Одабрана поглавља геометрије Б
Примена комплексних бројева у еуклидској геометрији

Тврђења и задаци за усмени испит

1. (а) Доказати да се све кружнице комплексне равни могу описати једначином

$$z\overline{z}+\overline{A}z+A\overline{z}+B=0,\qquad A\in\mathbb{C},\quad B\in\mathbb{R},\quad |A|^2-B>0.$$

(б) Нека се A и B две разне тачке и $k>0$, $k\neq 1$, дати реалан број. Доказати да је скуп тачака M чији је однос растојања од датих тачака A и B једнак k једна кружница и одредити центар и полупречник. Овај круг се назива Аполонијев круг.

(в) Уколико је $k=1$, посматрани скуп је симетрала дужи AB. Одредити њену једначину.

2. (а) Доказати да се једначина сваке праве кроз дату тачку z_0 у комплексној равни може представити на јединствен начин у облику $z-z_0=\eta(\overline{z}-\overline{z_0})$, $\eta\in\mathbb{C}$, $|\eta|=1$. Број η назива се комплексни градијент, тј. комплексни коефицијент правца праве, при чему важи $\eta=\cos\theta+i\sin\theta$, где је θ двоструко већи угао од оријентисаног угла који та права заклапа са позитивним делом реалне осе.

(б) Доказати да је једначина праве кроз тачке z_0, z_1 дата са $z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0})$, при чему је $\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}$ комплексни број јединичног модула и аргумента који је дупло већи од аргумента комплексног броја z_1-z_0. Специјално, праве AB и CD су паралелне акко је $\frac{a-b}{c-d}$ реалан број различит од нуле, а нормалне акко је $\frac{a-b}{c-d}$ чисто имагинаран број различит од нуле.

(в) Доказати да се свака права у комплексној равни може записати у облику

$$Az+\overline{A}\overline{z}+B=0,\qquad A\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\quad B\in\mathbb{R}.$$

(г) Доказати да су подножје нормале z_0' из дате тачке z_0, симетрична тачка z_1 и њено растојање d од праве дате у претходном облику дати формулама

$$z_0'=\frac{Az_0-\overline{A}\overline{z_0}-B}{2A},\qquad z_1=-\frac{\overline{A}\overline{z_0}+B}{A},\qquad d=\frac{|Az_0+\overline{A}\overline{z_0}+B|}{2|A|}.$$

3. (а) Доказати да су четири различите тачке A,B,C,D кoцикличне или колинеарне акко је дворазмера

$$[abcd]=\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}=\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}$$

реалан број различит од нуле.

(б) Доказати да у сваком четвороуглу $ABCD$ важи неједнакост $AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$, при чему једнакост важи ако и само ако су тачке A,B,C,D на правој или кружници и тачке A и C, односно B и D нису суседне. Ова неједнакост је у литератури позната као Птоломејева неједнакост, а случај једнакости се често назива Птоломејева теорема.

4. (а) Доказати да су троуглови ABC и PQR слични и исто оријентисани акко је $\frac{c-a}{b-a}=\frac{r-p}{q-p}=\sigma$, односно $ar+bp+cq=aq+br+cp$, а супротно оријентисани акко је $\frac{c-a}{b-a}=\overline{\frac{r-p}{q-p}}=\sigma$, односно $a\overline{r}+b\overline{p}+c\overline{q}=a\overline{q}+b\overline{r}+c\overline{p}$. Специјално, троуглови су подударни акко је $|\sigma|=1$, $\sigma\neq\pm1$.

(б) Доказати да је троугао ABC једнакостраничан акко је $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, при чему је и позитивно оријентисан акко је $a+b\omega+c\omega^2=0$, а негативно оријентисан акко је $a\omega^2+b\omega+c=0$, где је $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. Нека је ABC произвољан троугао.

(а) Доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки T која има координате $t=\frac{a+b+c}{3}$ и дели сваку од њих у размери 2:1, рачунато од темена троугла.

(б) Доказати да је центар описане кружнице O датог троугла има координате

$$o=\frac{a\overline{a}(c-b)+b\overline{b}(a-c)+c\overline{c}(b-a)}{a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}-\overline{a}b-\overline{b}c-\overline{c}a}.$$

(в) Уколико је кординатни почетак у центру описане кружнице троугла, доказати да ортоцентар H има координате $h=a+b+c$. Специјално, показати да важи $\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TO}$, тј. $h+2o=3t$ и као последицу извести формулу за координате ортоцентра уколико је координатни почетак произвољна тачка. Права одређена тачкама H,T,O назива се Ојлерова права троугла (који није једнакостраничан).

6. (а) Нека тачке A, B, C, D припадају јединичној кружници комплексне равни са центром у координатном почетку. Доказати да се праве одређене тетивама AB и CD секу акко је $ab \neq cd$, као и да пресечна тачка има координате $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

(б) Доказати да координате подножја нормале из произвољне тачке P на праву одређену тетивом AB има координате $\frac{1}{2}(a+b+p-ab\overline{p})$.

(в) Доказати да за произвољан троугао ABC важи да средишта ивица, подножја висина и средишта дужи AH, BH, CH одређених теменима троугла и ортоцентром припадају кружници чији је центар E средиште дужи OH, а полупречник једнак половини полупречника описане кружнице. Овај круг се назива Ојлеров круг или круг девет тачака.

7. Нека уписани круг троугла ABC додирује дужи BC, CA, AB у тачкама P, Q, R. Претпоставимо да је тај круг јединични, са центром у координатном почетку.

(а) Доказати да су координате темена троугла дате са $a = \frac{2qr}{q+r}$, $b = \frac{2pr}{p+r}$, $c = \frac{2pq}{p+q}$.

(б) Доказати да су координате центра описане кружнице и ортоцентра троугла ABC дате са

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(p+r)}, \qquad h = \frac{2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(p+r)}.$$

8. Доказати да су координате центра описане кружнице и ортоцентра троугла OAB комплексне равни (O је координатни почетак) дати са

$$o = \frac{ab(\overline{a}-\overline{b})}{\overline{a}b-a\overline{b}}, \qquad h = \frac{(\overline{a}b+a\overline{b})(a-b)}{a\overline{b}-\overline{a}b}.$$

9. (а) Доказати да је површина оријентисаног троугла ABC дата формулом $\frac{i}{4}(a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}-\overline{a}b-\overline{b}c-\overline{c}a)$.

(б) Доказати да су површине P_1 оријентисаног троугла ABC, односно P_2 четвороугла $ABCD$, уписаних у јединичну кружницу са центром у координатном почетку дате формулама

$$P_1 = \frac{i}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}, \qquad P_2 = \frac{1}{4i}\frac{(a-c)(b-d)(ac-bd)}{abcd}.$$

(в) Доказати да у произвољном троуглу ABC важи формула $4RP = AB \cdot BC \cdot CA$, где је R полупречник описане кружнице, а P површина.

10. (а) Доказати да је производ свих страница и свих дијагонала правилног $n-$тоугла уписаног у кружницу полупречника R једнак $n^{\frac{n}{2}} \cdot R^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

(б) Доказати да важе идентитети

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \qquad \sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{3\pi}{2n} \cdots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Задаци за писмени испит

1. (а) Са исте стране дужи PQ конструисани су међусобно слични и исто оријентисани троуглови KPQ, QLP, PQM (подразумевамо да је редослед темена одговарајући). Доказати да је троугао KLM такође сличан и исто оријентисан са конструисаним троугловима.

(б) Дат је паралелограм $ABCD$. Над његовим страницама CD и CB конструисани су слични и исто оријентисани троуглови CDE и FBC. Доказати да је троугао FAE такође сличан и исто оријентисан као и конструисани троуглови.

2. Над страницама AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$ у његовој спољашњости конструисани су квадрати чији су центри тачке O_1, O_2, O_3, O_4. Означимо са E, F, G, H средишта дужи O_1O_3, BD, O_2O_4, AC.

(а) Доказати да су дужи O_1O_3 и O_2O_4 међусобно нормалне и подударне.

(б) Доказати да је четвороугао $EFGH$ квадрат.

3. Над страницама AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$ у његовој спољашњости конструисани су једнакостранични троуглови ABA_1, BCB_1, CDC_1, DAD_1, чији су центри тачке O_1, O_2, O_3, O_4. Означимо са P, Q, R средишта дужи B_1C_1, C_1D_1, AB, редом.

(а) Доказати да је троугао PQR једнакостраничан.

(б) Уколико додатно важи једнакост $AC = BD$, доказати да су праве O_1O_3 и O_2O_4 нормалне међусобно.

4. (а) Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на праве одређене страницама троугла леже на описаној кружници троугла.

(б) Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на средишта страница представљају дијаметрално супротне тачке на описаној кружници у односу на темена троугла.

(в) Одредити центар и коефицијент две хомотетије којима се описани круг датог троугла слика на Ојлеров круг.

5. У троуглу ABC ($AB < AC$) тачке A', B', C' су подножја висина. Означимо са M и N подножја нормала из A' на странице AB, AC, редом.

(а) Показати да растојање MN не зависи од избора висине троугла (тј. да одговарајућа дуж добијена полазећи од тачке B', односно C' има исту дужину као MN).

(б) Нека су M', N' тачке симетричне са A' у односу на праве AB и AC редом. Доказати да су тачке B', C', M', N' колинеарне.

(в) Нека је D пресек правих $B'C'$ и BC, а A_1 средиште странице BC. Доказати да важи $\mathcal{H}(B, C; A', D)$, као и да су праве DH и AA_1 нормалне, где је H ортоцентар троугла ABC.

(г) Нека је P пресек праве кроз A' која је нормална на OA' (O је центар описане кружнице) и дужи AB. Доказати да важи $\measuredangle A'HP = \measuredangle ABC$.

6. (а) Означимо са A_1, B_1, C_1 тачке у којима тангенте описане кружнице троугла ABC секу праве BC, CA, AB, редом. Израчунати односе у којима тачке A_1, B_1, C_1 деле (споља) странице троугла и доказати да су колинеарне.

(б) Означимо са A_1' тачку праву AB такву да важи $\mathcal{H}(B, C; A_1, A_1')$. Доказати да је права AA_1' симетрична тежишној дужи троугла ABC из темена A у односу на симетралу унутрашњег угла из темена A.

(в) Означимо са A_2, B_2, C_2 тачке у којима тангенте описане кружнице троугла ABC секу средње линије троугла паралелне страницама BC, CA, AB, редом. Доказати да су ове тачке колинеарне, као и да је права њима одређена нормална на Ојлерову праву троугла ABC.

7. Нека је D произвољна тачка на кружници описаној око троугла ABC, а A', B', C' подножја нормала из тачке D на правама BC, AC, AB редом.

(а) Доказати да су тачке A', B', C' колинеарне. Права одређена њима зове се Симсонова права тачке D у односу на троугао ABC.

(б) Доказати да Симсонова права тачке D полови дуж HD, где је H ортоцентар троугла ABC, као и да је паралелна правама AA'', BB'', CC'', где су A'', B'', C'' друге тачке пресека описане кружнице троугла и правих DA', DB', DC'.

(в) Доказати да пресек Симсонових правих тачке A у односу на троугао BCD и тачке B у односу на троугао ACD припада правој одређеној тачком C и ортоцентром троугла ABD.

(г) Доказати да се Симсонове праве тачака A, B, C, D у односу на троуглове BCD, ACD, ABD, ABC секу у једној тачки. Уколико означимо ту тачку са P, одредити геометријско место тачака P када се тачка D шета по описаној кружници троугла ABC.

(д) Уколико је E такође тачка са кружнице описане око троугла ABC, доказати да је угао између Симсонових правих тачака D и E у односу на троугао ABC једнак половини централног угла тетиве DE.

8. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Означимо са H_A, H_B, H_C, H_D редом ортоцентре троуглова BCD, ACD, ABD, ABC; са T_A, T_B, T_C, T_D њихова тежишта и са E_A, E_B, E_C, E_D центре њихових Ојлерових кругова.

(а) Доказати да се нормале из средишта страница четвороугла на праву одређену наспрамном страницом секу у једној тачки. Означимо ту тачку са E. У литератури је њен најче71и назив антицентар четвороугла $ABCD$.

(б) Нека је T тежиште четвороугла $ABCD$, а O центар описане кружнице. Доказати да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$, тј. да је T средиште дужи OE.

(в) Доказати да је T уједно и тежиште четвороугла $T_AT_BT_CT_D$, као и да се хомотетијом са центром T и коефицијентом $-\frac{1}{4}$ четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $T_AT_BT_CT_D$. Специјално, ови четвороуглови су слични.

(г) Доказати да се централном симетријом у односу на тачку E четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $H_AH_BH_CH_D$. Специјално, ови четвороуглови су подударни.

(д) Доказати да се Ојлерови кругови разматраних троуглова секу у антицентру E, као и да се хомотетијом са центром F и коефицијентом $-\frac{1}{3}$ четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $E_AE_BE_CE_D$, где је F тачка за коју важи $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$. Специјално, ови четвороуглови су слични.

9. Уписани круг троугла ABC са центром S додирује странице троугла BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F.

(а) Нека је пресек правих EF и BC тачка P. Доказати да су праве SP и AD нормалне.

(б) Нека је пресек правих AS и EF тачка K, правих DE и KC тачка L, а правих DF и KB тачка M. Доказати да су праве LM и BC паралелне.

10. Дат је тангентни четвороугао $ABCD$ чији уписани круг са центром S додирује странице AB, BC, CD, AD редом у тачкама M, N, P, Q.

(а) Доказати да су средишта дијагонала AC, BD и тачка S колинеарне.

(б) Доказати да су праве AC, BD, MP, NQ конкурентне.

(ц) Доказати да су праве AC, MN, PQ конкурентне. Уколико је њихов пресек тачка K, доказати да је $KS \perp BD$.

11. (а) Нека тачке A', B', C' припадају дужима BC, CA, AB редом и нека је $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{p}{n}$, $\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{m}{p}$, $\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{n}{m}$. Доказати да се дужи AA', BB', CC' секу у једној тачки која има координате $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$.

(б) Доказати да су кординате центра уписаног и споља уписаних кругова дате са $s = \frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}$, $s_a = \frac{-\alpha a+\beta b+\gamma c}{-\alpha+\beta+\gamma}$, $s_b = \frac{\alpha a-\beta b+\gamma c}{\alpha-\beta+\gamma}$, $s_c = \frac{\alpha a+\beta b-\gamma c}{\alpha+\beta-\gamma}$, где су α, β, γ дужине странице BC, CA, AB троугла ABC.

(в) Уколико су O, S, S_A редом центри описаног и споља уписаних кругова троугла ABC, а R, r, r_a њихови полупречници редом, доказати да важи једнакост $OS^2 = R^2 - 2Rr$, $OS_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

12. (а) Нека је T тежиште многоугла $A_1A_2\dots A_n$ и M произвољна тачка. Доказати да важи једнакост

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = nMT^2 + TA_1^2 + TA_2^2 + \cdots + TA_n^2.$$

(б) Нека је T тежиште многоугла $A_1A_2\dots A_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ реални скалари и M произвољна тачка. Доказати да важи једнакост

$$\lambda_1 MA_1^2 + \lambda_2 MA_2^2 + \cdots + \lambda_n MA_n^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)MT^2 + \lambda_1 TA_1^2 + \lambda_2 TA_2^2 + \cdots + \lambda_n TA_n^2.$$

(ц) У троуглу ABC тачка O је центар описане кружнице, T је тежиште и H је ортоцентар. Доказати да важе формуле

$$OT^2 = R^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2), \qquad OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

где је R полупречник описане кружнице.

13. (а) Нека је $A_1A_2\dots A_n$ правилан многоугао чији је центар тачка O и M произвољна тачка. Доказати да је збир квадрата растојања тачке M до темена многоугла једнак $n(OM^2 + R^2)$, где је R полупречник описаног круга многоугла. Специјално, уколико је тачка M са описане кружнице датог многоугла, важи да је збир квадрата растојања тачке M до темена многоугла једнак $2nR^2$.

(б) Доказати да је збир квадрата растојања произвољне тачке M са описане кружнице датог правилног $2n-$тоугла $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ до темена са парним индексима једнак збиру квадрата растојања до темена са непарним индексима.

(ц) Нека су $d_1, d_2, d_{2n-1}, d_{2n}$ растојања произвољне тачке M са описане кружнице датог правилног $2n-$тоугла $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ до правих одређених страницама $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$. Доказати да је $d_1 \cdot d_3 \cdots d_{2n-1} = d_2 \cdot d_4 \cdots d_{2n}$.

14. (а) Доказати да за површину оријентисаног конвексног многоугла $A_1A_2\cdots A_n$ важи формула

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}(a_1\overline{a_2} + a_2\overline{a_3} + \ldots + a_{n-1}\overline{a_n} + a_n\overline{a_1}).$$

(б) Нека су $B_1, B_2, \dots, B_n$ средишта страница $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ конвексног многоугла $A_1A_2\dots A_n$. Доказати да је површина многоугла $B_1B_2\dots B_n$ не мања од половине површине многоугла $A_1A_2\dots A_n$.

15. (а) Изразити површину троугла чија су темена подножја висина троугла у функцији дужина страница троугла.

(б) Доказати да површина троугла чија су темена подножја нормала спуштених из произвољног темена тетивног петоугла на његове странице не зависи од избора темена петоугла.

16. У равни су дате две кружнице k_1 и k_2. Нека је A једна њихова пресечна тачка. По кружницама се крећу муве M_1 и M_2 константним брзинама, свака увек у истом смеру, тако да увек пролазе кроз тачку A у истим моментима времена. Доказати да постоји непокретна тачка P у равни кружница која је у сваком тренутку подједнако удаљена од мува M_1 и M_2.