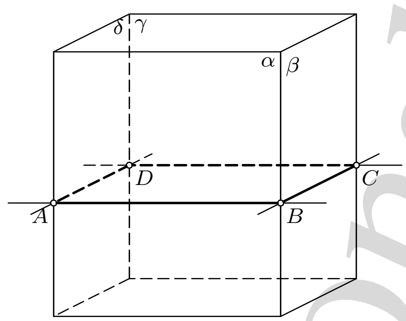
Neka je p_1 zajednička prava ravni α i β i neka je p_2 zajednička prava ravni γ i δ. Ravni α, β, γ i δ su normalne na ravni π, pa su na ravni π normalne i prave p_1 i p_2. Neka su μ_1 i μ_2 usmereni uglovi koje zahvataju ravni α i β, odnosno ravni γ i δ.

Neka je ω ravan koja sadrži pravu BD i normalna je na ravni π (takva ravan postoji na osnovu teoreme **14.4**). Neka je ϕ ravan koja sadrži pravu p_1 takva da je usmereni ugao koji zahvataju ravni ϕ i ω jednak μ_1. Neka je ψ ravan koja sadrži pravu p_2 takva da je usmereni ugao koji zahvataju ravni ω i ψ jednak μ_2. Onda je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{p_1,2\mu_1} = \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{S}_\phi$ i $\mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{R}_{p_2,2\mu_2} = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\omega$, pa je $\mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{S}_\phi$, odakle sledi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\phi$.

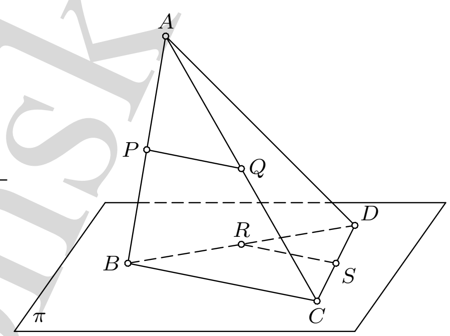
Ako je $\phi \perp \omega$ (tj. $\alpha \perp \beta$, odnosno $AB \perp BC$), onda su ravni ϕ i ψ normalne na ravni ω, i na pravoj BD, pa važi $\phi \| \psi$ i $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BD}}$.

Ako nije $\phi \perp \omega$, onda se ravni ϕ i ψ seku i $\mathcal{I}$ je osna rotacija čija je osa presečna prava ravni ϕ i ψ, a ugao rotacije dvostruki ugao koji zahvataju ravni ϕ i ψ, tj. ugao $2(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \angle ABC - \angle CDA) = 2(\pi - 2\angle ABC) = 2\pi - 4\angle ABC$.

Dakle, ako je $ABCD$ pravougaonik, $\mathcal{I}$ je translacija, inače je osna rotacija.



Slika 79



Slika 80

80. Označimo sa π ravan koja sadrži tačke B, C i D. Duž RS je srednja linija trougla $\triangle DBC$, pa je $RS \parallel BC$. Duž PQ je srednja linija trougla $\triangle ABC$, pa je $PQ \parallel BC$, odakle, na osnovu teoreme **25.13**, sledi $PQ \parallel \pi$. Neka je α ravan koja sadrži tačke R i S i normalna je na ravni π; neka je β ravan koja sadrži tačke B i C i normalna je na ravni π; neka je γ ravan koja sadrži tačke P i Q i normalna je na ravni π; neka je μ ravan koja sadrži tačke P i Q i normalna je na ravni γ (te ravni postoje na osnovu teoreme **14.4**). Neka je c presečna prava ravni γ i π. Prava PQ pripada ravni γ i nema zajedničkih tačaka sa ravni π, pa sledi da se prave c i PQ ne seku. One pripadaju jednoj ravni (ravni γ), pa su paralelne. Iz $c \| PQ$ i $PQ \| BC$, na osnovu teoreme **25.10** o tranzitivnosti paralelnosti, sledi $c \| BC$. Neka je s proizvoljna prava ravni π normalna na pravoj BC. Na osnovu teoreme **14.1** sledi $s \perp \beta$. Iz $c \| BC$ i $s \perp BC$ sledi $s \perp c$, pa na osnovu teoreme **14.1** važi $s \perp \gamma$. Analogno, važi $s \perp RS$ i $s \perp \alpha$. Dakle, ravni α, β i γ pripadaju hiperboličkom pramenu ravni $\mathcal{X}_s$ normalnih na pravoj s.

Dokažimo da se ravni μ i π ne seku. Pretpostavimo suprotno — da postoji zajednička tačka X ravni μ i π. Neka je x' prava ravni π koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj c. Na osnovu teoreme **14.1**, prava x' normalna je na ravni γ. Neka je x'' prava ravni μ koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj PQ. Na osnovu teoreme **14.1**, prava x'' normalna je na ravni γ. Postoje dve različite prave x' i x'' koje sadrže tačku X i normalne su na ravni γ, što je u kontradikciji sa teoremom **12.6**, pa sledi da je pogrešna bila pretpostavka da ravni π i μ imaju zajedničku tačku. Dakle, ravni π i μ su paralelne.

Osna refleksija prostora može biti reprezentovana kao kompozicija dve ravanske refleksije čije su osnove međusobno normalne i sadrže osu osne refleksije, pa važi

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{RS} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{PQ} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\mu = \\ = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\mu\ .$$

Ravni α, β i γ pripadaju pramenu $\mathcal{X}_s$ pa je $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}_\delta$, pri čemu je δ ravan koja takođe pripada pramenu $\mathcal{X}_s$. Ravan π sadrži pravu s koja je normalna na ravni δ, pa, na osnovu teoreme **14.2** sledi $\pi \perp \delta$.

Iz $\mu \| \pi$ i $\pi \perp \delta$, sledi da su ravni μ i δ međusobno normalne, pa je njihova kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\mu$ osna refleksija prostora.

81. *Lema:* Kompozicija dve osne refleksije $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ kojima su ose upravne na nekoj ravni π je translacija ili koincidencija.

Dokaz leme: Ako su prave a i b identične, kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ je koincidencija.

Ako prave a i b nisu identične, neka su A i B presečne tačke tih pravih i ravni π. Neka je c prava koja sadrži tačke A i B. Na osnovu teoreme **12.9**, postoji ravan (označimo je sa γ) koja sadrži prave a i b (kao prave upravne na ravni π). Ravan γ sadrži tačke A i B, pa sadrži i pravu c. Neka su α i β ravni upravne na pravoj c u tačkama A i B redom (te ravni su jedinstvene, na osnovu teoreme **12.7**). Prave a i b su upravne na pravoj c, pa na osnovu teoreme **12.5**, prava a pripada ravni α i prava b pripada ravni β. Prava c je normalna na ravnima α i β i pripada ravni γ, pa na osnovu teoreme **14.2**, sledi da su međusobno upravne ravni α i γ i ravni β i γ. Dakle, ravni α i γ su međusobno normalne i obe sadrže pravu a, pa važi $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\alpha$. Analogno, važi i $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma$. Dakle, važi

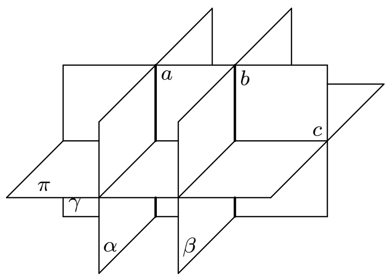
$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha\ .$$

Ravni α i β su upravne na pravoj c, pa je kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ translacija prostora. $\square$

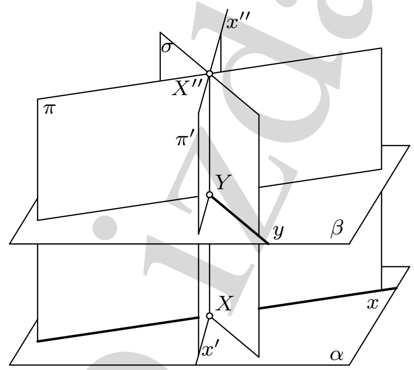
Dokažimo tvrđenje zadatka primenom matematičke indukcije. Na osnovu leme, tvrđenje važi za $2 \cdot 1$ pravih. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $2n$ pravih, tj. pretpostavimo da je kompozicija $2n$ osnih refleksija kojima su ose upravne na nekoj ravni π, translacija ili koincidencija. Neka je $\mathcal{I}$ kompozicija $2(n+1)$ osnih refleksija kojima su ose upravne na nekoj ravni π:

$$\mathcal{I} = \underbrace{\mathcal{S}_{a_1} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{a_{2n}}}_{\mathcal{I}_2} \circ \underbrace{\mathcal{S}_{a_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{a_{2(n+1)}}}_{\mathcal{I}_1}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke, $\mathcal{I}_2$ je translacija ili koincidencija, a na osnovu leme, $\mathcal{I}_1$ je translacija ili koincidencija. Kako je kompozicija dve translacije, translacije i koincidencije, koincidencije i translacije ili dve koincidencije, translacija ili koincidencija, sledi da je izometrija $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ translacija ili koincidencija, što je i trebalo dokazati.



Slika 81



Slika 82

82. Pretpostavimo da prave x i y zadovoljavaju uslove zadatka. Na osnovu teoreme **25.16** postoji (jedinstvena) prava n koja seče prave x i y i normalna je na njima. Neka su X i Y tačke u kojima prava n seče prave x i y. Neka su α i β ravni normalne na pravoj n i seku je, redom, u tačkama X i Y.

Dokažimo da prava x pripada ravni α. Prave n i x se seku, pa postoji ravan koja ih sadrži; neka je to ravan π. Ravni α i π imaju zajedničku tačku X, pa imaju i zajedničku pravu. To je upravo prava x, jer bi u suprotnom u ravni π pored prave x postojala još jedna prava koje sadrže tačku X i normalna je na pravoj n, što je u suprotnosti sa teoremom **12.1**. Dakle, ravan α sadrži pravu x, što je i trebalo dokazati. Analogno se dokazuje da ravan β sadrži pravu y.

Dokažimo da su ravni α i β paralelne. Pretpostavimo suprotno — da ravni α i β imaju zajedničku tačku P. U ravni određenoj tačkama X, Y i P postoje dve normale (prave PX i PY) na pravoj n, što je u suprotnosti sa teoremom **12.1**. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna, pa sledi da su ravni α i β paralelne.

Neka je π ravan koja sadrži prave n i x i neka je σ ravan koja sadrži prave n i y. Ravan π sadrži pravu n koja je normalna na ravnima α i β, pa je, na osnovu teoreme **14.2**, ravan π normalna na ravnima α i β. Analogno se dokazuje da važi i $\sigma \perp \beta$ i $\sigma \perp \alpha$.

Neka je α' slika ravni α u ravanskoj refleksiji čija je osnova ravan β i neka je β' slika ravni β u ravanskoj refleksiji čija je osnova ravan α.

Ravni β i σ su međusobno normalne i sadrže pravu y, pa se osna refleksija $\mathcal{S}_y$ može reprezentovati kao kompozicija ravanskih refleksija čije su osnove ravni β i σ, tj. $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\sigma$. Ravni α i σ su normalne, pa važi $\mathcal{S}_\sigma(\alpha) = \alpha$. Neka je π' slika ravni π u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\sigma$. Ravni σ i π sadrže pravu n, pa tu pravu sadrži i ravan π'. Prava x je presečna prava ravni α i π, pa je njena slika u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\sigma$ presečna prava slikâ ravni α i π u toj refleksiji, odakle sledi $\mathcal{S}_\sigma(x) = x'$, gde je x' presečna prava ravni α i π'. Ravan π' sadrži pravu n koja je normalna na ravni β, pa sledi $\pi' \perp \beta$ (**T14.2**) i $\mathcal{S}_\beta(\pi') = \pi'$. Prava x' je presečna prava ravni α i π', pa je njena slika u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\beta$ presečna prava slikâ ravni α i π' u toj refleksiji, odakle sledi $\mathcal{S}_\beta(x') = x''$, gde je x'' presečna prava ravni α' i π'. Dakle, $\mathcal{S}_y(x) = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\sigma(x) = \mathcal{S}_\beta(x') = x''$. Prava x i ravni σ i β sadrži tačku X, pa tačku X sadrži prava x'. Prava n je normalna na ravni β, pa se tačka X u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\beta$ slika u tačku koja pripada pravoj n. Prava x' sadrži tačku X, pa sledi da prava x'' seče pravu n u tački X'' (gde je $\mathcal{S}_\beta(X) = \mathcal{S}_Y(X) = X''$).

Analogno, ako je σ' slika ravni σ u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$, važi $\mathcal{S}_x(y) = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi(y) = \mathcal{S}_\alpha(y') = y''$, gde je y' presečna prava ravni β i σ', a y'' je presečna prava ravni β' i σ'. Prava y' seče pravu n u tački Y'' (gde je $\mathcal{S}_\alpha(Y) = \mathcal{S}_X(Y) = Y''$). Tačke X i Y su različite, pa važi $\mathcal{B}(X'', Y, X, Y'')$.

Na osnovu pretpostavke, prave $\mathcal{S}_x(y)$ i $\mathcal{S}_y(x)$, tj. prave y'' i x'' su koplanarne, tj. postoji ravan μ koja ih sadrži. Prave x'' i y'' sadrže tačke X'', odnosno Y'' prave n, pa ih sadrži i ravan μ, odakle sledi da ravan μ sadrži pravu n. Prava μ sadrži pravu n koja je normalna na ravni α, pa sledi $\mu \perp \alpha$. Prava x'' nije upravna na ravni α, pa na osnovu teoreme **14.4**, postoji jedinstvena ravan koja je sadrži i normalna je na ravni α, odakle sledi da su ravni μ i π' identične. Analogno se dokazuje da su ravni μ i σ' identične, pa su identične i ravni π' i σ'. Neka je ϕ usmereni ugao koji zahvataju ravni π i σ. Ravni π i $\pi' = \mathcal{S}_\sigma(\pi)$ zahvataju ugao 2ϕ. Ravni π i $\sigma' = \mathcal{S}_\sigma(\pi)$ zahvataju ugao podudaran uglu ϕ, ali suprotno usmeren. Ravni π' i σ', dakle, zahvataju ugao 3ϕ, a kako su to identične ravni, sledi da je ugao 3ϕ opružen, tj. $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Dakle, ako mimoilazne prave x i y pripadaju ravnima π i σ takvim da one sadrže pravu koja seče prave x i y i normalna je na njima i takvim da zahvataju ugao $\frac{\pi}{3}$, onda su prave $\mathcal{S}_x(y)$ i $\mathcal{S}_y(x)$ koplanarne.

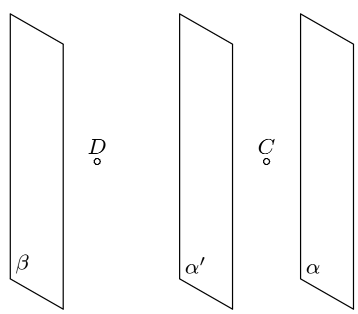
83. *Lema:* Ako tačka O ne pripada ravni ϕ, onda se u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_O$ prostora ravan ϕ preslikava na ravan ψ sa kojom nema zajedničkih tačaka.

Dokaz leme: Pretpostavimo suprotno — pretpostavimo da se ravni ϕ i ψ seku u nekoj tački X. Tačka O ne pripada ravni ϕ, pa su tačke X i O različite. Tačka X se u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_O$ preslikava u tačku X'. Tačke X i O su različite, pa su različite i tačke X i X'. Ravan ϕ se u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_O$ preslikava na ravan ψ i obratno (jer je centralna simetrija prostora involucija), pa slika tačke X — tačka X' — pripada slici ravni ψ u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_O$ tj, tačka X' pripada ravni ϕ. Dakle, ravan ϕ sadrži tačke X i X', pa sadrži i središte duži XX' — tačku O, što je kontradikcija. Dakle, ravni ϕ i ψ nemaju zajedničkih tačaka. □

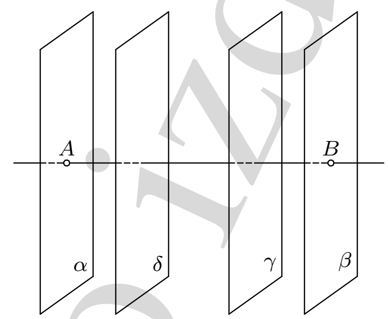
($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da važi $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_D$. Iz $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C$, na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CD}}$ gde je $\alpha' = \mathcal{S}_C(\alpha)$. Na osnovu leme, ravni α i α' su paralelne. Izometrija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$ je, dakle, translacija, pa nema invarijantih tačaka, odakle sledi $\beta \| \alpha'$. Kako je, na osnovu leme, i $\alpha \| \alpha'$, sledi $\alpha \| \beta$, što je i trebalo dokazati.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da važi $\alpha \| \beta$. Neka je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{I}$. Iz $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ$

$\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_C$, na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_C$ gde je $\alpha' = \mathcal{S}_C(\alpha)$. Važi $\alpha \| \beta$ i, na osnovu leme, $\alpha \| \alpha'$, pa važi i $\alpha' \| \beta$. Dakle, izometrija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_C$ je neka translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{XY}}$, tj. $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XY}}$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XY}} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CC'}} \circ \mathcal{S}_C$ (gde je $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{XY}$). Ako je D središte duži CC' tada je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CC'}} = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C$ i $\mathcal{I} = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_D$, što je i trebalo dokazati.



Slika 83



Slika 84

84. *Lema 1:* Ako tačka O ne pripada ravni ϕ, onda se u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_O$ prostora ravan ϕ preslikava na ravan ψ sa kojom nema zajedničkih tačaka.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme u rešenju **83**. □

Lema 2: U apsolutnom prostoru važi $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ ($\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$ je translacija prostora i $\mathcal{S}_B$ i $\mathcal{S}_A$ su centralne simetrije prostora).

Dokaz leme 2: Neka je s prava određena tačkama A i B (ako su tačke A i B identične, neka je s proizvoljna prava koja sadrži tačku A). Neka je M tačka prave s takva da važi $AB \cong BM$ i $\mathcal{B}(A, B, M)$, ako A i B nisu identične, odnosno neka je M identična tački A, ako su A i B identične tačke.

Neka su α, β i μ ravni normalne na pravoj s i sadrže, redom, tačke A, B i M. Neka su π i π' proizvoljne dve ravni koje sadrže pravu s i međusobno su normalne. Važi $\mathcal{S}_\beta(A) = M$, pa je na osnovu definicije translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AM}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Na osnovu definicije centralne simetrije je $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_\pi$ i $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_\alpha$. Dakle, $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AM}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$, što je i trebalo dokazati. □

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je prava AB normalna na ravni γ. Neka su α i β ravni koje sadrži redom tačke A i B i normalne su na pravoj AB (takve ravni postoje i jedinstvene su na osnovu teoreme **12.7**). Tačka A pripada ravni α i važi $AB \perp \alpha$, pa sledi $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_{AB}$. Slično, važi i $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_\beta$ (dve refleksije komutiraju ako su im ose međusobno upravne (**T15.8**)). Dakle, važi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_{AB} \ .$$

Ravni α, β i γ pripadaju hiperboličkom pramenu ravni sa osnovicom AB, pa je kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\alpha$ takođe neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$, gde je δ ravan koja pripada istom pramenu, tj. $\delta \perp AB$. Iz $\delta \perp AB$, na osnovu teoreme **15.8**, važi $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_{AB}$. Odatle sledi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_\delta \ .$$

Dakle, ako je $AB \perp \gamma$, onda je kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A$ neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$ (pri čemu važi $\mathcal{S}_\delta \perp AB$), što je i trebalo dokazati.

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da za neku ravan δ važi $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\delta$. Onda važi $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B$. Na osnovu teoreme o transmutaciji je $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{\gamma'}$ gde je $\gamma' = \mathcal{S}_B(\gamma)$. Ako tačka B pripada ravni γ, ravni γ i γ' su identične, a ako tačka B ne pripada ravni γ, ravni γ i γ', na osnovu leme **1**, nemaju zajedničkih tačaka. Dakle, važi $\gamma \| \gamma'$. Na osnovu leme **2** je $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}} = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B$, pa važi $\mathcal{S}_{\gamma'} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$ i $\mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$. Kompozicija $\mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_\delta$ je translacija, pa su ravni γ' i δ paralelne. Neka je X proizvoljna tačka ravni δ i neka je $Y = \mathcal{S}_{\gamma'}(X)$. Važi $\mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{XY}}$ i $XY \perp \gamma'$, pa, kako je $\gamma \| \gamma'$, sledi $XY \perp \gamma$. Iz $\mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{XY}}$ sledi $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{XY}} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$, pa je $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA}$. Dakle, važi $XY \| BA$, pa iz $XY \perp \gamma$, sledi $AB \perp \gamma$, što je i trebalo dokazati.

85. *Lema:* U euklidskom prostoru važi $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ ($\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$ je translacija prostora i $\mathcal{S}_B$ i $\mathcal{S}_A$ su centralne simetrije prostora).

Dokaz leme: Videti dokaz leme **2** u rešenju **84**. □

Na osnovu leme važi:

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MN}} \ .$$

Tačke M i N su središta duži AB i BC, pa je duž MN srednja linija trougla $\triangle ABC$ i $MN = \frac{1}{2}AC$. Tačka P je središte duži AC, pa je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AP}}$ i $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AP}}$, odakle sledi

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AP}} \ .$$

Na osnovu leme važi

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AP}} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_A =$$

$$= \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AQ}} \ .$$

Tačke M i R su središta duži AB i BD, pa je duž MR srednja linija trougla $\triangle ABD$ i $MR = \frac{1}{2}AD$. Tačka Q je središte duži AD, pa je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AQ}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MR}}$, odakle sledi

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AQ}} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MR}} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_M \ .$$

Na osnovu teoreme o transmutaciji važi

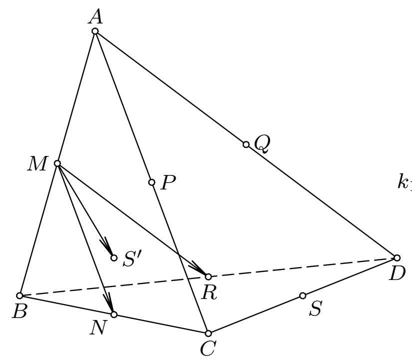
$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_{S'} \circ \mathcal{S}_M \ ,$$

pa je, na osnovu leme,

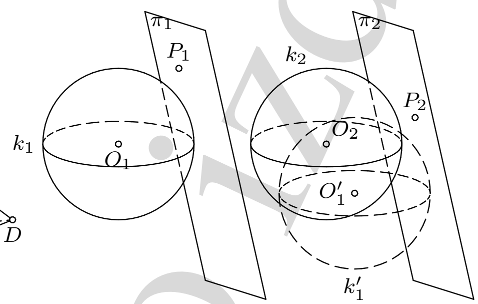
$$\mathcal{S}_{S'} \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MS'}} \; .$$

Dakle,

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MS'}} \; .$$



Slika 85



Slika 86

86. Pretpostavimo da ravni π_1 i π_2 zadovoljavaju uslove zadatka.

Neka je $\mathcal{T}$ translacija za vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Translacijom $\mathcal{T}$ ravan π_1 preslikava na u ravan koja sadrži tačku P_2 i paralelna je ravni π_1. Ravan π_2 sadrži tačku P_2 i paralelna je ravni π_1, pa, kako je takva ravan jedinstvena, sledi da se translacijom $\mathcal{T}$ ravan π_1 preslikava na ravan π_2, tj. $\mathcal{T}(\pi_1) = \pi_2$. Ako je σ_1' sfera na koju se translacijom $\mathcal{T}$ preslikava sfera σ_1, onda je ravan $\mathcal{T}(\pi_1)$ tangenta ravan sfere σ_1'. Dakle, ravan $\mathcal{T}(\pi_1) = \pi_2$ sadrži tačku P_2 i zajednička je tangentna ravan za sfere $\mathcal{T}(\sigma_1) = \sigma_1'$ i σ_2. Za ravan π_1 važi da je paralelna ravni π_2 i da sadrži tačku P_1, pa se zadatak, dakle, svodi na konstrukciju zajedničke tangentne ravni dve podudarne sfere koja sadrži datu tačku.

Neka su O_1' i O_2 središta sfera σ_1' i σ_2 i neka je a prava koja ih sadrži (ako su tačke O_1' i O_2 identične, neka je a proizvoljna prava koja ih sadrži).

Konstrukcija zajedničke spoljašnje tangentne ravni za sfere σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2:

Opišimo konstrukciju zajedničke spoljašnje tangentne ravni za sfere σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2. Neka je p prava koja sadrži tačku P_2 i paralelna je pravoj a. Neka je ω ravan koja sadrži tačku O_1' i normalna je na pravoj p. Neka je P presečna tačka prave p i ravni ω, a krug k presek sfere σ_1' i ravni ω. Ako prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2, tj. ako tačka P ne pripada krugu k, neka je t tangenta (jedna od dve) iz tačke P na krug k (u ravni ω). Ravan određena pravama p i t je tražena ravan π_2.

Ako prava p seče sfere σ_1' i σ_2, ne postoji ravan koja sadrži tačku P_2 i dodiruje sfere σ_1' i σ_2.

Ako tačke O_1' i O_2 nisu identične i ako prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2, onda postoje tačno dve ravni koje sadrže tačku P_2 i dodiruju sfere σ_1' i σ_2, pri čemu su obe sfere sa iste strane svake od tih te ravni (svaka od tih ravni određena je po jednom tangentom iz tačke P na krug k u ravni ω).

Ako su tačke O_1' i O_2 identične i tačka P pripada spoljašjosti sfere σ_1' tj. sfere σ_2 (prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2), onda postoji beskonačno mnogo ravni koje sadrže tačku P i dodiruju sfere σ_1' i σ_2 (svaka od tih ravni određena je po jednom pravom a koja sadrži tačku O_1', tj. tačku O_2).

Konstrukcija zajedničke unutrašnje tangentne ravni za sfere σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2:

Opišimo konstrukciju zajedničke unutrašnje tangentne ravni za sfere σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2. Neka je p prava koja sadrži tačku P_2 i središte duži $O_1'O_2$ (ako je tačka P_2 središte duži $O_1'O_2$, neka je p proizvoljna prava koja sadrži tačku P_2). Neka je ω ravan koja sadrži tačku O_1' i normalna je na pravoj p. Neka je P presečna tačka prave p i ravni ω, a krug k presek sfere σ_1' i ravni ω. Ako prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2, tj. ako tačka P ne pripada krugu k, neka je t tangenta (jedna od dve) iz tačke P na krug k (u ravni ω). Ravan određena pravama p i t je tražena ravan π_2.

Ako prava p seče sfere σ_1' i σ_2 ili ako su tačke O_1' i O_2 identične, onda ne postoji ravan koja sadrži tačku P_2 i dodiruje sfere σ_1' i σ_2 tako da su one sa raznih strana te ravni.

Ako tačke O_1' i O_2 nisu identične, ako prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2 i ako tačka P_2 nije središte duži $O_1'O_2$, onda postoje tačno dve ravni koje sadrže tačku P_2 i dodiruju sfere σ_1' i σ_2, pri čemu su obe sfere sa raznih strana svake od tih ravni (svaka od tih ravni određena je po jednom tangentom iz tačke P na krug k u ravni ω).

Ako tačke O_1' i O_2 nisu identične, ako prava p ne seče sfere σ_1' i σ_2 i ako je tačka P_2 središte duži $O_1'O_2$, onda postoji beskonačno mnogo ravni koje sadrže tačku P_2 i dodiruju sfere σ_1' i σ_2, pri čemu su obe sfere sa raznih strana svake od tih ravni (svaka od tih ravni određena je po jednom pravom p koja sadrži tačku P_2).

Ako je ravan π_2 zajednička tangentna ravan za sfere σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2, onda je ravan π_1 paralelna ravni π_2 i sadrži tačku P_1. Tako određene ravni π_1 i π_2 zadovoljavaju uslove zadatka.

Na osnovu opisa zajedničke tangentne ravni sfera σ_1' i σ_2 koja sadrži tačku P_2, sledi da, u zavisnosti od međusobnog odnosa sfera σ_1 i σ_2, zadatak može da nema rešenja ili da ima dva, četiri ili beskonačno mnogo rešenja.

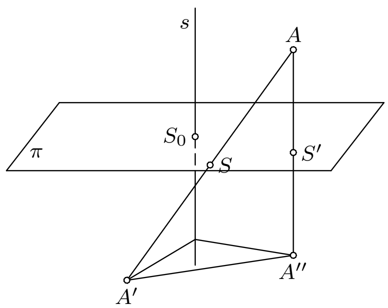
87. Ako je $\omega = \pi$, izometrija $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}$ je centralna refleksija $\mathcal{S}_{S_0}$ (gde je S presečna tačka prave s i ravni π), pa je traženi skup tačaka skup $\{S_0\}$.

Dokažimo da, ako je $\omega \neq \pi$, onda je traženi skup tačaka skup svih tačaka ravni π.

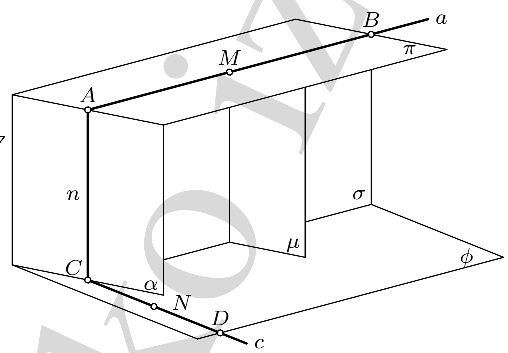
($\Leftarrow$:) Ako tačka A pripada ravni π, ravni π pripada i tačka $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$, pa i središte S duži AA'. Ako je A tačka koja ne pripada ravni π, neka je $\mathcal{S}_\pi(A) = A''$, $\mathcal{R}_{s,\omega}(A'') = A'$ i neka su S' i S središta duži AA'' i AA'. Duž SS' je srednja linija trougla $\triangle AA'A''$, pa je $SS' \| A''A'$. Važi i $A''A' \| \pi$, pa sledi $SS' \| \pi$. Kako tačka S' pripada ravni π, sledi da i tačka S pripada ravni π.

(⇒:) Neka je S_0 presečna tačka prave s i ravni π. Ako je A proizvoljna tačka prave s različita od S_0 i $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$, onda je tačka S_0 je središte duži AA'.

Neka je S proizvoljna tačka ravni π, različita od S_0. Neka je A tačka ravni π, takva da je $\angle SS_0A = \omega/2$ i $\angle S_0SA = \frac{\pi}{2}$ i neka je $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$. Tačka A' pripada ravni π i iz $S_0S \cong S_0S$, $\angle AS_0S = A'S_0S = \omega/2$ i $S_0A \cong S_0A'$ sledi da su trouglovi $\triangle SS_0A$ i $\triangle A'S_0S$ podudarni i da važi $SA \cong SA'$. Kako je $\angle S_0SA = \frac{\pi}{2} = \angle S_0SA'$, tačke A, S i A' su kolinearne, pa iz iz $\mathcal{B}(A, S, A')$ sledi da je tačka S središte duži AA'. Dakle, za svaku tačku S ravni π postoje tačke A i A' takve da je S središte duži AA' i važi $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$.



Slika 87



Slika 88

88. Dokažimo da je proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{XY}}$ i $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{UV}}$, (pri čemu su prave XY i UV mimoilazne) zavojno kretanje.

Neka je a prava koja sadrži tačke X i Y, a c prava koja sadrži tačke U i V. Prave a i c su mimoilazne, pa, na osnovu teoreme **25.16**, postoji prava n koja ih seče i na njima je upravna. Neka je A presečna tačka pravih n i a i neka je C presečna tačka pravih n i c.

Neka je B tačka prave a takva da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{XY}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ (tj. $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{BA}$) i neka je M središte duži AB. Neka je π ravan koja je u tački A normalna na pravoj n. Na osnovu teoreme **12.5**, ravan π sadrži pravu a. Neka je σ ravan koja sadrži pravu a i normalna je na ravni π. Važi $\mathcal{S}_\sigma \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_a$. Neka su α i μ ravni normalne u tačkama A i M na pravoj a. Važi $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Na osnovu teoreme **12.5**, ravan α sadrži pravu n. Ravni π i σ sadrže pravu a koja je normalna na ravnima α i μ, pa su, na osnovu teoreme **14.2**, ravni π i σ normalne na ravnima α i μ, odakle sledi (**T15.8**) $\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\sigma = \mathcal{S}_\sigma \circ \mathcal{S}_\mu$ i $\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$. Kako su ravni α i σ međusobno normalne i sadrže pravu n važi $\mathcal{S}_\sigma \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_n$.

Neka je D tačka prave c takva da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{UV}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ (tj. $\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{CD}$) i neka je N središte duži CD. Neka je ϕ ravan koja je u tački C normalna na pravoj n. Na osnovu teoreme **12.5**, ravan ϕ sadrži pravu c. Neka je ψ ravan koja sadrži pravu c i normalna je na ravni ϕ. Važi $\mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\psi = \mathcal{S}_c$. Neka su γ i ν ravni normalne u tačkama C i N na pravoj c. Važi $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$. Na osnovu teoreme **12.5**, ravan γ sadrži pravu n. Ravni ϕ i ψ sadrže pravu c koja je normalna na ravnima γ i ν, pa su, na osnovu teoreme **14.2**, ravni ϕ i ψ normalne na ravnima γ i ν, odakle sledi (**T15.8**) $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\gamma$ i $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\nu$. Kako su ravni γ i ψ međusobno normalne i sadrže pravu n važi $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\psi = \mathcal{S}_n$.

Za kompoziciju $\mathcal{I}$ važi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \mathcal{Z}_{\overrightarrow{UV}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{XY}} = \\
&= \mathcal{Z}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{BA}} = \\
&= (\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{S}_c) \circ (\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_a) = \\
&= (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\gamma) \circ (\mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\psi) \circ (\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\mu) \circ (\mathcal{S}_\sigma \circ \mathcal{S}_\pi) = \\
&= (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\phi) \circ (\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\psi) \circ (\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\sigma) \circ (\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\pi) = \\
&= (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\phi) \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_n \circ (\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\pi) = \\
&= \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\pi = \\
&= \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \,.
\end{aligned}$$

Ravni π i ϕ su normalne na pravoj n, pa su međusobno paralelne, a ravni ϕ i ν su normalne, odakle sledi da su i ravni π i ν normalne. Dakle, na osnovu teoreme **T15.8**, važi $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\nu$. Dakle, važi

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \\
&= \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu \,.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da su ravni ν i μ paralelne. Prava c normalna je na ravni ν, pa je onda normalna i na ravni μ. Prave a i c su normalne na ravni μ, pa su koplanarne (**T12.9**), što je kontradikcija. Dakle, ravni ν i μ se seku. Neka je s njihova presečna prava. Ravni π i ϕ su normalne na pravoj n, pa su međusobno paralelne, a ravni π i μ su normalne, odakle sledi da su i ravni ϕ i μ normalne. Dakle, ravni ν i μ su normalne na ravnima ϕ i π, pa je i prava s normalna na ravnima ϕ i π. Neka su P i Q presečne tačke prave s i ravni π i ϕ, neka je R simetrična tačka tački P u odnosu na Q i neka je ω ugao koji zahvataju ravni μ i ν. Važi

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \mathcal{S}_\phi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \\
&= \mathcal{T}_{\overrightarrow{PR}} \circ \mathcal{R}_{s,2\omega} = \\
&= \mathcal{Z}_{\overrightarrow{PR},2\omega} \,.
\end{aligned}$$

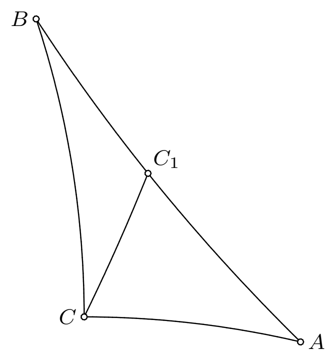
Dakle, kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{UV}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{XY}}$ je zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PR},2\omega}$.

89. Neka je trougao $\triangle ABC$ pravougli trougao hiperboličke ravni sa pravim uglom kod temena C i neka je C_1 središte njegove hipotenuze tj. duži AB. Dokažimo da važi $CC_1 < \frac{AB}{2}$. Pretpostavimo suprotno — pretpostavimo da važi $CC_1 \geq \frac{AB}{2} = C_1A = C_1B$. Tada je u trouglu $\triangle AC_1C$ ivica AC_1 manja ili jednaka ivici CC_1, pa, na osnovu teorema **11.12** i **11.13**, važi $\angle C_1CA \leq CAC_1 = \angle CAB$. Analogno se dokazuje $\angle C_1CB \leq CBC_1 = \angle CBA$, pa za zbir uglova trougla $\triangle ABC$ važi:

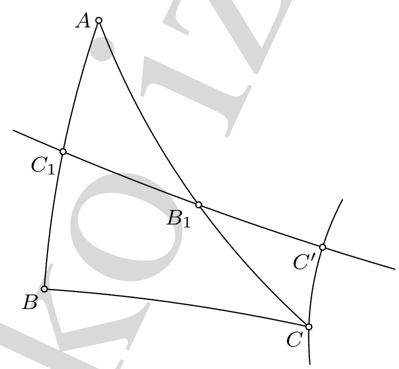
$$\sigma = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \geq \angle C_1CA + \angle C_1CB + \angle BCA =$$

$$= \angle ACB + \angle BCA = 2\angle ACB = 2\frac{\pi}{2} = \pi \ ,$$

što je kontradikcija, jer je zbir uglova svakog trougla hiperboličke ravni manji od π. Dakle, polazna pretpostavka je bila pogrešna, pa važi $CC_1 < \frac{AB}{2}$, što je i trebalo dokazati.



Slika 89



Slika 90

90. *I rešenje:*

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $C_1B_1 \perp AB$. Tada važi $BC_1 \perp C_1B_1$ i $BC_1 \cong AC_1$. Neka je C' podnožje normale iz C na pravu C_1B_1. Trouglovi $\triangle AC_1B_1$ i $\triangle CC'B_1$ su podudarni (jer važi $AB_1 \cong B_1C, \angle AB_1C_1 \cong \angle CB_1C', \angle AC_1B_1 \cong \angle CC'B_1$), pa važi $AC_1 \cong CC'$, odakle sledi $BC_1 \cong CC'$ (jer važi $BC_1 \cong AC_1$). Važi i $\angle BC_1C' = \angle CC'C_1 = \frac{\pi}{2}$, pa je četvorougao $C'C_1BC$ Sakerijev (sa pravim uglovima kod temena C_1 i C'). Na osnovu teoreme **11.17**, uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su međusobno podudarni, a kako je $\angle C_1BC = \frac{\pi}{2}$, sledi $\angle C'CB = \frac{\pi}{2}$. Dakle, $BCC'C_1$ je četvorougao u kojem su svi uglovi pravi, što je kontradikcija, jer je zbir uglova četvorougla u hiperboličkoj ravni manji od zbira četiri prava ugla. Dakle, pretpostavka $C_1B_1 \perp AB$ je bila pogrešna, pa prava B_1C_1 nije upravna na pravoj AB, što je i trebalo dokazati.

II rešenje:

Pretpostavimo suprotno — da je prava C_1B_1 normalna na pravoj AB. Neka je $C' = \mathcal{S}_{B_1}(C_1)$. Trouglovi $\triangle AC_1B_1$ i $\triangle B_1CC'$ su podudarni, pa je ugao $\angle B_1C'C$ prav. Pored toga je i $BC_1 \cong AC_1 \cong CC'$, pa je četvorougao $BCC'C_1$ Sakerijev, odakle sledi da su i uglovi na njegovoj protivosnovici (duž BC) podudarni (**T11.17**). Kako je ugao $\angle C_1BC$ prav, sledi da je prav i ugao $\angle BCC'$, odakle dalje sledi da je zbir uglova u četvorouglu $BCC'C_1$ jednak zbiru četiri prava ugla, što je kontradikcija.

Dakle, prava C_1B_1 nije normalna na pravoj AB, što je i trebalo dokazati.

91. *I rešenje:*

Neka su $PQRS$ i $P'QRS'$ Lambertovi četvorouglovi sa oštrim uglovima kod temena S i S' podudarni četvorouglovima $ABCD$, odnosno $A'B'C'D'$ i takvi da je $RQ \cong BC \cong B'C'$, $PQ \cong AB$, $P'Q \cong A'B'$, $PS \cong AD$, $P'S' \cong A'D'$, $SR \cong CD$, $S'R \cong C'D'$ i tačke P i P' su sa raznih strana prave RQ.

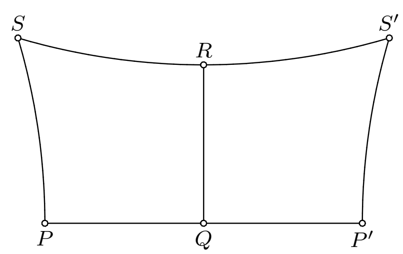
Uglovi $\angle SRQ$ i $\angle S'RQ$ su pravi, pa su tačke S, R i S' kolinearne. Uglovi $\angle PQR$ i $\angle P'QR$ su pravi, pa su tačke P, Q i P' kolinearne. Uglovi $\angle SPP'$ i $\angle S'P'P$ su pravi, pa, kako je $PS \cong AD \cong A'D' \cong P'S'$, četvorougao $PP'S'S$ je Sakerijev (sa osnovicom PP' i protivosnovicom SS'). Uglovi $\angle PQR$ i $\angle QRS$ su pravi, pa je prava RQ zajednička normala pravih PP' i SS'. Na osnovu teoreme **11.18**, zajednička normala osnovice i protivosnovice Sakerijevog četvorougla određena je njihovim središtima, tj. zajednička normala osnovice i protivosnovice Sakerijevog četvorougla je istovremeno medijatrisa njegove osnovice i njegove protivosnovice. Na osnovu teoreme **31.9**, zajednička normala dve hiperparalelne prave je jedinstvena, pa sledi da je prava RQ medijatrisa duži PP' i SS'. U osnoj refleksiji $\mathcal{S}_{RQ}$, tačke P i S se, dakle, preslikavaju u tačke P' i S' (i obratno). Pored toga, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_{RQ}$, se tačke R i Q preslikavaju u sebe, pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_{RQ}$ četvorougao $PQRS$ preslikava na četvorougao $P'S'RQ$, odakle sledi da su ovi četvorouglovi podudarni, pa su podudarni i četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

II rešenje:

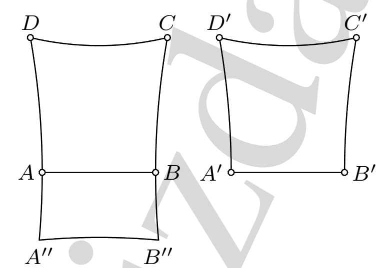
Lema: Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' međusobno podudarni ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$.

Dokaz leme: Iz $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ i $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, na osnovu teoreme o podudarnosti trouglova (**T11.15(***i***)**), sledi da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarni i $AC \cong A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Važi $\angle DAC = \angle BAD - \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle B'A'C' = \angle B'A'D' - \angle B'A'C' = \angle D'A'C'$. Analogno važi i $\angle ACD = \angle A'C'D'$, pa, na osnovu teoreme o podudarnosti trouglova (**T11.15(***ii***)**), iz $AC \cong A'C'$, $\angle DAC = \angle D'A'C$ i $\angle ACD = \angle A'C'D'$ sledi $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$. Iz $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$ sledi da su četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni. □

Neka za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' važi da je $AD \cong A'D'$ i $BC \cong B'C'$. Pretpostavimo da je $AB > A'B'$. Neka je A'' tačka između tačaka A i B takva da je $BA'' \cong B'A'$. Normala u tački A'' seče duž CD u nekoj tački D'' (ako bi ta prava sekla duž AD, postojao bi trougao sa dva prava ugla). Četvorougao $A''BCD''$ je Lambertov i važi $A''B \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$, pa su četvorouglovi $A''BCD''$ i $A'B'C'D'$ podudarni (na osnovu leme). Dakle, $AD \cong A'D' \cong A''D''$, pa je četvorougao $A''ADD''$ Sakerijev i njegovi uglovi na protivosnovici $\angle ADD''$ i $\angle A''D''D$ su oštri. To, međutim, znači da je ugao $\angle A''D''C$ tup i da je zbir uglova u četvorouglu $A''BCD''$ veći od zbira četiri prava ugla, što je kontradikcija. Analogno se pokazuje da ne važi ni $AB < A'B'$. Dakle, važi $AB \cong A'B'$, pa kako važi i $BC \cong B'C'$, na osnovu leme sledi da su četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni.



Slika 91



Slika 92

92. *Lema:* Dva četvorougla hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ su podudarna ako važi $CD \cong C'D'$, $DA \cong CB \cong C'B' \cong D'A'$ i $\angle ADC \cong \angle BCD \cong \angle B'C'D' \cong \angle A'D'C$.

Dokaz leme: Na osnovu teoreme o podudarnosti trouglova (**T11.15(**i**)**), trouglovi $\triangle DBC$ i $\triangle D'B'C'$ su podudarni, pa važi i $DB \cong D'B'$, $\angle BDC = \angle B'D'C'$. Važi $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$, odakle sledi $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = \angle A'D'C' - \angle B'D'C' = \angle A'D'B'$. Iz $DB \cong D'B'$, $\angle ADB = \angle A'D'B'$ i $AD \cong A'D'$, na osnovu teoreme **11.15(**i**)**, sledi da su trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle A'B'D'$ podudarni. Kako su tačke A i C sa raznih strana prave BD, a tačke A' i C' sa raznih strana prave $B'D'$, sledi da su četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni. $\square$

Pretpostavimo da važi $CD \cong C'D'$ i $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$ i dokažimo da važi $CB \cong C'B'$. Pretpostavimo suprotno — da važi $CB < C'B'$ ili $CB > C'B'$ Pretpostavimo da važi $CB < C'B'$. Neka je tačka B'' takva da je $CB'' \cong C'B'$ i $\mathcal{B}(C, B, B'')$ i neka je tačka A'' takva da je $DA'' \cong D'A'$ i $\mathcal{B}(D, A, A'')$. Na osnovu teoreme **11.17**, uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su podudarni, pa je $\angle ADC \cong \angle BCD$ i $\angle B'C'D' \cong \angle A'D'C$. Iz $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$ onda sledi $\angle A''DC \cong \angle ADC \cong \angle BCD \cong \angle B''CD \cong \angle B'C'D' \cong \angle A'D'C$. Duži $A'D'$ i $B'C'$ su bočne ivice Sakerijevog četvorougla $A'B'C'D'$, pa je $A'D' \cong B'C'$, odakle sledi $A''D \cong A'D' \cong B'C' \cong B''C$. Na osnovu leme, iz $\angle A''DC \cong \angle B''CD \cong \angle B'C'D' \cong \angle A'D'C$, $A''D \cong B''C \cong A'D' \cong B'C'$ i $CD \cong C'D'$ sledi da su četvorouglovi $A''B''CD$ i $A'B'C'D'$ podudarni, pa je $\angle DA''B'' = \angle D'A'B' = \frac{\pi}{2}$ i $\angle A''B''C = \angle A'B'C' = \frac{\pi}{2}$. Prave $A''B''$ i AB se ne seku (jer bi, u protivnom, iz tačke preseka postojale dve normale na pravoj AD, odnosno BC), pa je $A''B''AB$ konveksni četvorougao sa sva četiri prava ugla, što je kontradikcija. Analogno do kontradikcije dovodi i pretpostavka $CB > C'B'$. Dakle, važi $CB \cong C'B'$.

Na osnovu leme, iz $CD \cong C'D'$, $AD \cong CB \cong C'B' \cong A'D'$ i $\angle ADC \cong \angle BCD \cong \angle B'C'D' \cong \angle A'D'C'$ sledi da su četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$

podudarni, što je i trebalo dokazati.

93. *Lema:* Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno su podudarni ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$.

Dokaz leme: Iz $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ i $\angle ABC = \angle A'B'C' = \pi/2$ sledi da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarni (**T11.15**(i)) i $AC \cong A'C'$ i $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Iz $\angle DAC = \pi/2 - \angle CAB = \pi/2 - \angle C'A'B' = \angle D'A'C'$, $AD \cong BC \cong B'C' \cong A'D'$ i $AC \cong A'C'$, sledi da su trouglovi $\triangle DAC$ i $\triangle D'A'C'$ podudarni (**T11.15**(i)). Pored toga, tačke D i B su sa raznih strana prave AC, a tačke D' i B' su sa raznih strana prave $A'C'$, pa su Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni. $\square$

Pretpostavimo da za Sakerijeve četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ važi $CD \cong C'D'$ i $BC \cong B'C'$ i dokažimo da važi i $AB \cong A'B'$.

Pretpostavimo da je $AB > A'B'$. Neka je B'' tačka za koju važi $AB'' \cong A'B'$ i $\mathcal{B}(A, B'', B)$. Neka je C'' tačka za koju važi $B''C'' \cong BC$, $\angle C''B''A = \pi/2$, i tačka C'' je sa iste strane prave AB kao i tačka C. Važi $B''C'' \cong BC \cong AD$ i $\angle C''B''A = \angle DAB'' = \pi/2$, pa je četvorougao $AB''C''D$ Sakerijev. Važi $B''C'' \cong BC$ i $\angle C''B''B = \angle CBB'' = \pi/2$, pa je četvorougao $B''BCC''$ Sakerijev. Iz $AB'' \cong A'B'$ i $B''C'' \cong BC \cong B'C'$, na osnovu leme, sledi da su Sakerijevi četvorouglovi $AB''C''D$ i $A'B'C'D'$ međusobno podudarni, odakle sledi $C''D \cong C'D'$. Iz $C''D \cong C'D'$ i $CD \cong C'D'$ sledi $CD \cong C''D$. Neka je $\overline{C}$ presečna tačka prave $B''C''$ i prave DC. Ta tačka postoji, jer na osnovu Pašove aksiome sledi da prava $B''C''$ seče jednu od duži BC, CD, DA; kako prava $B''C''$ ne seče prave BC i DA (u protivnom bi postojale dve normale iz presečne tačke na pravoj AB), sledi da prava $B''C''$ seče duž DC. Važi raspored $\mathcal{B}(D, \overline{C}, C)$ i tačke C'' i $\overline{C}$ su sa iste strane prave AB, pa važi jedan od sledeća tri slučaja:

$\mathcal{B}(B'', \overline{C}, C'')$**:** Poluprava $C''B''$ pripada konveksnom uglu $\angle DC''C$, pa je ugao $\angle DC''C$ veći od ugla $\angle B''C''C$. Poluprava CD pripada konveksnom uglu $\angle C''CB$, pa je ugao $\angle C''CD$ manji od ugla $\angle C''CB$. Četvorougao $B''BCC''$ je Sakerijev, pa su, na osnovu teoreme **11.17**, uglovi $\angle B''C''C$ i $\angle C''CB$ podudarni. Dakle, važi $\angle DC''C > \angle B''C''C = \angle C''CB > \angle C''CD$. S druge strane, iz $CD \cong C'D'$ i $C''D \cong C'D'$ sledi $CD \cong C''D$, pa je trougao $\triangle DCC''$ jednakokraki i $\angle DC''C \cong \angle C''CD$, što je u suprotnosti sa $\angle DC''C > \angle C''CD$.

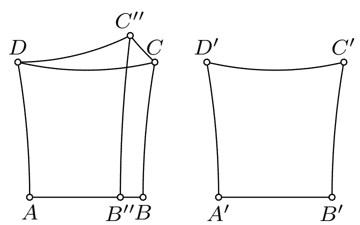
$\mathcal{B}(B'', C'', \overline{C})$**:** Četvorougao $AB''C''D$ je Sakerijev, pa su, na osnovu teoreme **11.17**, uglovi $\angle ADC''$ i $\angle B''C''D$ podudarni. Zbir uglova četvorougla $AB''C''D$ jednak je $\angle DAB'' + \angle AB''C'' + \angle B''C''D + \angle C''D''A = \pi + 2\angle B''C''D$. Taj zbir je manji od ili jednak[9] 2π, pa je $\angle B''C''D \leq \pi/2$. Analogno se dokazuje da je $\angle CC''B'' \leq \pi/2$. Zbir uglova (svakog) trougla je manji od ili jednak π, pa je ugao kod temena C'' trougla $\triangle DC''C$ manji od π. Dakle, zbir ugla kod temena C'' četvorougla $AB''C''D$, ugla kod temena C'' četvorougla $B''BCC''$ i ugla kod temena C'' trougla

[9] Tvrđenje zadatka i dokaz važe i u apsolutnoj geometriji.

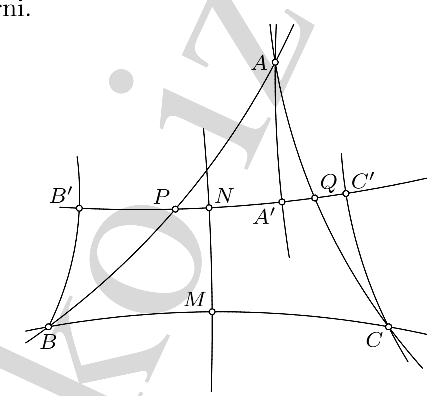
$\triangle DC''C$ manji je od $\pi/2 + \pi/2 + \pi = 2\pi$. S druge strane, tačka C'' pripada unutrašnjosti četvorougla $ABCD$, pa navedeni uglovi razlažu ravan četvorougla, odakle sledi da je njihov zbir jednak 2π, što je kontradikcija.

$\overline{C} = C''$: U suprotnosti su veze $C''D \cong CD$ i $\mathcal{B}(D, C'', C)$, pa je i ovaj slučaj nemoguć.

Dakle, u sva tri slučaja dolazi se do kontradikcije, pa sledi da ne važi $AB > A'B'$. Analogno se dokazuje da ne važi ni $AB < A'B'$, pa važi $AB \cong A'B'$. Na osnovu leme, iz $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$ sledi da su Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ međusobno podudarni.



Slika 93



Slika 94

94. *Lema:* Ako su B' i C' podnožja normala iz tačaka B i C na pravoj određenoj središtima P i Q ivica AB i AC trougla $\triangle ABC$, onda je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev i zbir njegovih uglova na protivosnovici jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$.

Dokaz leme: Neka je A' podnožje normale iz tačke A na pravoj PQ.

Dokažimo da važi $BB' \cong AA'$.

Pretpostavimo da je $AB \perp PQ$. Tačke B', A' i P su onda identične i važi $BB' \cong AA'$ (jer je tačka P središte duži AB)

Pretpostavimo da nije $AB \perp PQ$. Dokažimo da su tačke B' i A' sa raznih strana prave AB. Pretpostavimo suprotno — da su tačke B' i A' sa iste strane prave AB. Zbir uglova $\angle BPB'$ i $\angle APA'$ jednak je zbiru dva prava ugla, pa je bar jedan od ovih uglova prav ili tup. Ako je ugao $\angle BPB'$ prav ili tup, onda je zbir uglova u trouglu $\triangle BPB'$ veći ili jednak zbiru dva prava ugla, što je kontradikcija. Ako je ugao $\angle APA'$ prav ili tup, onda je zbir uglova u trouglu $\triangle APA'$ veći ili jednak zbiru dva prava ugla, što je kontradikcija. Dakle, polazna pretpostavka je bila pogrešna, pa sledi da su tačke B' i A' sa raznih strana prave AB. Odatle sledi da su uglovi $\angle BPB'$ i $\angle APA'$ podudarni kao unakrsni. Kako, pored toga, važi i $BP \cong AP$ i $\angle BB'P = \angle AA'P = \frac{\pi}{2}$, sledi (**T11.15($v$)**) da su trouglovi $\triangle BPB'$ i $\triangle APA'$ podudarni i $BB' \cong AA'$ (i $\angle B'BP = \angle A'AP$).

Analogno se dokazuje da važi i $CC' \cong AA'$ (i $\angle C'CQ = \angle A'AQ$), pa sledi i $BB' \cong CC'$. Kako su, pored toga, prave BB' i CC' normalne na pravoj PQ

tj. na pravoj $B'C'$, sledi da je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev.

Ako je ugao $\angle APQ$ tup (tada je ugao $\angle AQP$ oštar), onda poluprava BB' pripada konveksnom uglu $\angle ABC$, a poluprava CA pripada konveksnom uglu $\angle C'CB$ i važi $\angle B'BC + \angle BCC' = (\angle PBC - \angle B'BP) + (\angle C'CQ + \angle BCQ) = \angle ABC - \angle A'AP + \angle A'AQ + \angle BCA = \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$. Ako je ugao $\angle APQ$ prav (tada je ugao $\angle AQP$ oštar), onda su poluprava BB' i BA identične, a poluprava CA pripada konveksnom uglu $\angle C'CB$ i važi $\angle B'BC + \angle BCC' = \angle PBC + (\angle BCQ + \angle QCC') = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$. Ako su uglovi $\angle APQ$ i $\angle AQP$ oštri, onda poluprava BA pripada konveksnom uglu $\angle B'BC$, a poluprava CA pripada konveksnom uglu $\angle C'CB$ i važi $\angle B'BC + \angle BCC' = (\angle B'BP + \angle PBC) + (\angle BCQ + \angle C'CQ) = \angle A'AP + \angle ABC + \angle BCA + \angle A'AQ = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$. U slučajevima kada je $\angle AQP$ prav ili tup, analogno se dokazuje da važi $\angle B'BC + \angle BCC' = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$. Dakle, četvorougao $BCC'B'$ je Sakerijev i zbir njegovih uglova na protivosnovici jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$. $\square$

Neka su B' i C' podnožja normala iz tačaka B i C na pravu određenu središtima duži AB i AC. Na osnovu leme, četvorougao $BCC'B'$ je Sakerijev i zbir njegovih uglova na protivosnovici jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$. Na osnovu teoreme **11.17**, uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla međusobno su podudarni, pa sledi $\angle B'BC = \angle C'CB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)$. Na osnovu teoreme **11.18**, prava određena središtima N i M osnovice i protivosnovice Sakerijevog četvorougla $BCC'B'$ je njihova zajednička normala. Prave BB' i MN su normalne na pravoj $B'C'$, odakle sledi da su hiperparalelne. Neka je p' poluprava sa temenom B i paralelna polupravoj MN. Kako su prave BB' i MN hiperparalelne, poluprava p' pripada uglu $\angle B'BM$, pa je ugao koji zahvataju poluprava p' i poluprava BM (to je ugao paralelnosti za duž BM) manji od ugla $\angle B'BM$. Dakle, $\Pi(BC/2) = \Pi(BM) < \angle B'BC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)$.

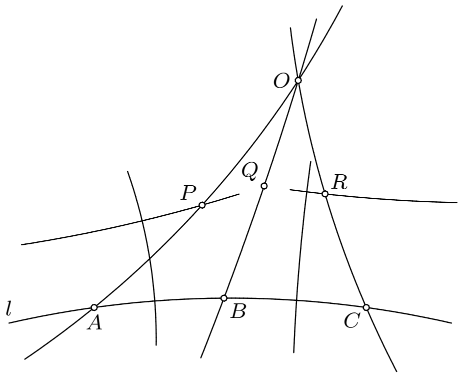
95. *Lema:* Ako su B' i C' podnožja normala iz tačaka na pravoj određenoj središtima P i Q ivica AB i AC trougla $\triangle ABC$, onda je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev i zbir njegovih uglova na protivosnovici jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$.

Dokaz leme: Videti dokaz leme u rešenju **94**. $\square$

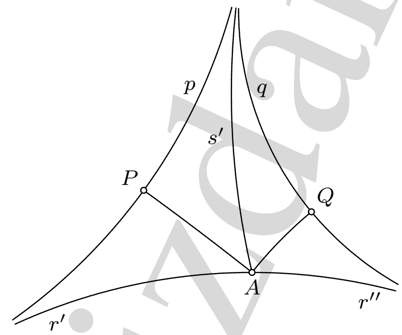
Pretpostavimo suprotno, tj. da su središta duži OA, OB, OC (označimo ih sa P, Q, R) kolinearne tačke. Neka je p prava koja sadrži tačke P, Q i R. Ne narušavajući opštost razmatranja, pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(A, B, C)$. Ako su A', B' i C' podnožja normala iz tačaka A, B i C na pravoj p, onda su, na osnovu leme, četvorouglovi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ Sakerijevi. Na osnovu teoreme **11.18**, medijatrisa duži AB normalna je na pravoj p, pa su prave l i p hiperparalelne. Na osnovu iste teoreme, i medijatrisa duži BC normalna je na pravoj p. Međutim, kako važi raspored $\mathcal{B}(A, B, C)$, te dve medijatrise nisu identične, što znači da dve hiperparalelne prave l i p imaju dve zajedničke normale, što je u kontradikciji sa teoremom **31.9**.

Dakle, polazna pretpostavka je bila pogrešna, pa sledi da središta duži OA,

OB i OC nisu kolinearne tačke, što je i trebalo dokazati.



Slika 95



Slika 96

96. Neka je r prava koja je paralelna pravama p i q, ali ne u istom smeru, tj. neka je r prava koja sa pravama p i q obrazuje asimptotski trougao sa sva tri temena nesvojstvena (takva prava je jedinstvena, jer postoji jedinstvena prava koja pripada dvama raznim paraboličkim pramenovima pravih (**T32.1**)).

Dokažimo da je traženi skup tačaka skup tačaka prave r.

(⊆:) Dokažimo da sve tačke prave r pripadaju traženom skupu. Neka je A tačka prave r, neka su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q i neka je s' poluprava sa temenom A paralelna pravama p i q. Neka je r' poluprava sa temenom A prave r koja je paralelna pravoj p, a r'' poluprava sa temenom A prave r koja je paralelna pravoj q (poluprave r' i r'' su komplementne). Uglovi koji zahvataju poluprave r' i AP odnosno s' i AP su međusobno jednaki, jer su jednaki uglu paralelnosti za dužinu AP. Uglovi koji zahvataju poluprave r'' i AQ odnosno s' i AQ su međusobno jednaki, jer su jednaki uglu paralelnosti za dužinu AQ. Ugao koji zahvataju poluprave r' i r'' je, dakle, jednak dvostrukom zbiru uglova koji zahvataju poluprave AP i s' i poluprave s' i AQ. Ugao koji zahvataju poluprave r' i r'' je opružen, pa je zbir uglova koji zahvataju poluprave AP i s' i poluprave s' i AQ jednak pravom uglu. Poluprava s' pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave AP i AQ, pa je ugao $\angle PAQ$ prav. Dakle, sve tačke prave r pripadaju traženom skupu tačaka.

(⊇:) Dokažimo da sve tačke traženog skupa pripadaju pravoj r, tj. dokažimo da ne postoji tačka A koja ne pripada pravoj r takva da je ugao $\angle PAQ$ prav (gde su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q).

Neka su tačka A i prava q sa raznih strana prave p i neka su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q. Pretpostavimo da je ugao $\angle PAQ$ prav. Tačke A i Q su sa raznih strana prave p, pa kako je $AP \perp p$ sledi da je ugao $\angle APQ$ tup. Zbir uglova u trouglu $\triangle PAQ$ je veći od zbira uglova $\angle PAQ$ i $\angle APQ$, pa je veći od zbira dva prava ugla, što je kontradikcija.

Analogno se dokazuje da ni za jednu tačku A takvu da su A i p sa raznih strana prave q ugao $\angle PAQ$ nije prav (gde su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q).

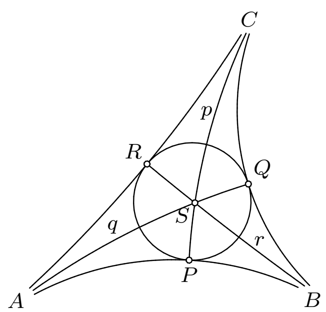
Neka su tačka A i prava q sa iste strane prave p, neka su tačka A i prava p sa iste strane prave q (tačka A i prava r su, dakle, sa iste strane prave p, odnosno prave q). Neka su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q. Pretpostavimo da je ugao $\angle PAQ$ prav i dokažimo da tačka A pripada pravoj r. Neka je s' poluprava sa temenom A paralelna pravama p i q. Neka je r' poluprava sa temenom A koja je paralelna pravoj p, a nije paralelna pravoj q i neka je r'' poluprava sa temenom A koja je paralelna pravoj q, a nije paralelna pravoj p. Uglovi koji zahvataju poluprave r' i AP odnosno s' i AP su međusobno jednaki, jer su jednaki uglu paralelnosti za dužinu AP. Uglovi koji zahvataju poluprave r'' i AQ odnosno s' i AQ su međusobno jednaki, jer su jednaki uglu paralelnosti za dužinu AQ. Ugao koji zahvataju poluprave r' i r'' je, dakle, jednak dvostrukom zbiru uglova koji zahvataju poluprave AP i s' i poluprave s' i AQ. Poluprava s' pripada konveksnom uglu $\angle PAQ$ i ovaj ugao je na osnovu pretpostavke prav, pa sledi da je ugao koji zahvataju poluprave r' i r'' opružen, tj. poluprave r' i r'' pripadaju istoj pravoj. Ta prava paralelna je pravama p i q, ali ne u istom smeru. Na osnovu teoreme **32.1**, takva prava je jedinstvena, pa sledi da poluprave r' i r'' pripadaju pravoj r i da tačka A pripada pravoj r, što je i trebalo dokazati.

Dakle, ne postoji tačka A koja ne pripada pravoj r takva da je ugao $\angle PAQ$ prav (gde su P i Q podnožja normala iz tačke A na pravama p i q).

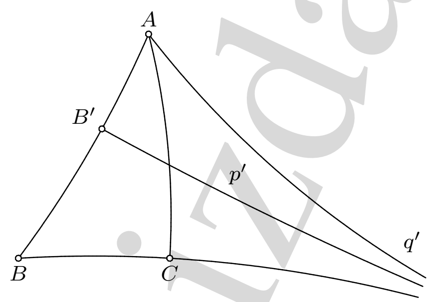
97. Na osnovu teoreme **33.5**, bilo koja dva trougla kojima su sva tri temena nesvojstvena su podudarna, pa su poluprečnici upisanih krugova za sve trouglove kojima su sva tri temena nesvojstvena jednaki.

Neka je $\triangle ABC$ proizvoljni trougao sa sva tri temena nesvojstvena i neka su prave a, b i c ivice trougla koje odgovaraju temenima A, B i C redom. Neka je S središte upisanog kruga k, neka su P, Q i R tačke u kojima ovaj krug dodiruje ivice c, a i b trougla i neka su p, q i r poluprave sa temenom S koje su paralelne polupravama QC, RA i PB redom. Kako su paralelne poluprave p i QC i poluprave QC i RC, sledi da su paralelne i poluprave p i RC. Analogno važi i da su paralelne poluprave q i PA i poluprave r i QB. Trouglovi $\triangle APS$, $\triangle SPB$, $\triangle BSQ$, $\triangle SQC$, $\triangle SCR$, $\triangle SRA$ su, dakle, trouglovi sa nesvojstvenim temenima A, B, B, C, C i A redom. Kako važi $\angle APS = \angle SPB = \angle BQS = \angle SQC = \angle CRS = \angle SRA = \frac{\pi}{2}$ i $SP = SQ = SR = \rho$ (duži SP, SQ i SR podudarne su poluprečniku ρ kruga k), na osnovu teoreme **33.2** o podudarnosti asimptotskih trouglova, sledi da su trouglovi $\triangle APS$, $\triangle SPB$, $\triangle BSQ$, $\triangle SQC$, $\triangle SCR$, $\triangle SRA$ podudarni, odakle sledi da su podudarni i uglovi $\angle ASP$, $\angle PSB$, $\angle BSQ$, $\angle QSC$, $\angle CSR$, $\angle RSA$. Ovi uglovi sa temenom S razlažu ravan na šest disjunktnih uglova, pa je njihov zbir jednak 2π. Kako su oni podudarni, svaki od njih, dakle, jednak je $\frac{\pi}{3}$.

Poluprave p i QC su paralelne i prava SQ je normalna na pravoj QC, pa je ugao $\angle CSQ$ ugao paralelnosti za duž SQ, tj. za dužinu ρ. Dakle, $\angle CSQ = \Pi(SQ) = \Pi(\rho)$. Kako je $\angle CSQ = \frac{\pi}{3}$, sledi $\frac{\pi}{3} = \Pi(\rho)$, odnosno $\rho = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{3})$.



Slika 97



Slika 98

98. Zbir uglova trouglova u hiperboličkoj ravni manji je od zbira dva prava ugla, pa, kako je ugao $\angle BCA$ prav, sledi da su uglovi $\angle ABC$ i $\angle CAB$ oštri. Na osnovu teoreme **31.3**, postoji poluprava p' sa temenom B' koje pripada polupravoj BA, takva da je ona normalna na polupravoj BA i paralelna polupravoj BC. Važi $b' < c$, pa je $\mathcal{B}(B, B', A)$. Poluprave p' i BC su paralelne, a poluprave BB' i p' normalne, pa sledi $\angle ABC = \Pi(BB')$. Kako je $\angle ABC = \Pi(b')$, sledi $\Pi(BB') = \Pi(b')$ i $BB' = b'$. Iz $\mathcal{B}(B, B', A)$, $BB' = b'$ i $BA = c$ sledi $AB' = c - b'$.

Neka je q' poluprava sa temenom A paralelna polupravoj BC. Kako je $AC \perp BC$ i $q' \| BC$, sledi da je ugao koji zahvataju poluprave q' i AC jednak $\Pi(AC) = \Pi(b)$. Iz $p' \| BC$ i $BC \| q'$ sledi $p' \| q'$, pa, kako je $p' \perp AB'$ i $p' \| q'$, ugao koji zahvataju poluprave AB i q' jednak je $\Pi(AB') = \Pi(c - b')$.

Poluprava AC pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave AB i q', pa je ugao koji zahvataju poluprave AB i q' jednak zbiru ugla $\angle BAC$ i ugla koji zahvataju poluprave AC i q', tj. $\Pi(c - b') = \angle BAC + \Pi(b)$, tj. $\angle BAC = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, QED.

99. Na osnovu teoreme **31.3**, postoji poluprava paralelna polupravoj AB i normalna na pravoj AC. Neka je to poluprava d i neka je D zajednička tačka te poluprave i prave AC. Kako je poluprava CB normalna na pravoj AC i seče polupravu AB, važi raspored $\mathcal{B}(A, C, D)$. Analogno, neka je e poluprava paralelna polupravoj AB normalna na pravoj CB (u tački E, $\mathcal{B}(C, B, E)$).

Poluprave AB i d su paralelne, pa, kako je $AD \perp d$, sledi da je ugao $\angle BAC$ ugao paralelnosti za duž AD, tj. $\angle BAD = \Pi(AD)$. Kako je, na osnovu uslova zadatka, $\angle BAC = \Pi(x)$, sledi $AD = x$.

Poluprave AB i e su paralelne, pa, kako je $BE \perp e$, sledi da je ugao koji zahvataju poluprave BE i AB ugao paralelnosti za duž BE. Ugao koji zahvataju poluprave BE i AB podudaran je uglu $\angle ABC$ (jer su to unakrsni uglovi), pa važi $\angle ABC = \Pi(BE)$. Kako je, na osnovu uslova zadatka, $\angle ABC = \Pi(y)$, sledi da je $BE = y$.

Neka je CP poluprava paralelna polupravoj AB. Poluprava CB seče polupravu AB, pa poluprava CP pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave CE i CD. Kako su paralelne poluprave AB, d i e, paralelne su i poluprave CP, d i e (na osnovu tranzitivnosti paralelnosti polupravih, **T25.6**).

Poluprave CP i d su paralelne i važi $CD \perp d$, pa sledi da je ugao $\angle DCP$ ugao paralelnosti za duž DC, tj. $\angle DCP = \Pi(DC)$.

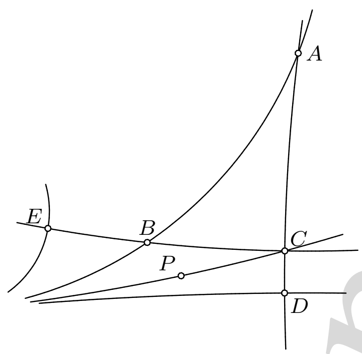
Poluprave CP i e su paralelne i važi $CE \perp e$, pa sledi da je ugao $\angle PCE$ ugao paralelnosti za duž CE, tj. $\angle PCE = \Pi(CE)$.

Dakle, kako je $\mathcal{B}(A, C, D)$ i $\mathcal{B}(E, B, C)$ i kako poluprava CP pripada konveksnom uglu koji zahvataju poluprave CE i CD, važi:

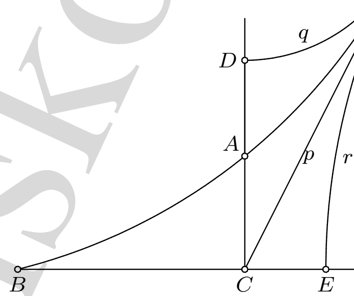
$$\Pi(x - AC) + \Pi(BC + y) = \Pi(AD - AC) + \Pi(BC + BE) =$$

$$= \Pi(DC) + \Pi(CE) = \angle DCP + \angle PCE = \angle DCB = \frac{\pi}{2} \,,$$

što je i trebalo dokazati.



Slika 99



Slika 100

100. Neka je p poluprava sa temenom C paralelna polupravoj BA. Poluprava CA seče polupravu AB, pa su poluprava p i tačka B sa raznih strana prave CA. Neka je D tačka takva da je $\mathcal{B}(C, A, D)$ i $AD = a'$ i neka je q poluprava normalna u tački D na pravoj AC i sa suprotne strane prave AC u odnosu na tačku B. Ugao koji zahvataju poluprave BA i AD podudaran je, kao unakrsni ugao, uglu $\angle BAC$. Dakle, poluprave BA i AD zahvataju ugao $\angle BAC = \Pi(a')$ i pored toga je $AD \perp q$ i $AD = a'$, pa, na osnovu definicije ugla paralelnosti, sledi da su poluprave BA i q paralelne. Iz paralelnosti polupravih BA i q i polupravih BA i p, na osnovu tranzitivnosti paralelnosti polupravih (**T25.6**), sledi da su poluprave p i q paralelne. Iz $AC = b$, $AD = a'$ i $\mathcal{B}(C, A, D)$ sledi da je $CD = CA + AD = b + a'$. Iz $CD \perp q$, $CD = b + a'$ i $p \| q$ sledi da poluprave CD i p zahvataju ugao $\Pi(b + a')$.

Neka je E tačka takva da je $\mathcal{B}(B, C, E)$ i $BE = b'$ i neka je r poluprava normalna u tački E na pravoj BC i sa iste strane prave BC kao i tačka A. Iz $BE = b'$, $BE \perp q$ i $\angle ABE = \angle ABC = \Pi(b')$ sledi da su poluprave BA i r

paralelne. Iz $BA \| p$ i $BA \| r$ sledi $p \| r$. Važi $BC = a$, $BE = b'$ i $\mathcal{B}(B, C, E)$, pa je $CE = BE - BC = b' - a$. Iz $CE = b' - a$, $CE \perp q$ i $p \| r$ sledi da poluprave CE i p zahvataju ugao $\Pi(b' - a)$.

Ugao $\angle BCA$ je prav, pa je prav i njemu naporedni ugao koji zahvataju poluprave CD i CE. Poluprava p pripada uglu koji zahvataju poluprave CD i CE i razlaže ga na uglove koje zahvata sa polupravama CD i CE. Ti uglovi jednaki su $\Pi(b + a')$ i $\Pi(b' - a)$, pa sledi $\Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = \pi/2$, što je i trebalo dokazati.

101. Prave upravne na jednoj, a paralelne drugim dvema ivicama asimptotskog trougla kojem su sva tri temena nesvojstvena, seku se u tački koju zovemo središte tog trougla.

Neka je c zajednička ivica dva trougla i neka su a i b, odnosno a' i b' njihove preostale ivice. Neka je p prava normalna na pravoj c i paralelna drugim dvema ivicama a i b prvog trougla i neka je P presečna tačka pravih p i c. Neka je p' prava normalna na pravoj c i paralelna drugim dvema ivicama a' i b' drugog trougla i neka je P' presečna tačka pravih p' i c. Neka je S središte prvog, a S' središte drugog trougla.

(1) Prepostavimo da su trouglovi sa iste strane prave c.

  (a) Ako bi bilo $P = P'$ trouglovi bi imali sve tri ivice zajedničke, što je suprotno prepostavci.

  (b) Ako nije $P = P'$, neka je $\mathcal{I}_1$ osna refleksija $\mathcal{S}_o$ (gde je o medijatrisa duži PP'), a $\mathcal{I}_2$ translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$. (Kako je $o \perp c$, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_o$ prava c se preslikava na sebe, ali suprotno usmerenu. Poluprave PS i $P'S'$ su normalne na pravoj c i o je medijatrisa duži PP', pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_o$ poluprava PS preslikava na polupravu $P'S'$. Ivica a prvog trougla (različita od c) paralelna je polupravoj PS i pravoj c, pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_o$ preslikava na pravu koja je pravoj c paralelna u suprotnom smeru i koja je paralelna polupravoj $P'S'$, a to je upravo ivica a' drugog trougla. Analogno se dokazuje da se i treća ivica (b) prvog trougla osnom refleksijom $\mathcal{S}_o$ preslikava na ivicu drugog trougla (b'), pa se osnom refleksijom $\mathcal{S}_o$ prvi trougao zaista preslikava na drugi. Slično se dokazuje da se prvi trougao preslikava na drugi i translacijom $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$.)

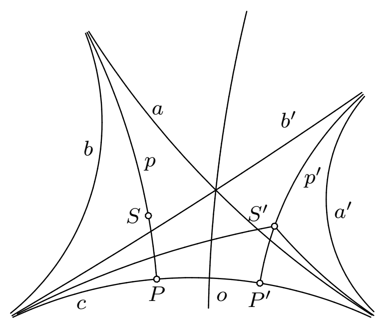
(2) Pretpostavimo da su trouglovi sa raznih strana prave c.

  (a) Ako je $P = P'$, neka je $\mathcal{I}_1$ centralna simetrija $\mathcal{S}_P$, a $\mathcal{I}_2$ osna refleksija $\mathcal{S}_c$.

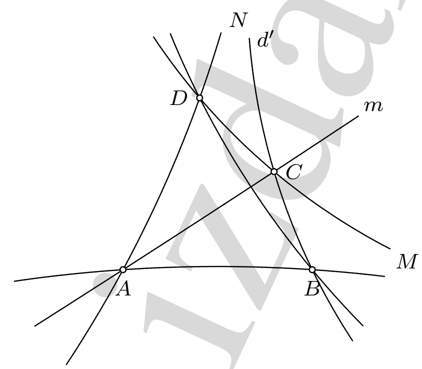
  (b) Ako nije $P = P'$, neka je $\mathcal{I}_1$ klizajuća refleksija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$, a $\mathcal{I}_2$ centralna simetrija $\mathcal{S}_O$ (gde je O središte duži PP').

Ako je $\mathcal{R}$ rotacija oko tačke S' za ugao $2\pi/3$, onda se drugi asimptotski trougao u rotacijama $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}^2$ preslikava na sebe, pa su tražene izometrije: $\mathcal{I}_1$,

$\mathcal{I}_2$, $\mathcal{R}\circ\mathcal{I}_1$, $\mathcal{R}\circ\mathcal{I}_2$, $\mathcal{R}^2\circ\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{R}^2\circ\mathcal{I}_2$. Navedenim izometrijskim transformacijama, ivice prvog trougla preslikaju se u ivice drugog u svim permutacijama (ima ih $3! = 6$), pa su to sva tražena preslikavanja.



Slika 101



Slika 102

102. *I rešenje:*

Neka je m medijatrisa duži BD. Važi $AB \cong AD$, pa tačka A pripada pravoj m. U osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ tačke B i D se preslikavaju jednu u drugu, a tačka A je invarijantna. Dakle, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ poluprava AB preslikava se u polupravu AD (i obratno). Neka je d' slika poluprave DC u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$. (teme poluprave d' je tačka B). Poluprave AB i DC su paralelne, pa su paralelne i njihove slike u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ — poluprave AD i d'. Poluprave BC i d' su poluprave sa temenom B paralelne polupravoj AD, pa, kako je takva poluprava jedinstvena (**T25.2**), sledi da su poluprave BC i d' identične. Dakle, poluprava DC se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ preslikava u polupravu BC (i obratno). Presečna tačka polupravih BC i DC (tačka C) se, dakle, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ preslikava u sebe, što znači da tačka C pripada pravoj m.

Tačka C, dakle, pripada medijatrisi duži BD, pa važi $CB \cong CD$, što je i trebalo dokazati.

II rešenje:[10]

Neka je M nesvojstveno teme trougla $\triangle DAM$ određeno paralelnim polupravama AB i DC. Neka je N nesvojstveno teme trougla $\triangle ABN$ određeno paralelnim polupravama AD i BC.

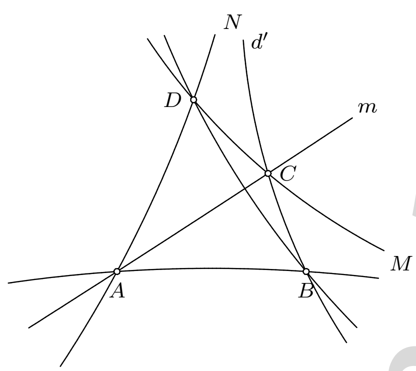
Iz $AB \cong AD$ i $\angle DAM \cong \angle BAN$, na osnovu teoreme **T33.2**(a), sledi da su nesvojstveni trouglovi $\triangle DAM$ i $\triangle ABN$ podudarni, pa važi $\angle CDA \cong \angle ABC$. Uglovi $\angle ABC$ i $\angle CBM$ su naporedni, pa je $\angle CBM = \pi - \angle ABC$. Analogno, važi i $\angle CDN = \pi - \angle CDA$, pa sledi $\angle CBM = \pi - \angle ABC = \pi - \angle CDA = \angle CDN$. Pored toga, uglovi $\angle BCM$ i $\angle DCN$ su podudarni kao unakrsni. Iz $\angle CBM \cong \angle CDN$ i $\angle BCM \cong \angle DCN$, na osnovu teoreme **T33.2**(b), sledi da su nesvojstveni trouglovi $\triangle CBM$ i $\triangle DCN$ podudarni i da su njihove odgovarajuće

[10] Tvrđenje zadatka važi i u apsolutnoj geometriji. Prvo rešenje važi i u apsolutnoj geometriji, ali drugo ne.

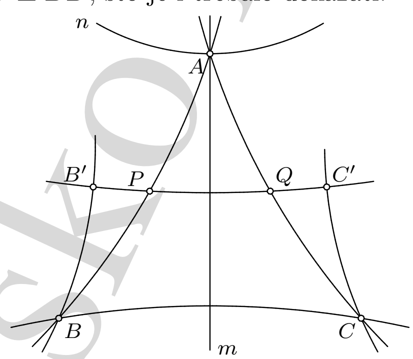
stranice CB i CD podudarne, što je i trebalo dokazati.

103. Neka je m medijatrisa duži BD. Važi $AB \cong AD$, pa tačka A pripada pravoj m. U osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ tačke B i D se preslikavaju jednu u drugu, a tačka A je invarijantna. Dakle, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ poluprava AB preslikava se u polupravu AD (i obratno). Neka je d' slika poluprave DC u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ (teme poluprave d' je tačka B). Poluprave AB i DC su paralelne, pa su paralelne i njihove slike u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ — poluprave AD i d'. Poluprave BC i d' su poluprave sa temenom B paralelne polupravoj AD, pa, kako je (**T25.2**) takva poluprava jedinstvena, sledi da su poluprave BC i d' identične. Dakle, poluprava DC se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ preslikava u polupravu BC (i obratno). Presečna tačka polupravih BC i DC (tačka C) se, dakle, u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ preslikava u sebe, što znači da tačka C pripada pravoj m.

Dakle, i tačka A i tačka C pripadaju medijatrisi duži BD, odakle sledi da je prava AC medijatrisa duži BD i važi $AC \perp BD$, što je i trebalo dokazati.



Slika 103



Slika 104

104. *Lema:* Ako su B' i C' podnožja normala iz tačaka B i C na pravoj određenoj središtima P i Q ivica AB i AC trougla $\triangle ABC$, onda je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev.

Dokaz leme: Videti dokaz leme u rešenju **94**. $\square$

Neka je m medijatrisa duži BC i neka su B' i C' podnožja normala iz tačaka B i C na pravoj PQ. Na osnovu leme, četvorougao $BCC'B'$ je Sakerijev, pa je, na osnovu teoreme **11.18**, medijatrisa m ivice BC istovremeno i medijatrisa ivice $B'C'$, odakle sledi da je prava m normalna na pravoj PQ.

Važi $AB \cong AC$, pa tačka A pripada medijatrisi m ivice BC. Neka je n prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj m. Tada važi $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n$.

Prave n, PQ i BC su normalne na pravoj m, tj. pripadaju hiperboličkom pramenu $\mathcal{X}_m$ čija je osnovica prava m. Dakle,

$$\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_{m'} \ ,$$

gde je m' neka prava pramena $\mathcal{X}_m$, tj. prava m' je normalna na pravoj m, pa je kompozicija $\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_{m'}$ centralna simetrija. Kompozicija $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC}$ je, dakle, centralna refleksija, i ona je, na osnovu teoreme **15.2**, involucija, što je i trebalo dokazati.

105. *Lema 1:* Ako je u apsolutnoj ravni tačka B središte duži AC, onda važi $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$.

Dokaz leme 1: Videti dokaz leme **1** u rešenju **26**. □

Lema 2: Ako su B' i C' podnožja normala iz tačaka na pravoj određenoj središtima P i Q ivica AB i AC trougla $\triangle ABC$, onda je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev i zbir njegovih uglova na protivosnovici jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$.

Dokaz leme 2: Videti dokaz leme u rešenju **94**. □

Označimo sa A_1, B_1 i C_1 središta ivica BC, CA i AB redom. Na osnovu leme **1** važi

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1} \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1} \circ \mathcal{S}_A.$$

Označimo sa A' i B' podnožja normala iz tačaka A i B na pravoj B_1A_1, sa a i b prave koje sadrže tačke A_1 i B_1 redom i normalne su na pravoj B_1A_1, a sa c i d prave koja sadrže tačke C_1 i A redom i normalne su na pravoj AB. Na osnovu leme **2**, sledi da je četvorougao $ABB'A'$ Sakerijev, pa je, na osnovu teoreme **11.18**, prava koja sadrži središte protivosnovice i normalna je na protivosnovici (prava c) istovremeno normalna i na osnovici (na pravoj $A'B'$). Prave a, b i c pripadaju pramenu pravih normalnih na pravoj B_1A_1, pa je kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$ osna refleksija $\mathcal{S}_{d'}$, gde je d' neka prava istog tog pramena. Stoga je:

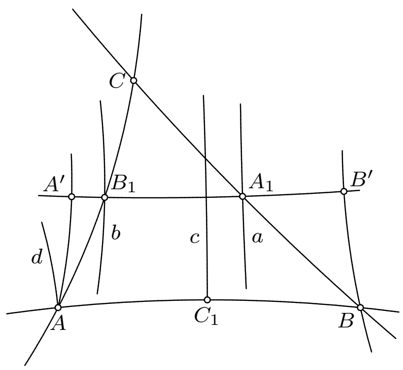
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1} \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{A_1B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1B_1} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_d =$$

$$= \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_d \;.$$

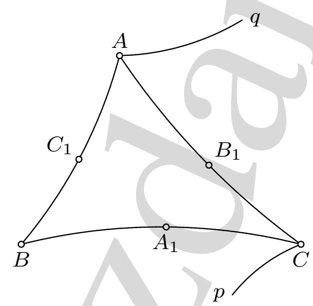
Iz $\mathcal{I}(A) = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1} \circ \mathcal{S}_A(A) = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1}(A) = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1}(B) = \mathcal{S}_{B_1}(C) = A$ sledi da je u izometriji $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_d$ tačka A invarijantna. Odatle, kako prava d sadrži tačku A, sledi da i prava d' sadrži tačku A. Kako je normala iz tačke A na pravoj B_1A_1 jedinstvena (**T12.1**), sledi da su prave AA' i d' identične.

Na osnovu leme **2**, zbir uglova na protivosnovici AB Sakerijevog četvorougla $ABB'A'$ jednak je zbiru uglova trougla $\triangle ABC$ tj, jednak je $\pi - \omega$. U Sakerijevom četvorouglu uglovi na protivosnovici su podudarni (**T11.17**), pa je $\angle A'AB = \frac{\pi-\omega}{2} = \frac{\pi}{2} - \omega/2$.

Ugao $\angle A'AB$ je oštar, pa poluprava AA' pripada pravom uglu koji zahvata polupravа AB sa onom polupravom prave d koja je sa iste strane prave AB kao i tačka C. Ugao između pravih d i AA' je, dakle, jednak $\frac{\pi}{2} - \angle A'AB = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \omega/2) = \omega/2$, pa je kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{AA'} \circ \mathcal{S}_d$ rotacija sa središtem A za ugao $2(\omega/2) = \omega$, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{A,\omega}$, što je i trebalo dokazati.



Slika 105



Slika 106

106. Data kompozicija $\mathcal{I}$ je direktna izometrijska kao kompozicija tri direktne izometrijske transformacije. Iz

$$\mathcal{I}(A) = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1}(A) = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1}(B) = \mathcal{S}_{B_1}(C) = A$$

sledi da izometrija $\mathcal{T}$ ima invarijantnu tačku A, pa je ova izometrija rotacija sa središtem A ili koincidencija.

Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_{C_1}$ poluprava AB preslikava se na polupravu BA. Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_{A_1}$ poluprava BA preslikava se na polupravu p sa temenom C, pri čemu su poluprave BA i p sa raznih strana prave BC i zahvataju sa njom podudarne uglove. Poluprava p, dakle, zahvata sa polupravom CB ugao $\angle ABC$, a sa polupravom CA ugao $\angle ABC + \angle BCA$. Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_{B_1}$ poluprava p preslikava se na polupravu q sa temenom A, pri čemu su poluprave p i q sa raznih strana prave AC i zahvataju sa njom podudarne uglove. Poluprava q, dakle, zahvata sa polupravom AC ugao $\angle ABC + \angle BCA$, odakle sledi da poluprava q sa polupravom AB zahvata ugao $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$.

Dakle, u kompoziciji $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1}$ poluprava AB preslikava se na polupravu q (sa temenom A) i sa njom zahvata ugao $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$, odakle sledi da izometrija $\mathcal{I}$ nije koincidencija, već rotacija sa središtem A i za ugao $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$. QED

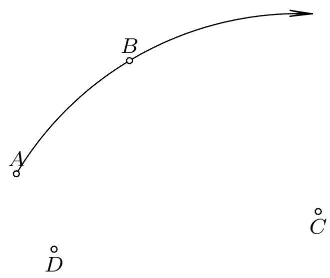
107. *Lema:* U apsolutnom prostoru važi $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ ($\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$ je translacija prostora i $\mathcal{S}_B$ i $\mathcal{S}_A$ su centralne simetrije prostora).

Dokaz leme: Videti dokaz leme **2** u rešenju **84**. □

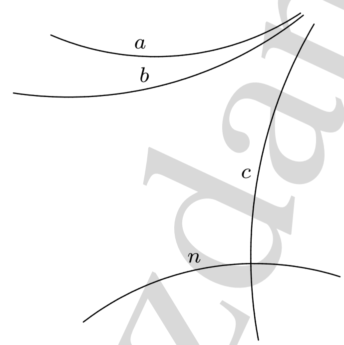
Na osnovu leme, važi:

$$\mathcal{T}_{2\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \xi\ .$$

Data izometrija je koincidencija.



Slika 107



Slika 108

108.

1° Pretpostavimo da se prave a i b seku u nekoj tački, tj. da one određuju eliptički pramen. Na osnovu teoreme **12.1**, postoji (jedinstvena) prava p koja sadrži tačku S i normalna je na pravoj n. Prava p pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n.

2° Pretpostavimo da su prave a i b paralelne, tj. pretpostavimo da one određuju parabolički pramen.

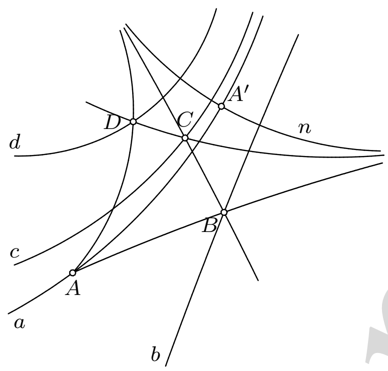
(a) Pretpostavimo da prava n ne pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Neka je C proizvoljna tačka prave n. Na osnovu teoreme **16.9**, postoji jedinstvena prava c koja sadrži tačku C i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Ako je prava c normalna na pravoj n, onda je c prava koja zadovoljava tražena svojstva. Ako prava c nije normalna na pravoj n, onda, na osnovu teoreme **31.3**, postoji prava c' koja je normalna na pravoj n i paralelna pravoj c u istom smeru kao i prava a (prava c', dakle, normalna je na pravoj n i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$).

(b) Pretpostavimo da prava n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Pretpostavimo da postoji prava c koja je normalna na pravoj n i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Ako je C presečna tačka pravih n i c, onda postoje dve različite prave (n i c) koje sadrže tačku C i pripadaju pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, što je u suprotnosti sa teoremom **16.9**. Dakle, ako prava n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, onda ne postoji prava koja pripada tom pramenu i normalna je na pravoj n.

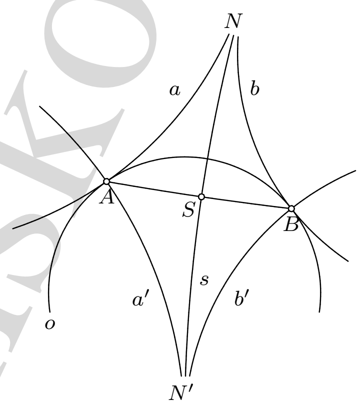
3° Pretpostavimo da su prave a i b hiperparalelne, tj. da one određuju hiperbolički pramen. Neka je prava m osnovica tog hiperboličkog pramena. Postoji prava koja pripada tom pramenu i normalna je na pravoj n, ako i samo ako postoji prava koja je normalna i na pravoj m i na pravoj n, tj. ako i samo ako prave m i n imaju zajedničku normalu. Na osnovu teoreme **31.8**, prave m i n imaju zajedničku normalu ako i samo ako su hiperparalelne ili identične. Ako su prave m i n hiperparalelne, njihova zajednička normala p pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n. Ako su prave m i n identične, svaka prava p normalna na pravoj n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$.

Dakle, tražena prava (prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n) postoji uvek, osim ako su prave a i b paralelne i prava n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ ili ako su prave a i b hiperparalelne i njihova zajednička normala m nije hiperparalelna niti identična sa pravom n.

109. Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ parabolički pramenovi pravih određeni pravama AB i DC, odnosno BC i AD. Na osnovu teoreme **32.1**, postoji jedinstvena prava (označimo je sa n) koja pripada paraboličkim pramenovima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Neka je a prava koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj n i neka je A' presečna tačka pravih a i n. Prava AA' je normalna na pravoj n, pa su, kao uglovi paralelnosti za dužinu AA', uglovi $\angle DAA'$ i $\angle BAA'$ podudarni. Odatle sledi da je prava a simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A četvorougla $ABCD$. Dakle, simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A četvorougla $ABCD$ normalna je na pravoj n. Analogno se dokazuje da su na pravoj n normalne i simetrala unutrašnjeg ugla kod temena C i simetrale spoljašnjih uglova četvorougla $ABCD$ kod temena B i D, pa sve one, dakle, pripadaju istom hiperboličkom pramenu pravih (čija je osnovica prava n). QED



Slika 109



Slika 110

110. Neka je $\mathcal{P}$ pramen paralelnih pravih koji određuje oricikl o i neka su a' i b' prave ovog pramena koje sadrže redom tačke A i B. Prave a i b su tangente oricikla o u tačkama A i B, pa važi $a \perp a'$ i $b \perp b'$. Neka su N i N' nesvojstvene tačke određene parovima pravih a i b, odnosno a' i b'.

Neka je S središte duži AB i neka je s prava koja sadrži tačku S i pripada paraboličkom pramenu $\mathcal{P}$ (takva prava postoji i jedinstvena je na osnovu teoreme **16.9**). Tačke A i B pripadaju oriciklu o, pa je, na osnovu teoreme **17.1**, prava AB sečica jednakih nagiba pravih a' i b', tj. $\angle SAN' = \angle SBN'$. Iz $\angle SAN' = \angle SBN'$ i $AS \cong SB$, na osnovu teoreme o podudarnosti asimptotskih trouglova (**T33.2**(a)) sledi da su asimptotski trouglovi $\triangle AN'S$ i $\triangle SN'B$ podudarni i, odatle, $\angle ASN' \cong \angle N'SB$. Uglovi $\angle ASN'$ i $\angle N'SB$ su podudarni i njihov zbir jednak je opruženom uglu, pa su oni pravi, tj. $AB \perp s$. Dakle, prava s je medijatrisa duži AB, pa važi $\mathcal{S}_s(A) = B$. Prave a' i s pripadaju pramenu $\mathcal{P}$, pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ prava a' preslikava na pravu koja sadrži tačku

$\mathcal{S}_s(A) = B$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$. Prava b' sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$, pa kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **16.9**) sledi $\mathcal{S}_s(a') = b'$. Prava a sadrži tačku A i normalna je na pravoj a', pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ prava a preslikava na pravu koja sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_s(a') = b'$. Prava b sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_s(a') = b'$, pa kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **12.1**) sledi $\mathcal{S}_s(a) = b$. Na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b$, pa je kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a$ osna refleksija (osna refleksija $\mathcal{S}_s$). Odatle, na osnovu definicije pramena pravih, sledi da prave s, a i b pripadaju jednom pramenu pravih. Na osnovu teoreme **16.12** postoji jedinstven pramen pravih kojem pripadaju prave a i b, pa prava s pripada paraboličkom pramenu određenom pravama a i b, tj. prava s paralelna je pravama a i b.

Kako je $AS \perp s$, $a' \| s$, $a \| s$, oštri uglovi koji zahvataju prave AS i a', odnosno prave AS i a jednaki su $\Pi(AS)$. Zbir oštrih uglova koji zahvataju prave AS i a', odnosno prave AS i a jednak je pravom uglu (jer je $a \perp a'$), pa je $2\Pi(AS) = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi $AS = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$. Tačka S je središte duži AB, pa je $AB = 2AS = 2\Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$.

111. Neka je $\mathcal{P}$ pramen paralelnih pravih koji određuje oricikl o i neka su a' i b' prave ovog pramena koje sadrže redom tačke A i B. Prave a i b su tangente oricikla o u tačkama A i B, pa važi $a \perp a'$ i $b \perp b'$. Neka su N i N' nesvojstvene tačke određene parovima pravih a i b, odnosno a' i b'.

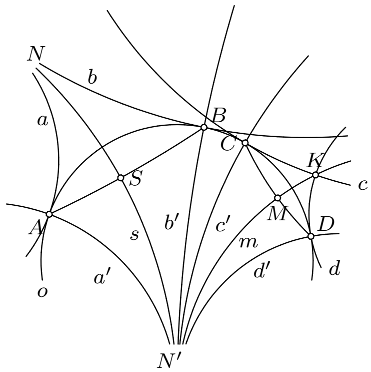
Neka je S središte duži AB i neka je s prava koja sadrži tačku S i pripada paraboličkom pramenu $\mathcal{P}$ (takva prava postoji i jedinstvena je na osnovu teoreme **16.9**). Tačke A i B pripadaju oriciklu o, pa je, na osnovu teoreme **17.1**, prava AB sečica jednakih nagiba pravih a' i b', tj. $\angle SAN' = \angle SBN'$. Iz $\angle SAN' = \angle SBN'$ i $AS \cong SB$, na osnovu teoreme o podudarnosti asimptotskih trouglova (**T33.2(**a**)**) sledi da su asimptotski trouglovi $\triangle AN'S$ i $\triangle SN'B$ podudarni i, odatle, $\angle ASN' \cong \angle N'SB$. Uglovi $\angle ASN'$ i $\angle N'SB$ su podudarni i njihov zbir jednak je opruženom uglu, pa su oni pravi, tj. $AB \perp s$. Dakle, prava s je medijatrisa duži AB, pa važi $\mathcal{S}_s(A) = B$. Prave a' i s pripadaju pramenu $\mathcal{P}$, pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ prava a' preslikava na pravu koja sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$. Prava b' sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$, pa kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **16.9**) sledi $\mathcal{S}_s(a') = b'$. Prava a sadrži tačku A i normalna je na pravoj a', pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ prava a preslikava na pravu koja sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_s(a') = b'$. Prava b sadrži tačku $\mathcal{S}_s(A) = B$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_s(a') = b'$, pa kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **12.1**) sledi $\mathcal{S}_s(a) = b$. Na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b$, pa je kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a$ osna refleksija (osna refleksija $\mathcal{S}_s$). Odatle, na osnovu definicije pramena pravih, sledi da prave s, a i b pripadaju jednom pramenu pravih. Na osnovu teoreme **16.12** postoji jedinstven pramen pravih kojem pripadaju prave a i b, pa prava s pripada paraboličkom pramenu određenom pravama a i b, tj. prava s paralelna je pravama a i b.

Kako je $AS \perp s$, $a' \| s$, $a \| s$, oštri uglovi koji zahvataju prave AS i a', odnosno prave AS i a jednaki su $\Pi(AS)$. Zbir oštrih uglova koji zahvataju prave AS i a', odnosno prave AS i a jednak je pravom uglu (jer je $a \perp a'$), pa je $2\Pi(AS) = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi $AS = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$. Tačka S je središte duži AB, pa je $AB = 2AS = 2\Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$.

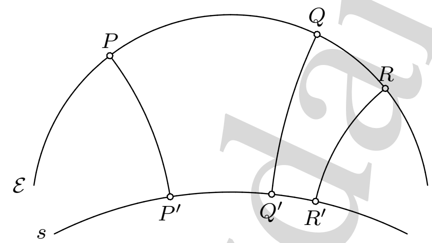
Neka su c' i d' prave pramena $\mathcal{P}$ koje sadrže redom tačke C i D. Prave c i d su tangente oricikla o u tačkama C i D, pa važi $c \perp c'$ i $d \perp d'$. Neka je M središte duži CD i neka je m prava koja sadrži tačku M i pripada paraboličkom pramenu $\mathcal{P}$ (takva prava postoji i jedinstvena je na osnovu teoreme **16.9**). Tačke C i D pripadaju oriciklu o, pa je, na osnovu teoreme **17.1**, prava CD sečica jednakih nagiba pravih c' i d', tj. $\angle MCN' = \angle MDN'$. Iz $\angle MCN' = \angle MDN'$ i $CM \cong MD$, na osnovu teoreme o podudarnosti asimptotskih trouglova (**T33.2(**a**)**) sledi da su asimptotski trouglovi $\triangle CMN'$ i $\triangle MN'D$ podudarni i, odatle, $\angle CMN' \cong \angle N'MD$. Uglovi $\angle CMN'$ i $\angle N'MD$ su podudarni i njihov zbir je jednak opruženom uglu, pa su oni pravi, tj. $CD \perp m$. Dakle, prava m je medijatrisa duži CD, pa važi $\mathcal{S}_m(C) = D$. Prave c' i m pripadaju pramenu $\mathcal{P}$, pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ prava c' preslikava na pravu koja sadrži tačku $\mathcal{S}_m(C) = D$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$. Prava d' sadrži tačku $\mathcal{S}_m(C) = D$ i pripada pramenu $\mathcal{P}$, pa, kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **16.9**), sledi $\mathcal{S}_m(c') = d'$. Prava c sadrži tačku C i normalna je na pravoj c', pa se u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_m$ prava c preslikava na pravu koja sadrži tačku $\mathcal{S}_m(C) = D$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_m(c') = d'$. Prava d sadrži tačku $\mathcal{S}_m(C) = D$ i normalna je na pravoj $\mathcal{S}_m(c') = d'$, pa kako je takva prava jedinstvena (na osnovu teoreme **12.1**) sledi $\mathcal{S}_m(c) = d$. Na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_d$, pa je kompozicija $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_c$ osna refleksija (osna refleksija $\mathcal{S}_m$). Odatle, na osnovu definicije pramena pravih, sledi da prave m, c i d pripadaju jednom pramenu pravih. Na osnovu teoreme **16.12**, postoji jedinstven pramen pravih kojem pripadaju prave c i d (pramen pravih koje sadrže tačku K), pa i prava m pripada tom pramenu, tj. prava m sadrži tačku M.

Prava m je medijatrisa duži CD i ona sadrži tačku K, pa iz $\angle CMK = \frac{\pi}{2} = \angle DMK$, $MK \cong MK$, $CM \cong MD$, na osnovu teoreme o podudarnosti trouglova (**T11.15(**i**)**), sledi da su trouglovi $\triangle CMK$ i $\triangle KMD$ podudarni i da su podudarni uglovi $\angle CKM$ i $\angle MKD$. Uglovi $\angle CKM$ i $\angle MKD$ su podudarni i njihov zbir jednak je pravom uglu (jer je $c \perp d$), pa važi $\angle CKM = \angle MKD = \frac{\pi}{4}$. Prave c i m su paralelne i važi $KC \perp c$, pa je ugao $\angle CKM$ ugao paralelnosti za dužinu CK, tj. $\angle CKM = \Pi(CK)$, odakle sledi $CK = \Pi^{-1}(\angle CKM) = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$.

Iz $AB = 2\Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$ i $CK = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$, sledi $AB = 2CK$, što je i trebalo dokazati.



Slika 111



Slika 112

112. Neka je $\mathcal{E}$ ekvidistanta čija je osnovica prava s i neka su P, Q i R proizvoljne različite tačke koje joj pripadaju. Neka su P', Q' i R' podnožja normala iz tačaka P, Q i R na pravoj s. Pretpostavimo, ne narušavajući opštost razmatranja, da važi $\mathcal{B}(P', Q', R')$. Visina ekvidistante $\mathcal{E}$ je različita od nule, pa tačke P i P' nisu identične (različite su i tačke Q i Q' i tačke R i R'). Važi $PP' \cong QQ' \cong RR'$. Prave PP' i QQ' normalne su na pravoj s, pa se ne seku. Analogno, ne seku se prave PP' i RR' i prave QQ' i RR'. Važi $\angle PP'Q' = \angle QQ'P' = \frac{\pi}{2}$ i $\angle QQ'R' = \angle RR'Q' = \frac{\pi}{2}$, pa su $PP'Q'Q$ i $QQ'R'R$ Sakerijevi četvorouglovi. Na osnovu teoreme **11.17**, uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla međusobno su podudarni, pa važi $\angle P'PQ = \angle Q'QP$. Zbir uglova u četvoruglu $PP'Q'Q$ manji je od zbira četiri prava ugla i jednak je $\angle PP'Q' + \angle P'Q'Q + \angle Q'QP + \angle QPP' = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\angle Q'QP$, odakle sledi da je ugao $\angle Q'QP$ oštar. Analogno se dokazuje da je oštar i ugao $\angle Q'QR$. Ugao $\angle PQR$ jednak je zbiru uglova $\angle Q'QP$ i $\angle Q'QR$, odakle sledi da je ugao $\angle PQR$ manji od opruženog. Ugao $\angle PQR$ manji je od opruženog, pa sledi da tačke P, Q i R nisu kolinearne, tj. ekvidistanta $\mathcal{E}$ nije prava. QED

113. Neka je a prava koja sadrži tačku A i pripada pramenu pravih kojem pripadaju prave b, c i d. Prave AB i AC upravne su na pravama b i c u tačkama B i C. Prave AB, a i AC pripadaju jednom pramenu pravih (pramenu konkurentnih pravih $\mathcal{X}_A$ čije je središte tačka A), pa na osnovu teoreme o normalama (**T16.7**) sledi

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AC} = \mathcal{S}_p \ ,$$

gde je p prava koja je normalna na pravoj BC i koja pripada pramenu kojem pripadaju i prave AB, a i AC, tj. pramenu $\mathcal{X}_A$. Kako je prava AD' normalna na pravoj BC i kako sadrži tačku A (dakle, prava AD' pripada pramenu $\mathcal{X}_A$) i, kako je, na osnovu teoreme **12.1**, takva prava jedinstvena, sledi da su prave p i AD' identične. Dakle, važi

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AC} = \mathcal{S}_{AD'} \ ,$$

odnosno

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{AD'} \circ \mathcal{S}_{AC} \ . \tag{1}$$

Analogno se dokazuje i

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AD} = \mathcal{S}_{AC'} \ ,$$

odnosno

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{AC'} \circ \mathcal{S}_{AD} \ . \tag{2}$$

Iz relacija (1) i (2) sledi

$$\mathcal{S}_{AD'} \circ \mathcal{S}_{AC} = \mathcal{S}_{AC'} \circ \mathcal{S}_{AD} \ . \tag{3}$$

Prave AD', AC i AB' pripadaju jednom pramenu pravih (pramenu $\mathcal{X}_A$) i prave BC i CD normalne su na na pravama AD' i AB' u tačkama D' i B'. Prave BC, AC i CD pripadaju jednom pramenu pravih (pramenu konkurentnih pravih $\mathcal{X}_C$ čije je središte C), pa je, na osnovu teoreme o normalama (**T16.7**)

$$\mathcal{S}_{AD'} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{AB'} = \mathcal{S}_x \ , \tag{4}$$

gde je x prava normalna na pravoj $B'D'$. Pored toga, prave AD', AC i AB' pripadaju pramenu $\mathcal{X}_A$, pa tom pramenu pripada i prava x. Dakle, prava x sadrži tačku A i normalna je na pravoj $B'D'$.

Na osnovu relacija (3) i (4) sledi

$$\mathcal{S}_{AC'} \circ \mathcal{S}_{AD} \circ \mathcal{S}_{AB'} = \mathcal{S}_x \ . \tag{5}$$

Prave AC', AD i AB' pripadaju jednom pramenu (pramenu $\mathcal{X}_A$), a prave BD i CD su normalne na pravama AC' i AB' redom u tačkama C' i B'. Prave BD, AD i CD pripadaju jednom pramenu (pramenu konkurentnih pravih $\mathcal{X}_D$ sa središtem D), pa, na osnovu teoreme o normalama (**T16.7**) važi

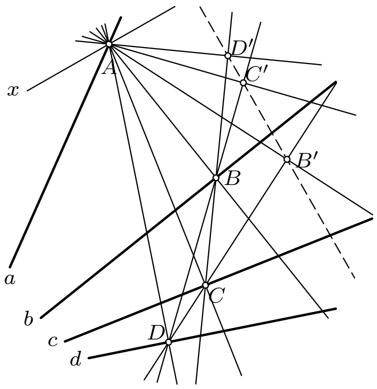
$$\mathcal{S}_{AC'} \circ \mathcal{S}_{AD} \circ \mathcal{S}_{AB'} = \mathcal{S}_y \ , \tag{6}$$

gde je y prava koja je normalna na pravoj $C'B'$. Prave AC', AD i AB' pripadaju pramenu $\mathcal{X}_A$, pa tom pramenu pripada i prava y. Prava y, dakle, sadrži tačku A i normalna je na pravoj $C'B'$.

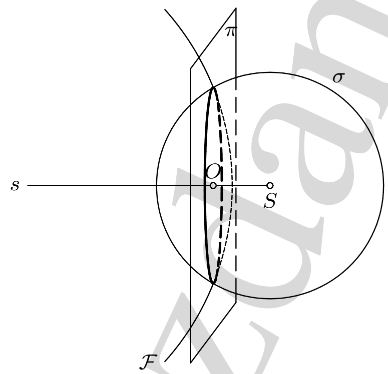
Iz relacija (5) i (6) sledi

$$\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y \ ,$$

odakle sledi da su prave x i y identične. Dakle, prava x sadrži tačku A i normalna je i na pravoj $B'D'$ i na pravoj $C'B'$. Na osnovu teoreme **12.1**, postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku B' i normalna je na pravoj y, odakle sledi da su prave $B'D'$ i $C'B'$ identične, tj. tačke B', C' i D' su kolinearne. QED.



Slika 113



Slika 114

114. Neka je X jedna od presečnih tačaka sfere σ i episfere $\mathcal{F}$. Neka je sfera σ određena eliptičkim snopom pravih $\mathcal{U}_1$ (koje sadrže tačku S). Sfera σ je skup svih tačaka prostora osnosimetričnih tački X u odnosu na prave snopa $\mathcal{U}_1$. Ako je $\mathcal{V}_1$ eliptički snop ravni koje sadrže tačku S (tj. snop ravni generisan snopom pravih $\mathcal{U}_1$), onda je sfera σ istovetna sa skupom svih slika tačke X u ravanskim refleksijama u odnosu na ravni snopa $\mathcal{V}_1$. Tačka X' različita od tačke X, dakle, pripada sferi σ ako i samo medijalna ravan duži XX' pripada snopu $\mathcal{V}_1$.

Ako je episfera $\mathcal{F}$ određena snopom pravih $\mathcal{U}_2$, onda je ona skup svih tačaka prostora osnosimetričnih tački X u odnosu na prave snopa $\mathcal{U}_2$. Ako je $\mathcal{V}_2$ snop ravni generisan snopom pravih $\mathcal{U}_2$, onda je episfera $\mathcal{F}$ istovetna sa skupom svih slika tačke X u ravanskim refleksijama u odnosu na ravni snopa $\mathcal{V}_2$. Tačka X' različita od tačke X pripada episferi $\mathcal{F}$ ako i samo medijalna ravan duži XX' pripada snopu $\mathcal{V}_2$.

Dakle, skup presečnih tačaka sfere σ i episfere $\mathcal{F}$ je skup tačaka X' takvih da medijalna ravan duži XX' pripada i snopu $\mathcal{V}_1$ i snopu $\mathcal{V}_2$. Na osnovu teoreme **18.13**, presek dva snopa ravni $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ je pramen ravni $\mathcal{Y}$. Sve ravni pramena $\mathcal{Y}$ pripadaju snopu $\mathcal{V}_1$, pa sve one sadrže tačku S. Odatle sledi da je $\mathcal{Y}$ koaksijalni pramen ravni (koje sadrže neku pravu s kojoj pripada tačka S).

Presek sfere σ i episfere $\mathcal{F}$ je skup slika tačke X u odnosu na ravni pramena $\mathcal{Y}$. Za svaku tačku X' koja pripada tom preseku važi $XX' \perp s$ (jer postoji ravan koja sadrži pravu s i normalna je na pravoj XX'). Na osnovu teoreme **12.5**, sve takve prave XX' pripadaju jednoj ravni koja je takođe upravna na pravoj s. Dakle, presek sfere σ i episfere $\mathcal{F}$ pripada ravni π koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj s.

Ako je O presečna tačka prave s i ravni π, onda sve ravni pramena $\mathcal{Y}$ sadrže tu tačku, pa se ona u odnosu na ravni tog pramena preslikava u sebe. Dakle, duž OX se u odnosu na ravni pramena $\mathcal{Y}$ preslikava u podudarne duži OX'. Važi i obratno: ako za tačku X' ravni π važi $OX \cong OX'$, onda medijalna ravan duži XX' sadrži tačku O i normalna je na ravni π, pa pripada pramenu $\mathcal{Y}$. Dakle, presek sfere σ i episfere $\mathcal{F}$ je skup tačaka X' ravni π za koje važi $OX \cong OX'$ tj. krug sa središtem O koji sadrži tačku X i pripada ravni π.

115. Neka su p i q prave koje sadrže središte apsolute Poenkareovog disk modela hiperboličke ravni i međusobno su normalne u euklidskom smislu. Osna refleksija $\mathcal{S}_p$ u smislu modela je upravo euklidska osna refleksija $\mathcal{S}_p$ i u njoj se $h-$prava q preslikava na sebe samu. Dakle, prave p i q su međusobno normalne i u smislu modela.

Pored toga, inverzija i osna refleksija (u euklidskom smislu) koje odgovaraju izometrijskim transformacijama u Poenkareovom modelu su konformna preslikavanja ("čuvaju uglove"), pa sledi da je svaki prav $h-$ugao u smislu modela, prav i u euklidskom smislu i obratno (odatle sledi da mera $h-$ugla u modelu odgovara njegovoj euklidskoj meri i da je Poenkareov model konfomni model hiperboličke ravni). Dakle, potrebno je odrediti $h-$pravu n koja sadrži $h-$tačku A i normalna je na $h-$pravoj a u euklidskom smislu.

I rešenje:

(1) Pretpostavimo da je A središte apsolute. Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu duž koja pripada pravoj p_a, onda je tražena $h-$prava n određena pravom koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj p_a. Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu lûk kruga k_a, onda je tražena $h-$prava n određena pravom koja sadrži tačku A i središte kruga k_a.

(2) Pretpostavimo da tačka A nije središte apsolute.

Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu segment nekog kruga k_a, potrebno je odrediti krug (ili pravu) koji je normalan na k_a i apsoluti i pri tom sadrži tačku A. Neka je r radikalna osa apsolute i kruga k_a (kako se oni seku, radikalna osa je određena upravo njihovim presečnim tačkama). Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je $s_{AA'}$ medijatrisa duži AA'. Ako se prave r i $s_{AA'}$ seku u tački O_n, onda je tražena $h-$prava n segment euklidskog kruga k_n sa središtem O_n i poluprečnikom O_nA (taj krug je normalan na apsoluti jer sadrži tačku A i njenu sliku A' u inverziji u odnosu na apsolutu). $h-$prava n zadovoljava uslove zadatka jer sadrži $h-$tačku A i normalna je na $h-$pravu a (jer tačka O_n pripada pravoj r, pa kako je k_n normalan na apsoluti, normalan je i na k_a). Ako se prave r i $s_{AA'}$ ne seku, tada tačke A i A' pripadaju pravoj određenoj središtima apsolute i kruga k_a, pa je i tražena $h-$prava n određena tom istom pravom.

Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu duž koja pripada pravoj p_a, potrebno je odrediti krug (ili pravu) normalan na p_a i apsoluti i pri tom sadrži tačku A. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je $s_{AA'}$ medijatrisa duži AA'. Ako se prave p_a i $s_{AA'}$ seku u tački O_n, onda je tražena $h-$prava n segment euklidskog kruga k_n sa središtem O_n i poluprečnikom O_nA (taj krug je normalan na apsoluti, jer sadrži tačku A i njenu sliku A' u inverziji u odnosu na apsolutu). $h-$prava n zadovoljava uslove zadatka jer sadrži $h-$tačku A i normalna je na $h-$pravu a (jer tačka O_n pripada pravoj p_a, pa je k_n normalan na p_a). Ako se prave p_a i $s_{AA'}$ ne seku, tada tačke A i A' pripadaju pravoj normalnoj na krug k_a pa je tražena $h-$prava n određena pravom AA'.

II rešenje:

Lema 1: Ako se u inverziji u odnosu na krug k tačka X koja ne pripada krugu k preslikava u tačku X', onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X'

normalan na krug k.

Dokaz leme 1: Neka su tačke O i O' središta krugova k i l, neka su r i r' poluprečnici krugova k i l i neka je T tačka dodira kruga l i tangente iz tačke O na krug l. Tačka X se u inverziji u odnosu na krug k preslikava u tačku X', pa važi $OX \cdot OX' = r^2$. Na osnovu teoreme **28.3** (teorema o potenciji tačke u odnosu na krug), važi $OX \cdot OX' = OT^2$, pa sledi $OT = r$. Dakle, tačka T pripada krugu k, a kako, pored toga, ona pripada i krugu l i važi $\angle OTO' = \frac{\pi}{2}$ (jer je prava OT tangenta iz tačke O na krug l), sledi da su krugovi k i l međusobno normalni. □

Lema 2: Ako se u osnoj refleksiji u odnosu na pravu p tačka X koja ne pripada pravoj p preslikava u tačku X', onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X' normalan na pravoj p.

Dokaz leme 2: Ako krug l sadrži tačke X i X', onda njegovo središte pripada medijatrisi duži XX', a to je upravo prava p. Svaki krug čije središte pripada pravoj p normalan je na pravoj p, pa je, dakle, svaki krug l koji sadrži tačke X i X' normalan na pravoj p. □

(1) Pretpostavimo da je A središte apsolute.

Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu duž koja pripada pravoj p_a, onda je tražena $h-$prava n određena pravom koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj p_a. Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu lûk kruga k_a, onda je tražena $h-$prava n određena pravom koja sadrži tačku A i središte kruga k_a.

(2) Pretpostavimo da tačka A nije središte apsolute i da ne pripada $h-$pravoj a.

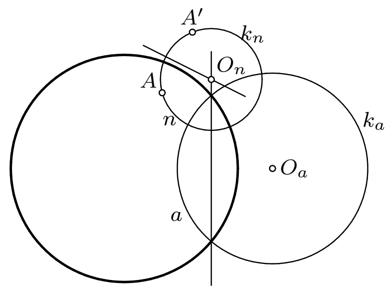
Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu segment nekog kruga k_a, potrebno je odrediti krug (ili pravu) normalan na k_a i apsoluti i pri tom sadrži tačku A. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je A'' slika tačke A u inverziji u odnosu na krug k_a. Ako su tačke A, A' i A'' kolinearne, onda je tražena $h-$prava n određena pravom koja sadrži tačke A, A' i A''. Ako tačke A, A' i A'' nisu kolinearne, onda je tražena $h-$prava n segment euklidskog kruga k_n opisanog oko trougla $\triangle AA'A''$.

Ako je $h-$prava a u euklidskom smislu duž koja pripada pravoj p_a, potrebno je odrediti krug (ili pravu) normalan na p_a i apsoluti i pri tom sadrži tačku A. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je A'' slika tačke A u osnoj refleksiji u odnosu na pravu p_a. Ako su tačke A, A' i A'' kolinearne, onda je tražena $h-$prava n određena tom pravom koja sadrži tačke A, A' i A''. Ako tačke A, A' i A'' nisu kolinearne, onda je tražena $h-$prava n segment euklidskog kruga k_n opisanog oko trougla $\triangle AA'A''$.

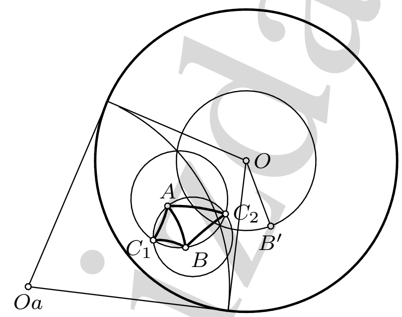
(3) Pretpostavimo da tačka A nije središte apsolute i da pripada $h-$pravoj a.

Pretpostavimo da je $h-$prava a u euklidskom smislu segment nekog kruga k_a. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu, neka je $s_{AA'}$ medijatrisa duži AA' i neka je t tangenta u tački A na krug k_a. Ako se prave $s_{AA'}$ i t seku u nekoj tački O_a, onda je tražena $h-$prava određena krugom čije je središte tačka O_a i koji sadrži tačku A. Ako se prave $s_{AA'}$ i t ne seku, onda je tražena $h-$prava određena pravom koja sadrži tačku A i središte kruga k_a.

Pretpostavimo da je $h-$prava a u euklidskom smislu duž koja pripada nekoj pravoj p_a. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu. Tražena $h-$prava n je lûk kruga čije je središte središte duži AA' i koji sadrži tačku A.



Slika 115



Slika 116

116. *Pomoćna konstrukcija 1 — konstrukcija u Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni $h-$medijatrise $h-$duži XO gde je O središte apsolute:*

Konstruišimo (euklidsku) pravu koja sadrži tačku X i normalna je na pravoj OX. Presečnu tačku te prave i apsolute označimo sa X'. Konstruišimo tangentu t na apsolutu u tački X'. Jednu presečnu tačku prave t i prave OX označimo sa O_x. Tražena $h-$medijatrisa je presek unutrašnjosti apsolute i (euklidskog) kruga sa središtem O_x koji sadrži tačku X' (taj krug je normalan na apsoluti).

Dokaz pomoćne konstrukcije 1:

Neka je ψ (euklidska) inverzija u odnosu na krug sa središtem O_x koji sadrži tačku X' i neka je r njegov poluprečnik.

Važi $\mathcal{B}(O_x, X, O)$, pa su uglovi $\angle X'O_xX$ i $\angle X'O_xO$ podudarni. Pored toga, uglovi $\angle O_xX'O$ i $\angle O_xXX'$ su pravi, pa su trouglovi $\triangle O_xXX'$ i $\triangle O_xOX'$ slični odakle sledi $O_xO : O_xX' = O_xX' : O_xX$ i $O_xO \cdot O_xX = OX'^2 = r^2$. Iz $\mathcal{B}(O_x, X, O)$ i $O_xO \cdot O_xX = r^2$, na osnovu definicije inverzije, sledi $X = \psi(O)$ i $O = \psi(X)$. U Poenkareovom disk modelu, osnoj refleksiji u odnosu na $h-$pravu koja je u euklidskom smislu lûk, odgovara euklidska inverzija u odnosu na krug koji sadrži taj lûk. Dakle, euklidska inverzija ψ odgovara osnoj refleksiji modela koja preslikava tačku O u tačku X i obratno, pa krug sa središtem O_x koji sadrži tačku X' zaista sadrži traženu $h-$medijatrisu, što je i trebalo dokazati. $\Box$

Pomoćna konstrukcija 2 — konstrukcija slike tačke P u inverziji ψ_k:

Videti opis pomoćne konstrukcije **4** u rešenju **52**. $\Box$

Pomoćna konstrukcija 3 — konstrukcija slike kruga l u inverziji ψ_k:

Videti opis pomoćne konstrukcije **3** u rešenju **52**. $\Box$

Pomoćna konstrukcija 4 — konstrukcija u Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni $h-$kruga l sa središtem X koji sadrži tačku Y:

Neka je tačka O središte apsolute.

Ako su tačke X i O identične, onda je traženi $h-$krug l euklidski krug sa središtem X koji sadrži tačku Y.

Ako tačke X i O nisu identične, onda na osnovu pomoćne konstrukcije **1**, konstruišimo $h-$medijatrisu m $h-$duži XO. $h-$pravoj m odgovara euklidski krug k_m. Na osnovu pomoćne konstrukcije **2**, konstruišimo sliku Y' tačke Y u euklidskoj inverziji u odnosu na krug k_m. U toj inverziji, tačka X preslikava se u tačku O, pa je slika traženog kruga l (euklidski) krug l' sa središtem O koji sadrži tačku Y'. Važi i obratno, pa traženi krug l konstruišemo, na osnovu pomoćne konstrukcije **3**, kao sliku kruga l' u (euklidskoj) inverziji u odnosu na krug k_m.

Dokaz pomoćne konstrukcije 4:

$h-$krug je i u euklidskom smislu krug. Ako je središte u smislu modela $h-$kruga tačka O', onda je njegovo središte u euklidskom smislu ista ta tačka ako i samo ako je ona središte apsolute. Dakle, ako su tačke X i O identične, onda je traženi $h-$krug l zaista euklidski krug sa središtem X koji sadrži tačku Y.

Ako tačke X i O nisu identične, tačka Y je slika tačke Y' u inverziji ψ u odnosu na krug k_m (jer je Y' slika tačke Y u toj inverziji). Tačka Y' pripada krugu l', pa kako je l slika kruga l' u inverziji ψ, sledi da tačka Y pripada krugu l. Središte $h-$ kruga l' je tačka O i važi $\psi(O) = X$, $\psi(l') = l$, pa je tačka X zaista središte kruga l u smislu modela. Dakle, središte $h-$kruga l je tačka X i on sadrži tačku Y, što je i trebalo dokazati. $\square$

Tražena $h-$ tačka C je presečna tačka $h-$kruga sa središtem A koji sadrži tačku B i $h-$kruga sa središtem B koji sadrži tačku A. Na osnovu pomoćne konstrukcije **4**, konstruišimo ove krugove. Njihove presečne tačke zadovoljavaju uslove zadatka.

Ispitni rokovi

Jun 1994.

1. (**3**) Neka je K središte težišne duži CC_1 trougla ABC i neka je M presečna tačka pravih AK i BC. Dokazati da važi $CM : MB = 1 : 2$.

2. (**35**) Dat je pravilan trougao ABC. Neka je tačka O središte opisanog kruga trougla ABC i neka je P tačka duži OC. Konstruisati pravilan trougao XYZ upisan u trougao ABC takav da tačke X, Y i Z pripadaju redom ivicama BC, CA i AB i da ivica XY sadrži tačku P.

3. (**77**) Dokazati da je kompozicija sastavljena od četiri ravanske refleksije euklidskog prostora kojima su osnove određene bočnim pljosnima četvorostrane piramide osna rotacija tog prostora i odrediti osu te osne rotacije.

4. (**108**) Neka su u hiperboličkoj ravni date prave a, b i n. Da li postoji prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n ?

Septembar 1994.

1. (**28**) U eukldiskoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$. Neka su B' i C' tačke pravih AB i AC takve da je $\mathcal{B}(A,B,B')$ i $\mathcal{B}(A,C,C')$. Ako je P_a tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje ivicu BC tog trougla, dokazati da važi

$$\mathcal{R}_{C,\angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\angle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a} \ .$$

2. (**49**) Konstruisati trougao ABC takav da je datoj duži l_a podudarna duž AE, gde je E presečna tačka ivice BC i bisektrise unutrašnjeg ugla trougla kod temena A i da su rastojanja temena B i C od te bisektrise jednaka redom merama datih duži m i n.

3. (**71**) Ako ravan π seče tetraedrsku površ $ABCD$, onda je taj presek paralelogram ako i samo ako je ravan π paralelna sa dvema naspramnim ivicama tetraedra. Dokazati.

4. (**94**) Dokazati da u hiperboličkoj ravni za tri nekolinearne tačke A, B i C važi

$$\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) \ .$$

Oktobar 1994.

1. (**7**) U euklidskoj ravni dat je pravougaonik ABCD takav da je $AB = 3BC$. Ako su E i F tačke ivice AB takve da je $AE \cong EF \cong FB$ dokazati da važi $\angle AED + \angle AFD + \angle ABD = \frac{\pi}{2}$.

2. (**33**) Konstruisati trougao ABC takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c središta spolja upisanih krugova.

3. (**60**) Dokazati da je u svakoj poliedarskoj površi broj pljosni sa neparnim brojem ivica paran.

4. (**95**) Ako su u hiperboličkoj ravni tačke A, B i C tri razne neke prave l i O tačka izvan te prave, dokazati da središta duži OA, OB i OC ne pripadaju jednoj pravoj.

Novembar 1994. (apsolventski rok)

1. (**8**) Ako je visina jednakokrakog trapeza jednaka h, a površina h^2, dokazati da su njegove dijagonale međusobno normalne.

2. (**54**) U ravni su dati prava s i dva kruga k_1 i k_2. Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da mu temena A i C pripadaju pravoj s, a temena B i D krugovima k_1 i k_2.

3. (**79**) U euklidskom prostoru E^3 dat je paralelogram $ABCD$. Odrediti tip izometrijske transformacije

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \ ,$$

gde su $\mathcal{S}_{AB}, \mathcal{S}_{BC}, \mathcal{S}_{CD}, \mathcal{S}_{DA}$ osne refleksije prostora E^3 ?

4. (**90**) U hiperboličkoj ravni dat je pravougli trougao $\triangle ABC$ ($AB \perp BC$). Ako su C_1 i B_1 središta ivica AB i AC, dokazati da prava B_1C_1 nije upravna na pravoj AB.

Januar 1995.

1. (**18**) Dokazati da se u jednoj tački seku prave od kojih svaka sadrži po jedno teme trougla i razlaže obim tog trougla na dva jednaka dela.

2. (**55**) U ravni je dato pet tačaka P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5. Konstruisati u toj ravni petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ takav da su tačke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 središta ivica A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 respektivno.

3. (**65**) Tri sfere imaju zajedničku tačku P, pri čemu nijedna prava koja sadrži tačku P nije zajednička tangenta za sve tri sfere. Dokazati da te sfere imaju bar još jednu zajedničku tačku.

4. (**115**) U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni date su $h-$prava a i $h-$tačka A. Odrediti $h-$pravu n koja je u smislu modela normalna na $h-$pravoj a.

April 1995. (apsolventski rok)

1. (**17**) Neka je u trouglu $\triangle ABC$ tačka A_1 središte ivice BC, a tačka E presek bisektrise unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ i prave BC. Opisani krug k trougla

$\triangle AEA_1$ seče ivice AB i AC u tačkama F i G. Dokazati da važi $BF \cong CG$.

2. (**56**) Neka su M i N dve različite tačke koje pripadaju oštrom uglu $\angle pOq$. Konstruisati na polupravoj p tačku X takvu da važi $XY \cong XZ$, gde su Y i Z presečne tačke prave q sa pravama XM i XN redom.

3. (**80**) Neka je $ABCD$ tetraedar u euklidskom prostoru i neka su tačke P, Q, R, S središta njegovih ivica AB, AC, DB, DC. Odrediti tip izometrije $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{RS} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{PQ}$ ($\mathcal{S}_{RS}$, $\mathcal{S}_{BC}$ i $\mathcal{S}_{PQ}$ su osne refleksije prostora).

4. (**99**) Neka je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni kome je ugao $\angle BCA$ prav. Ako je $\angle BAC = \Pi(x)$ i $\angle ABC = \Pi(y)$, dokazati da važi

$$\Pi(x - AC) + \Pi(BC + y) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Jun 1995.

1. (**2**) U trouglu $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod temena A, tačka D je podnožje visine iz temena A, tačka E je središte duži DC, a tačka F je središte duži AD. Dokazati da važi $BF \perp AE$.

2. (**44**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži BB_1 i CC_1 podudarne redom datim dužima t_b i t_c, a ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α.

3. (**76**) Dokazati da je u prostoru E^3 kompozicija sastavljena od tri ravanske refleksije kojima su osnove α, β, γ određene pljosnima triedra $Oabc$ osnorotaciona refleksija. Odrediti osnovu i osu te osnorotacione refleksije.

4. (**107**) U hiperboličkom prostoru date su četiri nekoplanarne tačke A, B, C i D. Odrediti tip izometrije

$$\mathcal{T}_{2\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}\ .$$

Septembar 1995.

1. (**20**) Dokazati da je prava određena visinom AD trougla $\triangle ABC$ radikalna osa krugova čiji su prečnici težišne duži BB_1 i CC_1 tog trougla.

2. (**36**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu ivica BC, poluprečnik upisanog kruga i poluprečnik opisanog kruga podudarni redom datim dužima a, ρ i r.

3. (**83**) Ako su $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$ ravanske refleksije i $\mathcal{S}_C$ centralna refleksija prostora, dokazati da kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$ ako i samo ako su ravni α i β među sobom paralelne.

4. (**92**) Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno podudarni likovi ako je $CD \cong C'D'$ i $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$.

Oktobar 1995.

1. (**5**) Neka je tačka E između temena A i B kvadrata $ABCD$. Simetrala ugla $\angle CDE$ seče ivicu BC u tački K. Dokazati jednakost $AE + KC = DE$.

2. (**52**) U euklidskoj ravni data je tačka A i različiti krugovi k_1 i k_2 koji je ne sadrže. Konstruisati krug k koji sadrži tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2.

3. (**74**) U euklidskom prostoru data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (paralelne su ivice AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1). Na pljosnima BCC_1B_1 i ADD_1A_1 odrediti redom tačke E i F takve da zbir $AE + EF + FC_1$ bude najmanji mogući.

4. (**105**) Ako je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni, dokazati da je kompozicija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ rotacija $\mathcal{R}_{A,\omega}$, gde je ω defekt tog trougla.

Novembar 1995. (apsolventski rok)

1. (**26**) Dokazati da je skup koji se sastoji iz koincidencije $\mathcal{I}$, svih translacija $\mathcal{T}$ euklidske ravni i svih centralnih simetrija $\mathcal{S}$ te iste ravni, nekomutativna grupa u odnosu na operaciju proizvoda izometrija.

2. (**57**) Dati su u ravni krug $k(O, r)$, dve tačke P i Q i ugao w. Konstruisati tačke X i Y takve da pripadaju krugu k i da važi $PX \| QY$ i $\angle XOY \cong w$.

3. (**82**) U euklidskom prostoru odrediti dve mimoilazne prave x i y takve da prave $\mathcal{S}_x(y)$ i $\mathcal{S}_y(x)$ budu koplanarne.

4. (**97**) Odrediti poluprečnik kruga upisanog u asimptotski trougao hiperboličke ravni kojem su sva tri temena nesvojstvena.

Januar 1996.

1. (**10**) Neka je $ABCD$ konveksan tetivni četvorougao čije su dijagonale međusobno upravne (i seku se u tački E). Dokazati da prava koja sadrži tačku E i upravna je na pravoj CD sadrži središte ivice AB.

2. (**37**) Date su tri nekolinearne tačke A_1, S i E. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je tačka A_1 središte ivice BC, tačka S središte upisanog kruga, a E tačka u kojoj bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ seče ivicu BC.

3. (**75**) Dokazati da je kompozicija tri ravanske refleksije kojima su osnove određene bočnim pljosnima trostrane prizme $ABCA'B'C'$ zadate u euklidskom prostoru klizajuća refleksija tog prostora.

4. (**109**) Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je $(AB) \| (DC)$ i $(BC) \| (AD)$. Dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova kod temena A i C i spoljašnjih uglova kod temena B i D prave istog pramena.

Februar 1996.

1. (**15**) Neka je $\triangle ABC$ trougao takav da je $AB > AC$, neka je A_1 središte ivice BC i neka su tačke P i Q tačke pravih određenih ivicama AB i AC takve da važi $\mathcal{B}(A, P, B)$, $\mathcal{B}(C, A, Q)$ i $AP \cong AQ$. Ako se prave AA_1 i PQ seku u tački R, dokazati da važi

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{AC}{AB}.$$

2. (**34**) Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da date tačke P, Q, R, S budu između njegovih temena A i B, B i C, C i D, D i A, respektivno.

3. (**87**) Ako je s data prava normalna na datoj ravni π i ako je ω dati ugao, odrediti skup tačaka σ euklidskog prostora takav da mu tačka S pripada ako i samo ako je S središte neke duži AA' takve da je $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}(A) = A'$.

4. (**113**) Neka su b, c i d prave jednog pramena apsolutne ravni i A tačka te ravni koja im ne pripada. Ako su B, C i D podnožja upravnih iz tačke A na pravama b, c i d, a B', C' i D' podnožja upravnih iz tačke A na pravama CD, DB i BC, dokazati da su tačke B', C' i D' kolinearne.

April 1996. (apsolventski rok)

1. (**6**) Bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena B trougla $\triangle ABC$ seče prave B_1C_1 i B_1A_1 (tačke A_1, B_1 i C_1 su središta ivica BC, AC i AB) u tačkama A_2 i C_2. Dokazati da su prave AA_2 i CC_2 upravne na bisektrisi unutrašnjeg ugla kod temena B i da važi $B_1A_2 \cong B_1C_2$.

2. (**45**) Data su u ravni dva kruga k_1 i k_2, koji se seku u dvema tačkama P i Q i duži m i n. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče krugove k_1 i k_2 u tačkama X i Y takvim da je $PX : PY = m : n$.

3. (**81**) Dokazati da je kompozicija parnog broja osnih refleksija euklidskog prostora kojima su ose upravne na nekoj ravni π translacija ili koincidencija.

4. (**94**) Ako je a proizvoljna ivica nekog trougla hiperboličke ravni i σ zbir njegovih unutrašnjih uglova, dokazati da važi

$$\Pi\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{\sigma}{2} \ .$$

Jun 1996.

1. (**21**) Neka je tačka E takva da je prava AE paralelna dijagonali BD paralelograma $ABCD$. Dokazati da su prave AB, AD, AC i AE harmonijski spregnute.

2. (**38**) Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_a i E. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je tačka A_1 središte ivice BC, tačka S_a središte spolja upisanog kruga koji dodiruje ivicu BC i E tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A seče ivicu BC.

3. (**86**) Date su u euklidskom prostoru dve podudarne sfere σ_1 i σ_2 i dve tačke P_1 i P_2. Konstruisati dve međusobno paralelne ravni π_1 i π_2 od kojih prva sadrži tačku P_1 i dodiruje sferu σ_1, a druga sadrži tačku P_2 i dodiruje sferu σ_2.

4. (**106**) U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ i tačke A_1, B_1 i C_1 koje su središta ivica BC, AC i BA. Dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{S}_{B_1} \circ \mathcal{S}_{A_1} \circ \mathcal{S}_{C_1}$$

rotacija oko tačke A za ugao koji je jednak zbiru uglova trougla $\triangle ABC$.

Septembar 1996.

1. (**22**) Neka je O središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Ako su B' i C' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$, dokazati da važi $B'C' \perp AO$.

2. (**31**) Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\angle AED$ i $\angle DEC$ podudarni.

3. (**67**) Za date tačke A i B i date duži m i n, odrediti skup tačaka X euklidskog prostora takvih da je $AX : BX = m : n$ i $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$.

4. (**101**) Ako dva asimptotska trougla hiperboličke ravni kojima su sva temena nesvojstvena imaju jednu ivicu zajedničku, odrediti sve izometrije kojima se jedan preslikava na drugi.

Oktobar 1996.

1. (**25**) Ako neka figura euklidske ravni ima tačno dve ose simetrije, onda je ona centralno simetrična. Dokazati.

2. (**58**) Dati su u ravni krug $k(O, r)$, dve tačke P i Q i dva ugla ω i δ. Konstruisati na krugu k tačke X i Y takve da su orijentisani trouglovi $\triangle OPX$ i $\triangle OQY$ istosmerni i da važi $\angle XOY = \omega$ i $\angle OPX - \angle OQY = \delta$.

3. (**78**) U euklidskom prostoru data je kocka $ABCDA'B'C'D'$ (paralelne su ivice AA', BB', CC' i DD'). Neka je α ravan $A'BC'$, β ravan koja sadrži pravu $A'B$ i normalna je na ravni α i neka je γ simetralna ravan duži $A'C'$. Ako je $\mathcal{I}$ kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta$, odrediti $\mathcal{I}^{96}(A')$.

4. (**116**) U Poenkareovom disk modelu date su $h-$tačke A i B. Odrediti $h-$tačku C takvu da je $h-$trougao $\triangle ABC$ pravilan.

Novembar 1996. (apsolventski rok)

1. (**11**) Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka D na duži BC. Ako su O_1 i O_2 središta opisanih krugova trouglova ABD i ACD, dokazati da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle AO_1O_2$ slični.

2. (**50**) Konstruisati trougao ABC takav da je datoj duži l_a podudarna duž AE, gde je E presečna tačka ivice BC i bisektrise unutrašnjeg ugla trougla kod temena A i da su ivica BC i visina AA' podudarne datim dužima a i h_a.

3. (**77**) Dokazati da je kompozicija sastavljena iz četiri ravanske refleksije euklidskog prostora kojima su osnove određene pljosnima četvorostrane piramide osna rotacija tog prostora i odrediti osu te osne rotacije.

4. (**96**) U hiperboličkoj ravni date su paralelne prave p i q. Odrediti skup tačaka A takvih da je ugao $\angle PAQ$ prav, gde su P i Q podnožja normala iz tačke A redom na pravama p i q.

Januar 1997.

1. (**9**) Neka su tačke P i Q između temena A i B, odnosno B i C kvadrata $ABCD$ takve da važi $BP \cong BQ$. Ako je tačka H podnožje normale iz tačke B na pravoj PC, dokazati da je ugao $\angle DHQ$ prav.

2. (**32**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

3. (**66**) Sfera koja sadrži temena A, B, C tetraedra $ABCD$ seče ivice AD, BD, CD u tačkama A', B', C'. Dokazati da je ravan određena tačkama A', B' i C' paralelna tangentnoj ravni na opisanu sferu tetraedra $ABCD$ u tački D.

4. (**110**) U hiperboličkoj ravni, tačke A i B su dodirne tačke tangenti a i b oricikla o i važi $a \parallel b$. Izračunati dužinu AB.

Februar 1997.

1. (**4**) Dokazati da većoj ivici trougla odgovara manja težišna duž i obratno.

2. (**41**) Konstruisati tačke P i Q redom na ivicama AC i BC trougla ABC takve da važi $AP \cong PQ \cong QB$.

3. (**69**) Sve četiri pljosni tetraedra $ABCD$ su oštrougli trouglovi. Oko svake njegove pljosni opisan je krug. Ako sva četiri kruga imaju podudarne poluprečnike, dokazati da su sve četiri pljosni tetraedra podudarni trouglovi.

4. (**111**) Neka su u hiperboličkoj ravni prave a, b, c i d tangente oricikla o u tačkama A, B, C i D takve da je $a \| b$ i $c \perp d$. Ako je K presečna tačka pravih c i d, dokazati da važi $AB = 2CK$.

April 1997. (apsolventski rok)

1. (**14**) U krug je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lûkova BC, CA i AB (tačke M i A, N i B, P i C nalaze se sa raznih strana pravih BC, AC, AB). Tetiva MN seče ivicu BC u tački K, a tetiva NP seče ivicu AB u tački L. Dokazati da su prave KL i AC paralelne.

2. (**39**) Konstruisati trougao ABC takav da su središta opisanog kruga, upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A tog trougla tri date tačke O, S i S_a.

3. (**62**) Ako su P i Q redom tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava PQ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

3. (**90**) U hiperboličkoj ravni dat je pravougli trougao $\triangle ABC$ ($AB \perp BC$). Ako su C_1 i B_1 središta ivica AB i AC, dokazati da prava B_1C_1 nije upravna na pravoj AB.

Jun 1997. (apsolventski rok)

1. (**23**) U ravni su data dva kruga l_1 i l_2 koja se seku. Krug k_1 dodiruje spolja krugove l_1 i l_2, krug k_2 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_1, krug k_3 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_2, itd. Dokazati da su krugovi k_1, k_2, k_3, $\ldots$ normalni na nekoj pravoj ili na nekom krugu.

2. (**46**) Konstruisati trougao ABC takav da mu je ivica BC podudarna datoj duži a, odnos ivica AC i AB jednak odnosu datih duži m i n i razlika unutrašnjih uglova kod temena B i C jednaka uglu δ.

3. (**85**) Neka su tačke M, N, P, Q, R i S redom središta ivica AB, BC, CA, AD, BD i CD tetraedra $ABCD$. Dokazati:

$$\mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{MS'}},$$

gde je S' tačka simetrična tački S u odnosu na tačku R.

4. (**91**) Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' međusobno podudarni ako je $AD \cong A'D'$ i $BC \cong B'C'$.

Jun 1997.

1. (**12**) U ravni su dati krug k, prava p koja ga dodiruje i tačka M koja pripada pravoj p. Odrediti skup svih tačaka P koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoje tačke Q i R koje pripadaju pravoj p, takve da je M središte duži QR i da je k upisani krug trougla $\triangle PQR$.

2. (**42**) Dat je trougao $\triangle ABC$ i oštar ugao δ. Konstruisati romb $PQRS$ takav da njegova temena P i Q pripadaju ivici AB, teme R ivici BC, teme S ivici CA i da je njegov unutrašnji ugao $\angle SPQ$ podudaran datom uglu δ.

3. (**64**) U prostoru su date tačke A i B i prava l. Odrediti ravan π takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravni π pripada pravoj l.

4. (**98**) Neka je ABC trougao hiperboličke ravni kojem je ugao C prav. Ako je $\angle ABC = \Pi(b')$, $CA = b$, $AB = c$, i ako važi $b' < c$, dokazati jednakost $\angle CAB = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

Septembar 1997.

1. (**27**) Ako je H tačka koja pripada unutrašnjosti paralelograma $ABCD$ takva da je zbir uglova $\angle AHB$ i $\angle CHD$ jednak zbiru dva prava ugla, dokazati da su uglovi $\angle HAB$ i $\angle HCB$ podudarni.

2. (**53**) Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A i B i seče dati krug l pod datim uglom α (tačke A i B ne pripadaju krugu l; $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

3. (**63**) U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ i $\angle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

4. (**104**) U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $AB \cong AC$. Ako su P i Q središta ivica AB i AC, dokazati da je izometrija $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC}$ involucija.

Oktobar 1997.

1. (**13**) Dokazati da su kolinearna podnožja normala iz tačke A na simetralama unutrašnjih i spoljašnjih uglova kod temena B i C trougla $\triangle ABC$.

2. (**47**) Konstruisati tetivni četvorougao takav da su mu ivice podudarne datim dužima.

3. (**72**) Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar i neka je D' podnožje visine koje odgovara temenu D. Ako je E središte duži DD', dokazati da su uglovi $\angle AEB$, $\angle BEC$ i $\angle CEA$ pravi.

4. (**100**) Neka je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni kojem je ugao kod temena C prav. Ako je $\angle BAC = \Pi(a')$, $\angle ABC = \Pi(b')$, $BC = a$, $CA = b$, dokazati da važi $\Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = \pi/2$.

Oktobar 1997. (dodatni rok)

1. (**29**) Neka je $\triangle ABC$ pravougli trougao sa pravim uglom kod temena A, neka je $AKLB$ kvadrat takav da su tačke K i C sa raznih strana prave AB i neka je $ACPQ$ kvadrat takav da su tačke P i B sa raznih strana prave AC. Ako je tačka S središte duži LP, dokazati da je trougao $\triangle BCS$ jednakokraki i pravougli.

2. (**48**) Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačke Q i R koje su između njegovih temena B i C, odnosno A i C. Konstruisati sve tačke P takve da pripadaju pravoj AB i da važi $BQ \cdot CR \cdot AP = QC \cdot RA \cdot PB$.

3. (**73**) Ako se seku u jednoj tački prave koje sadrže temena A, B, C, D tetraedra $ABCD$ i normalne su, redom, na pljosnima $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ tetraedra $A'B'C'D'$, dokazati da se u jednoj tački seku i prave koje sadrže temena A', B', C', D' tetraedra $A'B'C'D'$ i normalne su, redom, na pljosnima BCD, CDA, DAB, ABC tetraedra $ABCD$.

4. (**112**) Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, onda ta ekvidistanta nije prava. Dokazati.

Novembar 1997.

1. (**1**) Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilini i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave AB, tačke A i E su sa raznih strana prave BC, tačke B i F su sa raznih strana prave AC. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

2. (**39**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su date tačke S, S_a i O redom središta upisanog kruga, spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A i središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$.

3. (**61**) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presečna tačka prave određene tačkama M i N i prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravni α.

4. (**89**) Dokazati da je duž određena središtem hipotenuze i temenom pravog ugla pravouglog trougla hiperboličke ravni manja od polovine hipotenuze.

Januar 1998.

1. (**30**) U ravni su date tri razne tačke A, B i C i uglovi α, β i γ manji od opruženog ugla. Odrediti kada je kompozicija

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$$

rotacija, translacija odnosno koincidencija (uglovi α, β i γ su isto orijentisani).

2. (**40**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je zbir stranica AB i AC jednak datoj duži d, a poluprečnici spolja upisanih krugova koji odgovaraju temenima B i C podudarni datim dužima ρ_b i ρ_c.

3. (**84**) Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije i $\mathcal{S}_\gamma$ ravanska refleksija euklidskog prostora, dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A$$

neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako je $AB \perp \gamma$.

4. (**114**) Ako se u apsolutnom prostoru neka sfera i neka episfera seku (a ne dodiruju), onda je njihov presek krug. Dokazati.

Februar 1998.

1. (**19**) Tačka P pripada unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Ako su X, Y i Z redom presečne tačke pravih AP i BC, BP i AC, odnosno CP i AB, dokazati da važi:

$$P_{\triangle BXP} \cdot P_{\triangle CYP} \cdot P_{\triangle AZP} = P_{\triangle CPX} \cdot P_{\triangle APY} \cdot P_{\triangle BPZ}\ .$$

2. (**59**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su date nekolinearne tačke O_a, O_b i O_c središta kvadrata konstruisanih spolja nad njegovim ivicama BC, CA i AB.

3. (**68**) Date su dve paralelne ravni β i γ i tačka A takva da su ta tačka i ravan β sa raznih strana ravni γ. Odrediti skup svih tačaka D za koje prava AD seče ravni β i γ u tačkama B i C takvim da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

4. (**102**) Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je poluprava AB paralelna sa polupravom DC, poluprava AD paralelna sa polupravom BC i $AB \cong AD$. Dokazati da važi $CB \cong CD$.

April 1998.

1. (**16**) U trouglu $\triangle ABC$ važi $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Neka su tačke M i N središta ivica AB i AC i neka je l opisani krug trougla $\triangle AMN$. Dokazati da središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ pripada krugu l.

2. (**51**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su njegova visina koja odgovara temenu A, poluprečnik upisanog kruga i ivica BC podudarne redom datim dužima h_a, ρ i a.

3. (**70**) U prostornom četovorouglu $ABCD$ naspramne stranice su podudarne ($AB \cong CD$, $AD \cong BC$). Dokazati da je prava određena središtima dijagonala četvorougla ujedno i njihova zajednička normala.

4. (**103**) Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je poluprava AB paralelna sa polupravom DC, poluprava AD paralelna sa polupravom BC i $AB \cong AD$. Dokazati da važi $AC \perp BD$.

Jun 1998.

1. (**24**) Krug k_1 pripada unutrašnjosti kruga k_2 i krug l_1 dodiruje krugove k_1 i k_2. Krug l_{i+1} $(i > 1)$ dodiruje krugove l_i, k_1 i k_2. Ako postoji krug l_n takav da dodiruje krug l_1, dokazati da takav krug postoji bez obzira na izbor kruga l_1.

2. (**43**) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je zbir unutrašnjih uglova kod temena A i B jednak datom uglu ϕ, zbir unutrašnjih uglova kod temena A i C jednak datom uglu ψ, a zbir poluprečnika opisanog i upisanog kruga jednak datoj duži d.

3. (**88**) Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja ako su njihove ose dve mimoilazne prave?

4. (**93**) Dokazati da su Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno podudarni ako je $CD \cong C'D'$ i $BC \cong B'C'$.

Septembar 1998.

1. Neka su P i M tačke ivica DC i BC kvadrata $ABCD$ takve da je prava PM tangenta kruga sa središtem A koji sadrži tačku B. Ako su Q i N presečne tačke dijagonale BD sa pravama AP i AM, dokazati da je petougao $PQNMC$ tetivan.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu poluprečnici opisanog kruga, upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A, podudarni redom datim dužima r, ρ i ρ_a.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja čije se ose seku?

4. Odrediti potreban i dovoljan uslov da kompozicija tri centralne simetrije $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$ hiperboličke ravni bude neka centralna simetrija $\mathcal{S}_D$.

Oktobar 1998.

1. Neka je tačka O središte date duži AB. Neka su C i D tačke koje pripadaju krugu čiji je prečnik duž AB, nalaze se sa iste strane prave AB i važi $\angle COD = \pi/2$. Tačka E je presečna tačka pravih AC i BD, a tačka F pravih AD i BC. Dokazati da dužina EF ne zavisi od izbora tačaka C i D.

2. Dati su krugovi k_1 i k_2 koji se ne seku, ne seku pravu p i sa iste su njene strane. Konstruisati krug l koji dodiruje krugove k_1, k_2 i pravu p.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, kompozicija klizajuće refleksije i zavojnog poluobrtanja čija osa pripada osnovi te klizajuće refleksije?

4. Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' međusobno podudarni ako je $AB \cong A'B'$ i $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$.

Novembar 1998.

1. Neka je $\triangle ABC$ trougao sa pravim uglom kod temena A. Neka je P proizvoljna tačka izmedju tačaka B i C i neka je p prava koja sadrži tačku P i normalna je na pravoj BC. Ako prava p seče prave AB i AC u tačkama Q i R, a opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tačkama K i L, dokazati da važi $\mathcal{H}(Q, R; K, L)$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c središta spolja upisanih krugova.

3. Dokazati da se duži odredjene središtima naspramnih stranica tetraedra seku u jednoj tački koja ih polovi.

4. Neka su a, b i c medjusobno paralelne prave, ali ne sve u istom smeru. Ako su b' i c' normale iz tačke A prave a na b i c, odrediti ugao koji one zahvataju.

Decembar 1998.

1. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ visine BD i CE se seku u tački H. Tačke M, N, P i Q su središta duži BH, CH, AC i AB. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α, poluprečnik opisanog kruga podudaran datoj duži r i zbir visina koje odgovaraju temenima B i C jednak datoj duži d.

3. Dokazati da se iz središta F visine AE pravilnog tetraedra $ABCD$ svaka ivica pljosni BCD vidi pod pravim uglom.

4. Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, dokazati da ta ekvidistanta nije prava.

Januar 1999.

1. Neka su H i O ortocentar i središte opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ i neka važi $AH \cong AO$. Dokazati da važi: $\angle BAC = 2R/3$.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su težišne duži koje odgovaraju temenima A i B podudarne datim dužima t_a i t_b, a visina koja odgovara temenu A podudarna datoj duži h_a.

3. Presek neke ravni π sa tetraedarskom površi $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako je ravan π paralelna sa dvema naspramnim ivicama tetraedra. Dokazati.

4. Ako su oba para naspramnih ivica konveksnog četvorougla medjusobno podudarne duži, dokazati da su one i hiperparalelne.

Mart 1999.

1. Ako je S središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$, S_a središte spolja upisanog kruga koje odgovara temu A, A', P i P_a podnožja normala iz tačaka A, S i S_a na pravoj BC i K središte duži AA', dokazati: (a) tačke A, P' i P_a su kolinearne; (b) tačke K, P i S_a su kolinearne.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je zbir ivica AB i AC jednak datoj duži d, težišna duž koja odgovara temenu A podudarna datoj duži t_a a visina koja odgovara temenu B datoj duži h_b.

3. Neka su a, b i c prave odredjene ivicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$. Šte je (u ravni tog trougla) kompozicija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$?

4. Neka je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni kome je ugao $\angle BCA$ prav. Ako je $\angle BAC = \Pi(x)$ i $\angle ABC = \Pi(y)$, dokazati da važi

$$\Pi(x - AC) + \Pi(BC + y) = \frac{\pi}{2} \ .$$

April 1999.

1. Neka je tačka E između temena A i B kvadrata $ABCD$. Simetrala ugla $\angle CDE$ seče ivicu BC u tački K. Dokazati jednakost $AE + KC = DE$.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da mu je razlika ivica AC i AB jednaka datoj duži x, visina koja odgovara temenu B jednaka datoj duži h_b, a poluprečnik upisanog kruga jednak datoj duži ρ.

3. Neka su OP, OQ i OR tri medjusobno normalne duži euklidskog prostora. Dokazati da je kompozicija triju zavojnih poluobrtanja

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$$

translacija.

4. Dokazati da je duž određena središtem hipotenuze i temenom pravog ugla pravouglog trougla hiperboličke ravni manja od polovine hipotenuze.

Maj 1999.

1. Ako je $ABCD$ konveksan i tetivan četvorougao, dokazati da je proizvod dužina njegovih dijagonala jednak zbiru proizvoda dužina njegovih naspramnih stranica.

2. Konstruisati trougao ABC takav da mu je ivica BC podudarna datoj duži a, odnos ivica AC i AB jednak odnosu datih duži m i n i razlika unutrašnjih uglova kod temena B i C jednaka uglu δ.

3. Dokazati da je kompozicija neparnog broja centralnih simetrija prostora ponovo centralna simetrija prostora.

4. Dokazati da u hiperboličkoj ravni za tri nekolinearne tačke A, B i C važi

$$\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) \ .$$

Jun 1999.

1. Neka su A, B, C različite tačke jedne prave, a A', B', C' različite tačke koje ne pripadaju toj pravoj takve da važi $AB' \| BA'$ i $AC' \| CA'$. Dokazati da su tačke A', B' i C' kolinearne ako i samo ako važi $BC' \| CB'$.

2. Konstruisati tetivni četvorougao kojem su ivice podudarne datim dužima.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja ako su njihove ose dve mimoilazne medjusobno normalne prave?

4. U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $AB \cong AC$. Ako su P i Q središta ivica AB i AC, dokazati da je izometrija $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC}$ involucija.

Septembar 1999.

1. Neka su P i M tačke ivica DC i BC kvadrata $ABCD$ takve da je prava PM tangenta kruga sa središtem A koji sadrži tačku B. Ako su Q i N presečne tačke dijagonale BD sa pravama AP i AM, dokazati da je petougao $PQNMC$ tetivan.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu poluprečnici opisanog kruga, upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A, podudarni redom datim dužima r, ρ i ρ_a.

3. Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije i $\mathcal{S}_\gamma$ ravanska refleksija euklidskog prostora, dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A$$

neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako je $AB \perp \gamma$.

4. Ako su oba para naspramnih ivica konveksnog četvorougla medjusobno podudarne duži, dokazati da su one i hiperparalelne.

Oktobar 1999.

1. Neka je L presečna tačka stranice AB i bisektrise ugla kod temena C i neka je B_1 središte stranice AC trougla $\triangle ABC$. Neka je P presečna tačka pravih BB_1 i CL. Dokazati da važi

$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1 \, .$$

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu stranice BC i AC podudarne redom datim dužima a i b i da važi $\angle BAC = 3 \cdot \angle ABC$.

3. Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar i neka je E podnožje visine koje odgovara temenu A. Ako je M središte duži AE, dokazati da se ivice pljosni BCD vide pod pravim uglom.

4. Ako je $\triangle ABC$ trougao hiperboličke ravni, dokazati da je kompozicija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ rotacija $\mathcal{R}_{A,\omega}$, gde je ω defekt tog trougla.

Oktobar II 1999.

1. Ako je $ABCD$ pravougaonik i ako su tačke P i Q prave AC takve da je $\mathcal{H}(A, C; P, Q)$, a R i S tačke prave BD takve da je $\mathcal{H}(B, D; R, S)$, dokazati da tačke P, Q, R i S pripadaju jednom krugu.

2. Dat je krug l i u njegovoj ravni tačka H. U krug l upisati trougao $\triangle ABC$ kojem je ortocentar tačka H, a stranica BC jednaka datoj duži a.

3. Dokazati da je kompozicija sastavljena od tri ravanske refleksije kojima su osnove α, β i γ odredjene poljosnima nekog triedra $Oabc$ u prostoru E^3, osnorotaciona refleksija. Odrediti osnovu i osu te osnorotacione refleksije.

4. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni konstruisati $h-$duž mere $\Pi^{-1}(R/2)$.

Oktobar III 1999.

1. Ugao kod temena A u oštrouglom trouglu ABC jednak je $\pi/3$. Tačke B' i C' su podnožja visina iz temena B i C. Dokazati da središte opisanog kruga trougla ABC pripada simetrali jednog od uglova koje zahvataju prave BB' i CC'.

2. Date su prave p, q i r od kojih se svake dve seku, ali ne sve u istoj tački. Konstruisati pravu s koja je normalna na pravoj p i seče prave p, q i r redom u tačkama P, Q i R takvim da važi $PQ \cong QR$.

3. Dokazati da težište tetraedra pripada duži odredjenoj temenom i težištem naspramne strane tetraedra i da deli tu duž u odnosu 3:1. (*Težište* tetraedra je presečna tačka duži odredjenih središtima naspramnih stranica tetraedra.)

4. Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi hiperboličke ravni $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima kod temena D i D' međusobno podudarni ako je $AD \cong A'D'$ i $BC \cong B'C'$.

Novembar I 1999.

1. Neka su B i C dodirne tačke tangenti AB i AC iz neke tačke A na krug k, a S proizvoljna tačka kruga k. Ako su P, Q i R podnožja normala iz tačke S na pravama BC, CA i AB, dokazati da je $SP = \sqrt{SQ \cdot SR}$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu poluprečnik opisanog kruga, razlika stranica AC i AB i težišna duž koja odgovara temenu A podudarni redom trima datim dužima ρ, $b-c$ i t_a.

3. Neka je $ABCD$ tetraedar sa sva tri prava ivična ugla kod temena A i neka su P i Q središta ivica AD i BC. Dokazati da je duž PQ prečnik sfere koja sadrži središta ostalih ivica tetraedra i teme A.

4. Neka je u trouglu ABC hiperboličke ravni $BC = a$, $AC = b$ i σ zbir unutrašnjih uglova. Dokazati da važi:

$$\Pi\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{\sigma}{2} \,.$$

Novembar II 1999. (apsolventski rok)

1. Ako je $ABCD$ konveksan i tetivan četvorougao, dokazati da je proizvod dužina njegovih dijagonala jednak zbiru proizvoda dužina njegovih naspramnih stranica.

2. Konstruisati trougao ABC takav da mu je ivica BC podudarna datoj duži a, odnos ivica AC i AB jednak odnosu datih duži m i n i razlika unutrašnjih uglova kod temena B i C jednaka uglu δ.

3. Dokazati da je kompozicija neparnog broja centralnih simetrija prostora ponovo centralna simetrija prostora.

4. Dokazati da u hiperboličkoj ravni za tri nekolinearne tačke A, B i C važi

$$\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) \ .$$

Decembar 1999. (apsolventski rok)

1. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ visine BD i CE se seku u tački H. Tačke M, N, P i Q su središta duži BH, CH, AC i AB. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α, poluprečnik opisanog kruga podudaran datoj duži r i zbir visina koje odgovaraju temenima B i C jednak datoj duži d.

3. Dokazati da se iz središta F visine AE pravilnog tetraedra $ABCD$ svaka ivica pljosni BCD vidi pod pravim uglom.

4. Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, dokazati da ta ekvidistanta nije prava.

Januar 2000.

1. Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza $ABCD$ sa osnovicom AB seku se u tački O pod uglom $\pi/3$. Dokazati da su središta duži OA, OD i BC temena pravilnog trougla.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu date tačke O, A' i E redom središte opisanog kruga, podnožje visine iz temena A i presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A i prave BC.

3. Odrediti tangentnu ravan π sfere σ takvu da sadrži datu pravu p (prava p i sfera σ nemaju zajedničkih tačaka).

4. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni date su h-tačke X i Y. Odrediti h-krug sa središtem X koji sadrži tačku Y.

Mart 2000.

1. Neka je unutrašnji ugao kod temena A trougla ABC jednak $\pi/3$. Dokazati da težište tog trougla pripada simetrali jednog od uglova koji zahvataju visine iz temena B i C.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu poluprečnik opisanog kruga, razlika stranica AC i AB i težišna duž koja odgovara temenu A podudarni redom trima datim dužima ρ, $b-c$ i t_a.

3. Dokazati da je kompozicija $\mathcal{S}_X \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_Y$ neka ravanska refleksija $\mathcal{S}_\sigma$ ako i samo ako je prava XY normalna na π.

4. Ako su oba para naspramnih ivica konveksnog četvorougla medjusobno podudarne duži, dokazati da su one i hiperparalelne.

April 2000.

1. Dat je konveksni četvorougao $ABCD$ takav da je $\angle ABD = 50°$, $\angle ADB = 80°$, $\angle ACB = 40°$ i $\angle DBC = \angle BDC + 30°$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu visina koja odgovara temenu A, težišna duž koja odgovara temenu A i zbir poluprečnika upisanog i poluprečnika spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A jednake redom h_a, t_a i x.

3. Neka je $Sabc$ triedar čije su dve strane jednake $\pi/4$, a jedna jednaka $\pi/3$. Izračunati ugao diedra triedra naspram strane koja je jednaka $\pi/3$.

4. Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ medjusobno podudarna ako i samo ako je

(a) $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$

(b) $CD \cong C'D'$ i $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$

Maj 2000.

1. Neka su P i M tačke ivica DC i BC kvadrata $ABCD$ takve da je prava PM tangenta kruga sa središtem A koji sadrži tačku B. Ako su Q i N presečne tačke dijagonale BD sa pravama AP i AM, dokazati da je petougao $PQNMC$ tetivan.

2. Dati su krugovi k_1 i k_2 koji se ne seku i tačka A koja im ne pripada. Konstruisati krug k koji sadrži tačku A i spolja dodiruje krugove k_1 i k_2.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja čije se ose seku?

4. Odrediti potreban i dovoljan uslov da kompozicija tri centralne simetrije $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$ hiperboličke ravni bude neka centralna simetrija $\mathcal{S}_D$.

Jun 2000.

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ takav da važi $\angle CAB = 50°$ i $\angle ABC = 60°$. Neka su D i E tačke na stranicama AB i BC redom takve da je $\angle DCA = \angle EAC = 30°$. Odrediti $\angle CDE$.

2. Date su tačka A, prava p i krug k. Konstruisati krug l koji sadrži tačku A, dodiruje pravu p i normalan je na krug k.

3. Data je prava a, ravan α i ugao ϕ pri čemu važi $a \perp \alpha$. Odrediti skup središta duži XX', gde je X proizvoljna tačka prostora, a X' njena slika u rotacionoj refleksiji odredjenoj sa ravni α, pravom a i uglom ϕ.

4. Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (sa oštrim uglovima kod temena D i D') podudarni ako važi $AD \cong A'D'$ i $CD \cong C'D'$.

Septembar 2000.

1. U jednakokrakom trouglu ABC sa osnovicom AB važi $\angle BCA = 80°$. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla ABC takva da je $\angle MBA = 30°$ i $\angle MAB = 10°$. Izračunati ugao $\angle AMC$.

2. Date su tačka A, prava p i krug k. Konstruisati krug l koji sadrži tačku A, dodiruje pravu p i normalan je na krug k.

3. Sve četiri pljosni tetraedra $ABCD$ su oštrougli trouglovi. Oko svake njegove pljosni opisan je krug. Ako sva četiri kruga imaju podudarne poluprečnike, dokazati da su sve četiri pljosni tetraedra podudarni trouglovi.

4. Preslikavanje $\mathcal{I}$ je izometrija hiperboličke ravni takva da je rastojanje XX' (gde je $X' = \mathcal{I}(X)$) jednako za sve tačke X. Dokazati da je $\mathcal{I}$ koincidencija.

Oktobar 2000.

1. Neka su A, B, C različite tačke jedne prave, a A', B', C' različite tačke koje ne pripadaju toj pravoj takve da važi $AB' \| BA'$ i $AC' \| CA'$. Dokazati da su tačke A', B' i C' kolinearne ako i samo ako važi $BC' \| CB'$.

2. Konstruisati tetivni četvorougao kojem su ivice podudarne datim dužima.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja ako su njihove ose dve mimoilazne medjusobno normalne prave?

4. U hiperboličkoj ravni dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $AB \cong AC$. Ako su P i Q središta ivica AB i AC, dokazati da je izometrija $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{BC}$ involucija.

Oktobar II 2000.

1. Dokazati da u oštrouglom trouglu ABC važi $AH + BH + CH = 2(r + \rho)$ (H je ortocentar trougla).

2. Konstruisati trougao ABC takav da je razlika njegovih ivica AC i AB jednaka datoj duži d, visina koja odgovara temenu B jednaka datoj duži h_b, a poluprečnik upisanog kruga jednak datoj duži ρ.

3. Date su dve paralelne ravni α i β i tačka C izmedju njih. Odrediti skup svih tačaka D za koje prava CD seče ravni α i β u tačaka A i B takvim da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

4. Preslikavanje $\mathcal{I}$ je izometrija hiperboličke ravni takva da je rastojanje XX' (gde je $X' = \mathcal{I}(X)$) jednako za sve tačke X. Dokazati da je $\mathcal{I}$ koincidencija.

Novembar 2000.

1. Dijagonale AC i BD trapeza $ABCD$ ($AB \| CD$) su medjusobno normalne. Ako su tačke M i N središta krakova AD i BC, dokazata da važi $P \leq m^2$, gde je m dužina duži MN, a P površina trapeza $ABCD$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu razlika ivica AB i BC, visina koja odgovara temenu C i težišna duž koja odgovara temenu B jednake datim dužima d, h_c i t_b.

3. Normalne projekcije nekog tela na dve različite ravni su zatvorene kružne površi. Dokazati da su njihovi poluprečnici podudarni.

4. Neka je $ABCD$ Lambertov četvorougao ($AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$) sa oštrim uglom kod temena D takav da je $b' < c$, gde je $b' = \Pi^{-1}(R - \Pi(b))$. Dokazati da važi $Pi(c - b') - \Pi(d) = \angle D$.

Decembar 2000.

1. Tačke X, Y i Z su tačke u kojima tangente opisanog kruga trougla ABC u njegovim temenima seku naspramne stranice trougla. Dokazati da su tačke X, Y i Z kolinearne.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu težišna duž koja odgovara temenu A, visina koja odgovara temenu A i zbir poluprečnika upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A jednaki redom dužima t_a, h_a i d.

3. Date su dve paralelne ravni α i β i tačka C izmedju njih. Odrediti skup svih tačaka D za koje prava CD seče ravni α i β u tačaka A i B takvim da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

4. Neka je $ABCD$ Lambertov četvorougao ($AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$) sa oštrim uglom kod temena D takav da je $b' < c$, gde je $b' = \Pi^{-1}(R - \Pi(b))$. Dokazati da važi $Pi(c - b') - \Pi(d) = \angle D$.

Januar 2001.

1. Neka je u euklidskoj ravni zadat krug l opisan oko trougla $\triangle ABC$. Ako su P i Q tačke u kojima medijatrisa duži BC seče redom prave AB i AC, dokazati da je $\psi_l(P) = Q$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu stranica AB, poluprečnih spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A i poluprečnih spolja upisanog kruga koji odgovara temenu B jednaki redom datim dužima c, ρ_a, ρ_b ($\rho_a > \rho_b$).

3. Odrediti skup središta svih duži kojima temena pripadaju dvema mimoilaznim pravama p i q euklidskog prostora.

4. Tačke A, B i C su nekolinearne tačke hiperboličke ravni. Šta je kompozicija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}$?

Mart 2001.

1. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ visine BD i CE se seku u tački H. Tačke M, N, P i Q su središta duži BH, CH, AC i AB. Dokazati da je četvorougao $MNPQ$ pravougaonik.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α, poluprečnik opisanog kruga podudaran datoj duži r i zbir visina koje odgovaraju temenima B i C jednak datoj duži d.

3. Dokazati da se iz središta F visine AE pravilnog tetraedra $ABCD$ svaka ivica pljosni BCD vidi pod pravim uglom.

4. Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, dokazati da ta ekvidistanta nije prava.

April 2001.

1. Tačka D je proizvoljna tačka ivice BC trougla ABC. Tačke O i S su središta opisanih krugova trouglova ABD i ACD. Dokazati da važi $ABC \sim AOS$.

2. Konstruisati trougao ABC takav da je njegova stranica BC podudarna datoj duži a, odnos stranica AC i AB jednak odnosu datih duži m i n i duž AE jednaka datoj duži l_a (gde je E presečna tačka prave BC i bisektrise unutrašnjeg ugla trougla kod temena A).

3. U prostoru su date ravni α, β, γ i tačka A koja im ne pripada. Odrediti tačke B, C i D takve da je tetraedar $ABCD$ tetraedar kojem su ravni α, β i γ simetralne ravni diedara CD, DB i BC.

4. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni konstruisati $h-$duž mere $\Pi^{-1}(R/2)$.

Maj 2001.

1. Neka su P, Q, R proizvoljne tačke ivica BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$ euklidske ravni. Dokazati da se krugovi opisani oko trouglova $\triangle AQR$, $\triangle BPR$, $\triangle CPQ$ seku u jednoj tački.

2. Konstruisati trougao ABC takav da su mu visina koja odgovara temenu A, težišna duž koja odgovara temenu A i zbir poluprečnika upisanog i poluprečnika spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A jednake redom h_a, t_a i x.

3. Dokazati da je zbir dve strane triedra veći od treće.

4. Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarna ako je $BC \cong B'C'$ i $CD \cong C'D'$.

Jun 2001.

1. Neka je poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle ABC$ jednak r i neka je O središte tog kruga. Prava m koja sadrži tačku O i koja je normalna na pravoj BC seče prave AC i AB redom u tačkama M i N. Dokazati da važi $OM \cdot ON = r^2$.

2. Date su tri nekolinearne tačke X, Y i Z. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ kojem su tačke X, Y i Z (redom) središta spolja konstruisanih kvadrata nad stranicama BC, CA i AB.

3. Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka euklidskog prostora. Šta je kompozicija dva zavojna poluobrtanja $I = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{AA_1}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{C_1D_1}}$?

4. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni konstruisati duž a takvu da je $\Pi(a) = R/2$.

Septembar 2001.

1. Ako je $ABCD$ pravougaonik i ako su tačke P i Q prave AC takve da je $\mathcal{H}(A, C; P, Q)$, a R i S tačke prave BD takve da je $\mathcal{H}(B, D; R, S)$, dokazati da tačke P, Q, R i S pripadaju jednom krugu.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu poluprečnici opisanog kruga, upisanog kruga i spolja upisanog kruga koji odgovara temenu A, podudarni redom datim dužima r, ρ i ρ_a.

3. Šta je, u euklidskom prostoru, proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja čije se ose seku?

4. Odrediti potreban i dovoljan uslov da kompozicija tri centralne simetrije $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$ hiperboličke ravni bude neka centralna simetrija $\mathcal{S}_D$.

Oktobar 2001.

1. Ako se prave odredjene tetivama AB i CD dvaju krugova k_1 i k_2 (tačke A, B, C, D su različite) seku u tački R, dokazati da važi: tačka R pripada radikalonoj osi krugova k_1 i k_2 ako i samo ako tačke A, B, C i D pripadaju jednom krugu.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da je ugao $\angle BAC$ podudaran datom uglu α, poluprečnik opisanog kruga podudaran datoj duži r i zbir visina koje odgovaraju temenima B i C jednak datoj duži d.

3. Dokazati da se iz središta F visine AE pravilnog tetraedra $ABCD$ svaka ivica pljosni BCD vidi pod pravim uglom.

4. Ako je visina ekvidistante u hiperboličkoj ravni veća od nule, dokazati da ta ekvidistanta nije prava.

Januar 2002.

1. Upisani krug trougla ABC dodiruje stranice AB, BC i CA u tačkama M, N i P. Bisketrisa unutrašnjeg ugla kod temena A seče pravu MN u tački Q. Dokazati da je ugao AQC prav.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu stranice BC i AC podudarne redom datim dužima a i b i da važi $\angle BAC = 3 \cdot \angle ABC$.

3. Neka su OP, OQ i OR tri medjusobno normalne duži euklidskog prostora. Dokazati da je kompozicija triju zavojnih poluobrtanja

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$$

translacija.

4. Ako su oba para naspramnih ivica konveksnog četvorougla medjusobno podudarne duži, dokazati da su one i hiperparalelne.

Februar 2002.

1. Neka je L presečna tačka stranice AB i bisektrise ugla kod temena C i neka je B_1 središte stranice AC trougla $\triangle ABC$. Neka je P presečna tačka pravih BB_1 i CL. Dokazati da važi

$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1\ .$$

2. Konstruisati tačke P i Q redom na ivicama AC i BC trougla ABC takve da važi $AP \cong PQ \cong QB$.

3. Presek neke ravni π sa tetraedarskom površi $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako je ravan π paralelna sa dvema naspramnim ivicama tetraedra. Dokazati.

4. Dokazati da u hiperboličkoj ravni za tri nekolinearne tačke A, B i C važi

$$\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB)\ .$$

April 2002.

1. Neka je S tačka stranice AB paralelograma $ABCD$ takva da je $\angle ASD = \angle DSC$ i K presek prave DS i prave koja sadrži presek dijagonala i paralelna je sa AB, a P presek prave CK i normale na AB iz tačke S. Dokazati da važi $DP \perp SC$.

2. Konstruisati krug k koji dodiruje datu pravu a, dodiruje dati krug l i sadrži datu tačku A (pretpostaviti da tačka A ne pripada pravoj a i ne pripada krugu l).

3. Dokazati da je zbir dve strane triedra veći od treće.

4. Neka je $ABCD$ Lambertov četvorougao sa oštrim uglom kod temena D. Ako je $\Pi(x)+\Pi(BC) = \pi/2$ i $\Pi(l) = \angle ADC$, onda važi $\Pi(AD+l)+\Pi(x-AB) = \pi/2$.

Teoreme

Teoreme iz knjige prof.dr Zorana Lučića "Euklidska i hiperbolička geometrija" (Grafitti i Matematički fakultet, Beograd, 1994; prvo izdanje) koje se koriste u rešenjima:

T1.14 *Ako se svake dve prave iz nekog podskupa klase $\mathcal{L}$ seku, onda su prave iz tog podskupa konkurentne ili koplanarne.*

T11.11 *Spoljašnji ugao trougla je veći od bilo kojeg unutrašnjeg, nesusednog ugla.*

T11.12 *Naspram jednakih ivica nekog trougla su jednaki uglovi i obratno, naspram jednakih uglova su jednake ivice.*

T11.13 *Jedna ivica trougla je veća od druge ako i samo ako je naspram nje veći ugao.*

T11.15 *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su:*
(i) dve ivice i njima zahvaćeni ugao jednog trougla podudarni odgovarajućim ivicama i uglu drugog trougla;
(ii) jedna ivica i na njoj nalegli uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla;
(iii) ivice jednog trougla podudarne odgovarajućim ivicama drugog trougla;
(iv) dve ivice i ugao naspram jedne od njih jednog trougla podudarni odgovarajućim ivicama i uglu drugog trougla, dok su uglovi naspram drugih dveju međusobno podudarnih ivica oba oštra, oba prava ili oba tupa;
(v) jedna ivica, na njoj nalegli ugao i njoj naspramni ugao jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla.

T11.16 *Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trougla kod kojih je $AB \cong A'B'$ i $AC \cong A'C'$, tada je $BC > B'C'$ ako i samo ako je $\angle A > \angle A'$.*

T11.17 *Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla međusobno su podudarni.*

T11.18 *Ako su M i N redom središta osnovice AB i središte protivosnovice*

CD Sakerijevog četvorougla $ABCD$, tada su $AMND$ i $BMNC$ Lambertovi četvorouglovi.

T12.1 *Ako tačka P i prava p pripadaju ravni π, tada u ravni π postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku P i upravna je na pravoj p.*

T12.4 *Ako je prava n upravna na dvema pravama a i b ravni π koje se seku, tada je $n \perp \pi$.*

T12.5 *Sve prave koje sadrže neku tačku zadate prave i na toj pravoj su upravne, pripadaju jednoj ravni koja je takođe upravna na zadatoj pravoj.*

T12.6 *Postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku i upravna je na zadatoj ravni.*

T12.7 *Postoji jedistvena ravan koja sadrži datu tačku i upravna je na zadatoj pravoj.*

T12.9 *Dve prave upravne na istoj ravni su koplanarne.*

T13.9 *Zbir dvaju ivičnih uglova konveksnog triedra je veći od trećeg ivičnog ugla tog triedra.*

T14.1 *Prava n koja pripada ravni ν upravnoj na ravni μ i upravna je u tački S na preseku s tih dveju ravni, biće upravna i na ravni μ.*

T14.2 *Svaka ravan koja sadrži pravu upravnu na zadatoj ravni upravna je na toj ravni.*

T14.4 *Ako data prava nije upravna na datoj ravni, tada postoji jedinstvena ravan koja tu pravu sadrži, a upravna je na zadatoj ravni.*

T14.5 *Ako je presek dveju raznih ravni upravnih na trećoj ravni neprazan, taj presek je prava koja je takođe upravna na trećoj ravni.*

T15.2 *Svaka refleksija je involucija.*

T15.8 *Dve refleksije komutiraju ako i samo ako su im osnove istovetne ili su međuosbno upravne.*

T15.13 *Ako su a i b dve konkurente prave, tada postoje tačno dve osne refleksije sa međusobno upravnih osama, koje te dve prave preslikavaju jednu na drugu, a ako su a i b koplanarne, disjunktne prave, tada postoji jedinstvena osna refleksija koja ih preslikava jednu na drugu.*

T16.7 *Neka su a, b, c tri prave jednog pramena, a a' i c' prave upravne na a i c, redom, u tačkama A i C. Prave a', b, c' pripadaju jednom pramenu ako i samo ako je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ i d prava upravna na AC.*

T16.9 *Ako su a' i c' dve razne prave neke ravni i B tačka te ravni koja im* *ne pripada, tada postoji jedinstvena prava b koja sadrži B, takva da prave a', b i c' pripadaju jednom pramenu.*

T16.12 *Ako su a i b dve razne prave ravni π, tada postoji jedinstven pramen pravih te ravni kojem pripadaju i a i b.*

T17.1 *Tačka Y pripada epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ ako i samo ako je prava XY sečica jednakih nagiba pravih x i y koje redom sadrže tačke X i Y i pripadaju pramenu $\mathcal{X}$.*

T18.10 *Presek proizvoljnog pramena ravni i bilo koje ravni koja tom pramenu ne pripada je pramen pravih.*

T18.13 *Presek dva snopa ravni je pramen ravni.*

T25.2 *U ravni određenoj polupravom a' i tačkom A van prave koja sadrži a', postoji jedinstvena poluprava sa temenom A koja je paralelna polupravoj a'.*

T25.6 *Ako su a', b' i c' tri disjunktne poluprave jedne ravni takve da je $a' \| c'$ i $c' \| b'$, tada je i $a' \| b'$.*

T25.10 *Ako su a', b', c' tri nekoplanarne poluprave apsolutnog prostora takve da je $a' \| c'$ i $c' \| b'$, tada je i $a' \| b'$.*

T25.13 *Ako je prava p van ravni π paralelna bilo kojoj pravoj q te ravni, tada je $p \| \pi$.*

T25.16 *Postoji jedinstvena prava n koja seče dve mimoilazne prave p i q i na njima je upravna.*

T27.3 *Neka se prave p i q seku u tački S i neka su m i n dve prave koje ne sadrže S i seku, redom, prave p i q u tačkama M, M' i N, N'. Ako su m i n dve međusobno paralelne prave, tada je*

$$\frac{SM}{SN} = \frac{SM'}{SN'} = \frac{MM'}{NN'} \quad .$$

Obratno važi ako prave p i q nisu međusobno upravne, a ako su upravne, obratno važi kada je ispunjen uslov da su tačke M i N sa iste strane tačke S ako i samo ako su M' i N' sa iste strane te tačke.

T27.7 *Dva trougla su slična ako i samo ako su:*

(i) dve ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim uglovima drugog trougla, a uglovi zahvaćeni tim ivicama međusobno podudarni;

(ii) uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućim uglovima drugog trougla;

(iii) ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla;

(iv) dve ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih ivica međusobno podudarni, a uglovi naspram drugih dveju odgovarajućih ivica oba oštra, oba prava ili oba tupa.

T28.1 *Periferijski ugao kruga jednak je polovini njegovog centralnog ugla koji zahvata isti luk.*

T28.3 *Neka je P proizvoljna tačka neke ravni koja ne pripada zadatom krugu k te ravni, a p i q prave koje sadrže P, takve da p seče krug k u tačkama A i B, a q u tačkama C i D. Tada je $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Ako je P izvan kruga k, a T dodirna tačka kruga k i tangente koja sadrži P, tada je $PA \cdot PB = PT^2$.*

T28.4 *Skup p svih tačaka zadate ravni kojima su potencije u odnosu na dva kruga $k(O, r)$ i $k'(O', r')$, $O \neq O'$, međusobno jednake, je prava upravna na pravoj OO'.*

T28.7 *Ako sadrži središte inverzije prava se inverzijom preslikava na sebe, a ako ne sadrži središte inverzije, preslikava se na krug kome nedostaje središte inverzije.*

T28.8 *Ako sadrži središte O inverzije, krug (kome nedostaje tačka O) se preslikava na pravu, a ako ne sadrži središte inverzije, krug se preslikava na krug.*

T28.9 *Inverzijom se uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove.*

T31.3 *U hiperboličkoj ravni postoji jedinstvena prava upravna na jednom kraku, a paralelna drugom kraku oštrog ugla.*

T31.8 *Ako je prava c hiperparalelna pravoj b, onda je i prava b hiperparalelna pravoj c.*

T31.9 *Postoji jedinstvena prava upravna na dvema međusobno hiperparalelnim pravama.*

T32.1 *Postoji jedinstvena prava koja pripada dvama raznim paraboličkim pramenovima pravih.*

T33.2 *Trouglovi ABN i $A'B'N'$ sa nesvojstvenim temenima N i N' su međusobno podudarni ako i samo ako su:*
(a) međusobno podudarni uglovi A i A' i ivice AB i $A'B'$,
(b) uglovi A i B podudarni uglovima A' i B'.

T33.3 *Ako su ABN i $A'B'N'$ asimptotski trouglovi sa nesvojstvenim temenima N i N' i pravim uglovima kod temena B i B', tada su uglovi A i A' tih dvaju trouglova mađusobno podudarni ako i samo ako je $AB \cong A'B'$.*

T33.5 *Bilo koja dva trougla kojima su sva temena nesvojstvena su međusobno podudarni likovi.*

Sadržaj