Одабрана поглавља геометрије Б
Афини и еуклидски простори, кватерниони

Изометрије и сличности еуклидске равни и еуклидског простора

1. Одредити формуле следећих пресликавања еуклидске равни:

(а) ротација која слика тачке $(1,2)$ и $(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{3}{2})$ редом у тачке $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$ и $(2,1)$;

(б) клизајућа рефлексија која слика тачке $(0,0)$ и $(0,1)$ редом у тачке $(1,1)$ и $(2,1)$;

(в) композиција хомотетије са центром у тачки $(2,1)$ и коефицијентом 3 и рефлексије у односу на праву $x+3y=5$;

(г) обе хомотетије које сликају круг $x^2+y^2=1$ на круг $(x-3)^2+(y-1)^2=3$.

2. Доказати да су пресликавања дата формулама у односу на ортонормирани репер Oe_1e_2 еуклидске равни изометрије или сличности и одредити њихове основне компоненте:

(а) $$\begin{aligned} x' &= -x + 2, \\ y' &= -y - 4; \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} x' &= -3x, \\ y' &= 3y - 4; \end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{5}{13}x - \tfrac{12}{13}y - \tfrac{14}{13}, \\ y' &= -\tfrac{12}{13}x + \tfrac{5}{13}y + \tfrac{47}{13}; \end{aligned}$$

(г) $$\begin{aligned} x' &= 5x - 12y + 8, \\ y' &= 12x + 5y - 16. \end{aligned}$$

3. Одредити у комплексним координатама формуле:

(а) ротације око тачке $(2,3)$ за угао $\frac{\pi}{3}$;

(б) клизајуће рефлексије у односу на праву $y=x+3$, којом се тачка $(1,6)$ слика у тачку $(5,6)$.

4. (а) Доказати да је пресликавање дато формулом $z' = i\bar{z} + (4+2i)$ у комплексним координатама изометрија и одредити јој основне компоненте.

(б) Доказати да је пресликавање дато формулом $z' = 2(-1+\sqrt{3}i)z + (4-2i)$ у комплексним координатама сличност и представити га као композицију неке транслације, хомотетије и ротације.

5. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ је оријентисан својим ортонормираним репером Oe. Одредити формуле:

(а) ротације за угао $\frac{\pi}{3}$ око векторске праве (кроз координатни почетак O) која је оријентисана својим вектором правца $(1,0,1)$;

(б) завојног кретања чија је оса права $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ оријентисана својим вектором правца, угао ротације $-\frac{3\pi}{4}$ и вектор транслације $(0,-2,-2)$;

(в) осноротационе рефлексије за угао $\frac{2\pi}{3}$, чија је основа раван $2x-y+2z-3=0$ и оса права оријентисана вектором $\overrightarrow{SP}$, где је P тачка $(3,0,3)$ и S њен пресек са равни основе.

6. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ је оријентисан својим ортонормираним репером Oe. Доказати да су следећим формулама у односу на тај репер одређене изометрије или сличности, одредити основне компоненте и скицирати путању произвољне тачке:

(а) $$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z, \\ y' &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + 1, \\ z' &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 2; \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} x' &= -x - 2y + 2z + 1, \\ y' &= -2x + 2y + z + 1, \\ z' &= 2x + y + 2z; \end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned} x' &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z + 3, \\ y' &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 1, \\ z' &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 8; \end{aligned}$$

(г) $$\begin{aligned} x' &= -4x - 8y + z + 14, \\ y' &= 4x - y + 8z + 6, \\ z' &= 7x - 4y - 4z - 8. \end{aligned}$$

7. Нека је P произвољна тачка еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ њен вектор положаја.

(а) Доказати да се вектор $\vec{v}$ може заротирати до вектора колинеарног са вектором правца $z-$осе композицијом две ротације: око $y-$осе у негативном смеру за угао φ одређен са $\cos\varphi = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}$, $\sin\varphi = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}$ (након чега се добија вектор $\vec{v'}$ у $yz-$равни) и ротације око $x-$осе у позитивном смеру за угао ψ одређен са $\cos\psi = \frac{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$, $\sin\psi = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$. Приметимо да је φ угао између пројекције вектора $\vec{v}$ на $xz-$раван и вектора правца $z-$осе, док је ψ угао између вектора $\vec{v'}$ добијеног након прве ротације од вектора $\vec{v}$ и вектора правца $z-$осе. Приметимо да уколико тачка P већ припада $y-$оси, потребно је изоставити прву ротацију око $y-$осе.

(б) Поновити поступак из дела (а) са ротацијама редом: око $x-$осе до $xz-$равни, па око $y-$осе; око $z-$осе до $xz-$равни, па око $y-$осе.

(в) Користећи резултат из дела (а), доказати да је матрица ротације за угао α у позитивном смеру око праве кроз координатни почетак и тачку P чији је вектор правца $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ јединични дата са

$$\begin{pmatrix} v_1^2 + (1 - v_1^2)\cos\alpha & v_1v_2(1-\cos\alpha) - v_3\sin\alpha & v_1v_3(1-\cos\alpha) + v_2\sin\alpha \\ v_1v_2(1-\cos\alpha) + v_3\sin\alpha & v_2^2 + (1 - v_2^2)\cos\alpha & v_2v_3(1-\cos\alpha) - v_1\sin\alpha \\ v_1v_3(1-\cos\alpha) - v_2\sin\alpha & v_2v_3(1-\cos\alpha) + v_1\sin\alpha & v_3^2 + (1 - v_3^2)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

8. Нека је A матрица ротације простора $\mathbb{E}^3$, са уоченим ортонормираним репером Oe, $e = [e_1, e_2, e_3]$, у односу на осу која садржи тачку O и оријентисана је јединичним вектором правца $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, за оријентисани угао α.

(а) Доказати да је $A = E + D\sin\alpha + D^2(1-\cos\alpha)$, где је $D = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$.

(б) Доказати да важе релације $\mathrm{tr}A = 1 + 2\cos\alpha$, $A - A^T = 2D\sin\alpha$, па на основу њих, за дату матрицу ротације A, одредити јединични вектор правца (до на знак) осе ротације и одговарајући угао ротације.

(в) Уколико вектор правца осе $\vec{v}$ није јединични, означимо са $\mu = \frac{|\vec{v}|}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$ и $\lambda = |\vec{v}|^2 + \mu^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \mu^2$, при чему подразумевамо да је $\mu = 0$ за $\alpha = \pi$. Доказати да је тада матрица ротације (тзв. Ојлерова матрица придружена реалном броју μ и вектору $\vec{v} \neq 0$)

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mu^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 & 2(v_1v_2 - v_3\mu) & 2(v_1v_3 + v_2\mu) \\ 2(v_1v_2 + v_3\mu) & \mu^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2 & 2(v_2v_3 - v_1\mu) \\ 2(v_1v_3 - v_2\mu) & 2(v_2v_3 + v_1\mu) & \mu^2 + v_3^2 - v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Приметимо да се добијена матрица не мења уколико сваки од бројева v_1, v_2, v_3, μ помножимо истим скаларом различитим од нуле. Упоредити добијену матрицу са матрицом добијеном у делу (а), као и са матрицом добијеном у претходном задатку.

9. Нека је q јединични кватернион различит од нуле и $C_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ пресликавање дефинисано са $C_q(p) = qpq^{-1}$ (конјугација).

(а) Доказати да су конјугације $C_{q'}$ и $C_{q''}$ иста пресликавања акко је $q' = \pm q''$.

(б) Доказати да је конјугација изометрија простора $\mathbb{H}$, као и простора чистих кватерниона $\mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$. Уколико је $q = [\cos\frac{\alpha}{2}, \vec{v}\sin\frac{\alpha}{2}]$ и $|\vec{v}| = 1$, пресликавање C_q је ротација простора $\mathbb{R}^3$ за угао α око јединичног вектора $\vec{v}$ у позитивном смеру.

(в) Означимо са $R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и $L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ редом десно и лево множење кватернионом q, тј. $R_q(p) = pq$, $L_q(p) = qp$. Доказати да је $C_q = L_q \circ R_{\overline{q}} = R_{\overline{q}} \circ L_q$, па на основу матрица левог и десног множења у бази $e = [1, i, j, k]$ доказати да је матрица конјугације C_q дата са

$$[C_q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xt - wz) & 2(xz + yw) \\ 0 & 2(xy + zw) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz - xw) \\ 0 & 2(xz - yw) & 2(yz + xw) & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

где је $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ јединични вектор, $q = w + xi + yj + zk = \cos\frac{\alpha}{2} + v_1\sin\frac{\alpha}{2}i + v_2\sin\frac{\alpha}{2}j + v_3\sin\frac{\alpha}{2}k$. Упоредити добијену матрицу са матрицама добијеним у претходна два задатка.

(г) Уколико је $\vec{v} \perp p$, доказати да је $C_q(p) = qpq^{-1} = \tilde{q}p$, где је $q = \cos\frac{\alpha}{2} + v_1\sin\frac{\alpha}{2}i + v_2\sin\frac{\alpha}{2}j + v_3\sin\frac{\alpha}{2}k$, а $\tilde{q} = \cos\alpha + v_1\sin\alpha i + v_2\sin\alpha j + v_3\sin\alpha k$. Дакле, у овом случају је довољно једно множење кватерниона да бисмо одредили слику дате тачке при векторској ротацији.

10. Користећи кватернионе одредити слику тачке $(2, 0, 0)$ при ротацији еуклидског простора $\mathbb{E}^3$:

(а) око $z-$осе за угао π, па за угао $\frac{\pi}{4}$;

(б) око праве $\frac{x}{1} = y = \frac{z}{1}$ за угао π, па за угао $\frac{\pi}{2}$.

11. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ оријентисан је својом канонском базом $Oe_1e_2e_3$. Одредити матрицу векторске ротације за угао $\frac{\pi}{2}$ око праве оријентисане својим вектором $c = (p, q, r)$. Посебно размотрити случај $c = (1, 2, 2)$, користећи:

(а) ротације око координатних оса;

(б) промену базе;

(в) кватернионе.

12. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ оријентисан је својом канонском базом $Oe_1e_2e_3$. Доказати да је датом матрицом A одређена једна векторска ротација и одредити њену осу и одговарајући угао у односу на једну од оријентација те осе, уколико је:

(а) $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; (б) $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; (в) $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

13. Нека су σ и π рефлексије еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ у односу на његове векторске равни $\mathbb{U} : y-z=0$ и $\mathbb{W} : x-2y+z=0$, редом.

(а) Одредити матрице пресликавања σ, π, $\pi\circ\sigma$.

(б) Доказати да је матрица A пресликавања $\pi\circ\sigma$ матрица једне ротације око векторске праве која се добија у пресеку равни $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$, одредити јој угао и упоредити га са углом између равни $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$.

14. Одредити све парове реалних бројева (a,b) за које је формулама

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & ax & + & by & + & bz, \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz, \\ z' & = & bx & + & by & + & az, \end{array}$$

одређена једна ротација еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$.

Афина пресликавања афине равни и афиног простора

1. Доказати следеће "аксиоме" или њихове последице, при синтетичком заснивању еуклидске геометрије, у произвољном афином простору над пољем $\mathbb{R}$:

(а) За сваке три неколинеарне тачке постоји тачно једна раван која их садржи;

(б) Ако две разне равни имају заједничку тачку, онда је њихов пресек права;

(в) Ако су тачке A, B, C различите и колинеарне, тада је тачно једна од њих између преостале две;

(г) Ако тачка A није на правој Π, тада у њиховој равни $\Sigma=\langle A,\Pi\rangle$ постоји тачно једна права Γ која садржи тачку A и не сече праву Π.

2. (а) Доказати да су две разне хиперравни у афином простору димензије $n>1$ или паралелне или се секу по потпростору димензије $n-2$.

(б) Доказати да је сваки афини потпростор димензије k афиног простора димензије n пресек неких $n-k$ различитих хиперравни.

3. Дата су два потпростора $\Pi=A+\mathbb{U}$ и $\Gamma=B+\mathbb{W}$ у афином простору са директрисом $\mathbb{V}$.

(а) Доказати да је директриса најмањег афиног потпростора који садржи Π и Γ (афини омотач њихове уније) $\mathbb{U}+\mathbb{W}+\mathcal{L}(\overrightarrow{AB})$. Димензија овог афиног простора једнака је $\dim\mathbb{U}+\dim\mathbb{W}-\dim(\mathbb{U}\cap\mathbb{W})$ или $\dim\mathbb{U}+\dim\mathbb{W}-\dim(\mathbb{U}\cap\mathbb{W})+1$, у зависности од тога да ли се Π и Γ секу или не.

(б) Уколико су потпростори Π и Γ суплементарни ($\mathbb{V}=\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}$), доказати да је њихов пресек једна тачка. Специјално, уколико је афини простор уједно и еуклидски, тада за сваку тачку P постоји тачно један потпростор Γ који је садржи и ортогоналан је на Π. Његова директриса је $\mathbb{W}=\mathbb{U}^{\perp}$, суплементаран је са Π и сече Π у тачно једној тачки P' која представља ортогоналну пројекцију тачке P на потпростор Π.

4. Навести примере дводимензионих равни у четвородимензионом простору $\mathbb{R}^4$ које су:

(а) паралелне и различите;

(б) делимично паралелне;

(в) мимоилазне;

(г) секу се у тачки;

(е) секу се по правој.

5. У афином простору $\mathcal{A}$ димензије 4 дати су скупови тачака Π и Γ чије координате у односу на дати афини репер Oe задовољавају услове:

$$\Pi=\left.\begin{array}{ll} 2x+5y+2z-6t & =3 \\ 3x+8y+3z-7t & =7 \end{array}\right\},\qquad \Gamma=\left.\begin{array}{ll} 4x+2y+3z-6t & =3 \\ 5x-4y+3z-5t & =2 \end{array}\right\}.$$

Доказати да су ови скупови афини потпростори простора $\mathcal{A}$, одредити њихове директрисе и испитати њихов међусобни положај.

6. У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су права $\Delta : x_1=2+t,\ x_2=-t,\ x_3=-1-t,\ x_4=1+2t,\ x_5=-3t,$ $t\in\mathbb{R}$ и дводимензиона раван $\Gamma : x_1=r+3s,\ x_2=-1+4r-s,\ x_3=-3+r+s,\ x_4=4-r+s,\ x_5=-2+s,\ r,s\in\mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај праве Δ и равни Γ.

(б) Одредити афини потпростор Σ најмање димензије који садржи праву Δ и раван Γ.

7. У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су афини потпростори $\Pi: x_1 - x_2 - x_5 + 1 = 0, 2x_1 + x_3 + x_5 - 3 = 0, 3x_2 - x_4 + 3x_5 - 5 = 0$ и $\Gamma: x_1 = 2 + t + s, x_2 = -1 - 2t, x_3 = -3s, x_4 = 4 - 2t + 3s, x_5 = 3 + s;\ t, s \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај потпростора Π и Γ.

(б) Одредити једначину потпростора Σ најмање димензије који садржи Π, паралелан је са Γ и садржи тачку $M(1, 2, 1, 2, 0)$.

8. Ако су Π и Γ две праве у афином простору $\mathcal{A}$ и T_{PQ} тежиште система тачака (P, Q), доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} : P \in \Pi, Q \in \Gamma\}$ афини потпростор паралелан са Π и Γ и одредити његову димензију у зависности од међусобног поожаја Π и Γ.

9. Нека је T_{PQ} тежиште система тачака A, P, Q, при чему је A фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}^n$, а P и Q припадају редом датим афиним потпросторима Π и Γ.

(а) Доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} \mid P \in \Pi,\ Q \in \Gamma\}$ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са Π и Γ.

(б) Испитати детаљно специјалан случај $n = 3$ и $\dim \Pi = \dim \Gamma = 1$.

10. Дат је троугао ABC у еуклидској равни. Одредити барицентричне координате:

(а) ортоцентра H, центра описане кружнице O и тежишта T, па затим показати да важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$;

(б) центра Ојлеровог круга датог троугла.

11. (а) Доказати да је композиција две централне симетрије $\sigma_A \circ \sigma_B$ транслација и одредити њен вектор.

(б) Доказати да је композиција три централне симетрије $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ централна симетрија и одредити њен центар.

(в) Шта је композиција коначно много централних симетрија афиног простора?

12. (а) Доказати да је композиција хомотетије и транслације афиног простора опет хомотетија и одредити њен центар и коефицијент.

(б) Доказати да је композиција две хомотетије афиног простора хомотетија или транслација.

(в) Доказати да скуп свих хомотетија и транслација чини нормалну подгрупу афине групе.

13. Нека су A и B две фиксиране тачке афиног простора $\mathcal{A}$.

(а) Уколико је $\pi(M)$ тежиште система тачака (A, B, M), доказати да је тиме дефинисано афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

(б) Уколико тачка P припада потпростору Π и T_P је тежиште система тачака (A, B, P), доказати да је скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са Π.

14. Нека је $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ пресликавање којим се свакој тачки M из $\mathcal{A}$ придружује тачка $\pi(M) = M'$ одређена са $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање π централна симетрија.

15. Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и π пресликавање које произвољној тачки M додељује тачку M' за коју важи $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање π афино и одредити тип пресликавања π у зависности од реалне константе α.

16. Доказати да је пресликавање $\sigma : P \mapsto P'$ произвољног афиног простора дато са $\overrightarrow{PP'} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ афино и одредити тип и компоненте пресликавања у зависности од реалних параметара α, β, γ.

17. Нека су A, B, C три фиксиране неколинеарне тачке афиног простора $\mathcal{A}^n$ и α, β, γ реални бројеви такви да $\alpha+\beta+\gamma \neq 1$. Означимо са M барицентар система тачака (A, α), (B, β), (C, γ), $(M, 1)$.

(а) Доказати да је пресликавање $\sigma_{\alpha\beta\gamma} : M \to M'$ транслација или хомотетија.

(б) Представити $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ у координатама за $n = 2$. Ако су $A(0, 0)$, $B(4, 1)$, $C(2, 2)$ координате тачака у односу на дати репер афине равни, представити у координатама пресликавање σ_{111} и скицирати путању произвољне тачке M.

18. Нека је σ афино пресликавање афуног простора $\mathcal{A}$ такво да је за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, тачка $\sigma^2(M)$ средиште дужи $M\sigma(M)$.

(а) Доказати да је, за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, барицентар тачака $(M, 1)$, $(\sigma(M), 2)$ фиксна тачка при пресликавању σ.

(б) Одредити σ у случају када има тачно једну фиксну тачку.

19. Нека је σ недегенерисано афино пресликавање простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ скуп свих транслација простора $\mathcal{A}$ које комутирају са σ.

(а) Доказати да је $\mathcal{K}$ Абелова група у односу на композицију пресликавања.

(б) Ако је тачка A фиксна тачка трансформације σ и $\tau \in \mathcal{K}$, онда је $\tau(A)$ фиксна тачка за σ. Доказати.

(в) Ако су A и B фиксне тачке за σ, онда је транслација за вектор $\overrightarrow{AB}$ елемент скупа $\mathcal{K}$. Доказати.

20. Одредити формуле афине трансформације $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ у односу на дати афини репер Oe афине равни $\mathcal{A}$, којом се тачка $A(1,1)$ пресликава у тачку $A'(2,3)$, а праве $\Pi : x-y=2$ и $\Sigma : x+y=0$ у праве $\Pi' : x-y=3$ и $\Sigma' : 7x-5y=-3$.

21. (а) Одредити формуле афиног пресликавања које има фиксну праву $x+y=6$, а праве $y=1$ и $y=3x-2$ слика редом у праве $x+2y=7$ и $2x+y=8$. Доказати да је дато пресликавање дилатација и одредити основне компоненте.

(б) Одредити једначину елипсе која је слика круга $(x-6)^2+y^2=16$, скицирати је и одредити њену површину.

22. (а) Одредити формуле афине трансформације Φ у односу на репер Oe афине равни која пресликава праве $a : y=0$, $b : x=0$ и $c : x-y=1$ редом у праве b, c и a.

(б) Трансформацијом Φ добијеном под (а) пресликати област $\mathcal{D} = \{(x,y) \mid 4x^2-12xy+10y^2+8x-16y+7<0,\ \frac{3}{2}<y<\frac{5}{2}\}$.

23. (а) Одредити формуле афине трансформације Φ еуклидске равни којом се тачка $(0,0)$ слика у тачку $(2,5)$, а праве $\Delta : x-y+1=0$ и $\Sigma : 5x+4y+5=0$ су фиксне.

(б) Одредити реалне коефицијенте α, β такве да важи $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$, где је Φ_1 дилатација са основом Δ, правцем Σ и коефицијентом α, а Φ_2 дилатација са основом Σ, правцем Δ и коефицијентом β.

(в) Одредити једначину и површину елипсе $\mathcal{E}$ која је слика круга $(x+1)^2+y^2=1$ при пресликавању Φ.

24. (а) Одредити формуле фамилије афиних пресликавања у односу на фиксирани репер Oe афине равни тако да се координатне осе Ox и Oy пресликавају редом на праве $2x+3y+1=0$ и $x-y-7=0$.

(б) Одредити међу добијеним пресликавањима она која нису афине трансформације.

(в) Доказати да је међу добијеним пресликавањима тачно једно дилатација.

25. (а) Одредити формуле афиног пресликавања афине равни које темена $B(-3,0)$ и $C(3,0)$ троугла ABC оставља фиксним, а теме $A(1,4)$ пресликава у средиште странице BC.

(б) Доказати да је добијено пресликавање паралелно пројектовање, одредити основне компоненте пројектовања, као и слику круга описаног око троугла ABC при овом пресликавању.

26. (а) Одредити формуле афине транформације Φ еуклидске равни при којој су тачке $B(5,1)$ и $C(2,4)$ фиксне и која тачку $A(1,1)$ пресликава у центар круга описаног око троугла ABC.

(б) Доказати да је пресликавање Φ дилатација и одредити њене компоненте и фиксне праве.

(в) Одредити једначину и површину елипсе $\mathcal{E}$ која је слика круга описаног око троугла ABC при пресликавању Φ.

27. Одредити формуле афине трансформације којом се паралелограм $ABCD$ са теменима $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(3,1)$, $D(1,1)$ слика у квадрат $ABDE$. Које је пресликавање у питању?

28. Одредити слику тачке $M(-2,5)$ и праве $y=0$ при:

(а) паралелном пројектовању на праву $x+y-1=0$, паралелно правој $x-5y-2=0$;

(б) афиној симетрији у односу на праву $x+y-1=0$, паралелно правој $x-5y-2=0$.

29. Одредити формуле следећих афиних пресликавања афине равни у односу на афини репер Oe, као и слику круга $x^2+y^2=1$:

(а) дилатације чија је основа права $y=-x$, правац права $y=x$ и коефицијент -4;

(б) трансвекције чија је основа права $y=-x$, којом се оса Ox слика на осу Oy.

30. Нека су $A(0,2)$, $B(3,5)$, $C(-3,5)$, $D(-3,-1)$ тачке афине равни, дате својим координатама у односу на афини репер Oe.

(а) Доказати да је систем тачака (A,B,C) једна афина база и одредити барицентричне координате произвољне тачке $M(x,y)$ у тој бази.

(б) Доказати да постоји јединствена афина трансформација Φ за коју важи $\Phi(A,B,C)=(B,C,D)$ и одредити формуле те трансформације у односу на дати репер.

31. Нека су p и q две праве у афиној равни $\mathcal{A}$ које се секу у тачки A.

(а) Ако је σ_p афина симетрија у односу на праву p паралелно са q и σ_q афина симетрија у односу на праву q паралелно са p, доказати да је њихова композиција $\sigma = \sigma_p \circ \sigma_q$ централна симетрија у односу на тачку A.

(б) Доказати да је скуп $\mathbb{S} = \{\varepsilon, \sigma_p, \sigma_q, \sigma_A\}$ једна подгрупа афине групе и одредити њену таблицу. Која је група у питању?

32. Нека је ABC тротеменик у афиној равни и $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ афине симетрије (дилатације са коефицијентом -1) чије су основе праве одређене тежишним дужима тротеменика, а правци праве одређене одговарајућим страницама тротеменика. Доказати да су сва афина пресликавања која фиксирају скуп $\{A, B, C\}$ композиције две од симетрија $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$, као и да чине подгрупу афине групе изоморфну симетричној групи $\mathbb{S}_3$.

33. Нека је π паралелно пројектовање афиног простора $\mathcal{A}$ са афиним репером $Oe_1e_2e_3$, чија је основа $\Pi : 2x+y-z+1 = 0$, директриса права $\Gamma = \langle G, u\rangle$, $G(-1, 2, 3)$, $u = 2e_1 + e_2 - e_3$, а $\eta_{S,k}$ хомотетија са центром $S(2, 2, -2)$ и коефицијентом -2. Одредити формуле пресликавања $\pi \circ \eta_{S,k}$, а затим испитати које афино пресликавање је добијено на овај начин.

34. Нека је $Oe_1e_2e_3$ афини репер афиног просора $\mathcal{A}$. Одредити формуле пројектовања $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ на раван $\Pi :$ $2x - y + z - 2 = 0$, паралелно правој $\Gamma = \langle A, u\rangle$, где је $A(-1, 0, 1)$ и $u = e_1 + 2e_2 + e_3$, затим пројектовања $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ на праву Γ, паралелно равни Π и композиције $\sigma \circ \pi$.

35. Одредити формуле афине трансформације еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ која представља композицију хомотетије са центром у тачки $A(1, 0, 2)$ и коефицијентом 2, раванске рефлексије у односу на раван $\Pi : x+2y-z+3 = 0$ и хомотетије са центром у тачки $B(2, -3, -4)$ и коефицијентом $\frac{1}{2}$. Одредити затим слику сфере $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 2z = -1$ при овој трансформацији.

36. Одредити основне компоненте и врсту афине трансформације дате својим формулама у односу на афини репер $Oe_1e_2e_3$ афиног простора $\mathcal{A}^3$:

(а)
$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y + 4z - 1,\\ y' &= -2x - 5y - 4z + 1,\\ z' &= 2x + 6y + 5z - 1; \end{aligned}$$

(б)
$$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y - 4z + 1,\\ y' &= 3x + 6y - 6z + 2,\\ z' &= -4x - 8y - 8z + 6; \end{aligned}$$

(в)
$$\begin{aligned} x' &= 5x + 2y - 2z + 2,\\ y' &= -4x - y + 2z - 2,\\ z' &= 8x + 4y - 3z + 4; \end{aligned}$$

(г)
$$\begin{aligned} x' &= 7x - 4y + 8z + 2,\\ y' &= 6x - 3y + 8z + 2,\\ z' &= 3x - 2y + 5z + 1. \end{aligned}$$

37. У афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 са афиним репером Oe одредити формуле:

(а) дилатације чија је основа раван $\Pi : 2x - y + z = 2$ и која слика тачку O у тачку $S(2, 1, 2)$;

(б) трансвекције чија је основа раван $\Pi : 2x + y + 2z - 3 = 0$ и која слика тачку $S(1, 0, 1)$ у тачку $S'(0, 4, 0)$.

38. У четвородимензионом афином простору дата је хиперраван $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и тачка $M(3, -1, -2, -1)$. Одредити формуле:

(а) паралелног пројектовања на хиперраван Π којим се тачка M слика у тачку $M'(2, 1, 2, 1)$;

(б) дилатације чија је основа хиперраван Π, при којој се тачка M слика у тачку $M'(\frac{3}{2}, 2, 4, 2)$;

(в) трансвекције чија је основа хиперраван Π, при којој се тачка M слика у тачку $M'(1, 0, -3, -2)$.

39. У афином простору димензије 4 дати су афини потпростори $\Pi : x_1-x_2+x_3+1 = 0$, $x_1+x_2 = x_4$ и $\Gamma : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, $x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

(а) Доказати да су Π и Γ суплементарни.

(б) Одредити формуле пројектовања на потпростор Π, паралелно са Γ, као и слику тачке $M(5, 0, -3, 4)$.

40. Нека је $\Pi = P + \mathbb{U}$ хиперраван у еуклидском афином простору $\mathbb{E}^k$ са директрисом $\mathbb{V}$ и $\vec{n}$ неки њен јединични вектор нормале (тада ја $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathcal{L}(\vec{n})$) и M произвољна тачка.

(а) Доказати да су ортогонална пројекција M_0 тачке M и тачка M_1 симетрична са M у односу на Π редом одређене са $\overrightarrow{PM_0} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PM} \circ \vec{n}$, $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PM} - 2\overrightarrow{PM} \circ \vec{n}$.

(б) Уколико је у односу на неки ортонормирани репер Oe хиперраван Π дата својом једначином $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b$ и тачка $M(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, тада је растојање тачке M хиперравни Π дато формулом

$$\frac{|a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_km_k - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2}}.$$

41. У четвородимензионом еуклидском простору дати су дводимензиони афини потпростори: Π одређен тачком $P(4, 5, 3, 2)$ и векторима $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0)$ и Σ одређен тачком $Q(1, -2, 1, -3)$ и векторима $w_1 = (3, 2, 3, 2), w_2 = (0, 1, 0, 1)$.

(а) Доказати да су потпростори Π и Σ делимично паралелни.

(б) Израчунати растојање тачке P од потпростора Σ, као и тачке Q од потпростора Π.

(в) Израчунати углове између вектора $\overrightarrow{PQ}$ и потпростора Π и Σ.

(г) Израчунати растојање између Π и Σ, као и једначину њихове заједничке нормале.

42. У четвородимензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ дата је права $\Delta : x_1 = 4+t, x_2 = 3+2t, x_3 = -3-t, x_4 = 7+3t$, $t \in \mathbb{R}$ и тачке $A(4,1,-1,-1)$, $B(-1,2,4,0)$, $C(0,3,0,-2)$.

(а) Одредити тачку A_1 симетричну тачки A у односу на праву Δ.

(б) Одредити једначину сфере чији је центар тачка A_1 и која садржи тежиште троугла ABC.

43. У петодимензионом еуклидском простору дате су дводимензионе равни $\Pi : x_1 = s, x_2 = t, x_3 = 0, x_4 = t, x_5 = s$, $s,t \in \mathbb{R}$ и $\Gamma : x_1 = q, x_2 = 1, x_3 = 2p, x_4 = 0, x_5 = 0,\ p,q \in \mathbb{R}$ ($\Pi : x_1 = t, x_2 = -2, x_3 = t, x_4 = s, x_5 = 0,\ t,s \in \mathbb{R}$ и $\Gamma : x_1 = 0, x_2 = p, x_3 = q, x_4 = p, x_5 = q+1,\ p,q \in \mathbb{R}$).

(а) Доказати да су равни Π и Γ мимоилазне и представити их као пресек неких хиперравни.

(б) Одредити једначину праве Δ која представља њихову заједничку нормалу, а затим једначину сфере која додирује ове равни и центар јој припада правој Δ.

44. Дате су равни Π и Γ и права Δ у четвородимензионом еуклидском простору својим једначинама $\Pi : x_1+x_2+x_3-5 = 0$, $\Gamma : x_1+x_2-x_3-3 = 0$, $\Delta : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{-1}$.

(а) Одредити пресек равни Π и Γ, као и угао диедара између њих.

(б) Одредити једначине симетралних равни диедара које образују равни Π и Γ.

(в) Одредити једначине две сфере чији центри леже на правој Δ и које додирују равни Π и Γ.

45. У четвородимензионом еуклидском простору дати су раван $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 15 = 0$ и права $\Gamma : x_1 = s+2, x_2 - 2s, x_3 = -s-1, x_4 = -s-2,\ s \in \mathbb{R}$. Одредити једначину праве Δ која припада равни Π, са правом Γ заклапа најмањи угао и на најмањем је растојању од координатног почетка.

46. У петодимензионом еуклидском простору дате су афини потпростори $\Pi :\ x_2 + x_5 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и $\Gamma :\ x_1 = 2+2q,\ x_2 = 1-5p+q,\ x_3 = 1+2p-q,\ x_4 = 3+2p+3q,\ x_5 = 2-5p+3q,\ p,q \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај равни Π и Γ, као и афини потпростор најмање димензије који их садржи.

(б) Одредити ортогоналну пројекцију равни Γ на раван Π, као и димензију пројекције.

47. У четвородимензионом еуклидском простору задата је дводимензиона раван $\Pi : x_1 + x_2 = 1, x_3 + x_4 = 0$. Одредити формуле:

(а) нормалне пројекције на раван Π;

(б) симетрије у односу на раван Π.

48. У четвородимензионом еуклидском простору дата је права $\Delta : x_1 = t, x_2 = 1+t, x_3 = -2+t, x_4 = -t,\ t \in \mathbb{R}$ и тачка $S(1,2,-1,0)$. Одредити формуле афине трансформације која представља композицију централне симетрије са центром у тачки S и симетрије у односу на праву Δ.

49. Дат је скуп тачака $A_1,\dots,A_m$ еуклидског простора $\mathbb{E}^n$ и пресликавање f које свакој тачки P простора придружује тачку Q такву да је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA_1} + \cdots + \overrightarrow{PA_m}$.

(а) Доказати да је f хомотетија, одредити њен центар и коефицијент.

(б) Ако је $m = 3$ и тачке A_1, A_2, A_3 су неколинеарне, одредити криву коју описује тачка Q док се тачка P креће по описаном кругу троугла $A_1A_2A_3$.

50. У еуклидском простору $\mathbb{E}^n$ дата је $n-$димензиона јединична коцка ивице a.

(а) Одредити дужину главне дијагонале и доказати да заклапа исти угао са свим ивицама коцке. Чему тежи тај угао када n тежи бесконачности? За које n је тај угао $\frac{\pi}{3}$?

(б) Одредити угао између главне дијагонале четвородимензионе коцке и њених једнодимензионих, дводимензионих и тродимензионих страна.

(ц) Одредити полупречнике описане и уписане сфере дате $n-$димензионе коцке.