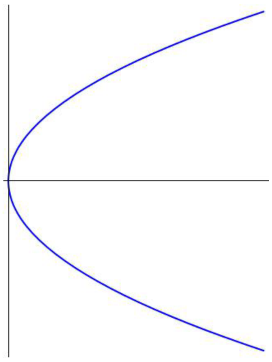
Geometrija 3, prvi test 2012/13

Ime i prezime, broj indeksa, smer ________________________________

1. Dat je skup tačaka $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2x\}$.

(a) Odrediti (po jednu) regularnu parametrizovanu krivu α i parametrizovanu krivu β koja nije regularna, tako da im je skup slika (trag, nosač krive) dati skup $\mathcal{S}$.

(b) Odrediti funkciju dužine luka krive α. Da li se kriva α može prirodno parametrizovati?
(Pomoć: $\int \sqrt{z^2+1}dz = z\sqrt{z^2+1} + \ln|z + \sqrt{z^2+1}|$)-



Rešenje. Dati skup tačaka $\mathcal{S}$ predstavlja parabolu koja leži u desnoj poluravni. Jedna parametrizacija ovog skupa tačaka je

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, t\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

tj. kao glatka funkcija $x = x(y)$ promenljive y koja je uzeta za parametar. Ovako dobijena kriva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je očigledno regularna zbog

$$\alpha'(t) = (t, 1) \neq (0, 0).$$

Funkcija dužine luka, merena od tačke $t = 0$, je:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(z)\|dz = \int_0^t \sqrt{z^2+1}dz = \left(z\sqrt{z^2+1} + \ln|z+\sqrt{z^2+1}|\right)\Big|_0^t = t\sqrt{t^2+1} + \ln|t + \sqrt{t^2+1}|.$$

Kako je kriva α regularna, ona se može parametrizovati prirodnim parametrom. Međutim, zbog komplikovanog oblika funkcije dužine luka, nemoguće je odrediti eksplicitno inverznu funkciju funkcije $s = s(t)$. Dakle, kod ovako parametrizovane krive α nemoguće je eksplicitno dobiti parametrizaciju dužinom luka.
Još jedan primer parametrizacije skupa tačaka $\mathcal{S}$ je

$$\beta(u) = \left(\frac{u^6}{2}, u^3\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ovako dobijena kriva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ predstavlja krivu koja nije regularna za $u = 0$, zbog $\beta'(u) = (3u^5, 3u^2)$. Kriva data parametrizacijom $\left(\frac{v^4}{2}, v^2\right)$, iako takođe nije regularna za $v = 0$, nema za skup slika dati skup $\mathcal{S}$, već samo gornju polovinu parabole koja je u prvom kvadrantu (zbog nenegativnosti koordinatnih funkcija).

Napomena. Primetimo da za preslikavanje $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $\Phi(u) = u^3 = t$ važi

$$\alpha(t) = \alpha(\Phi(u)) = \alpha(u^3) = \beta(u).$$

Međutim, Φ nije difeomorfizam jer inverzna funkcija nema izvod u tački 0, pa regularne parametrizovane krive α i β nisu ekvivalentne (tj. kriva β nije reparametrizacija krive α), iako imaju isti trag.

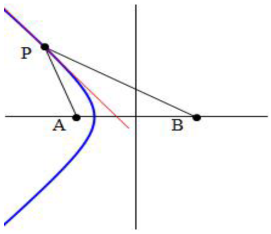
2. Data je kriva svojom parametrizacijom $\beta(t) = (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Odrediti jednačinu tangente p u proizvoljnoj tački $P = \beta(t_0)$ krive.

(b) Dokazati da je prava p simetrala ugla $\angle APB$, pri čemu je $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$. Skicirati i objasniti.

Rešenje.

(a) Data kriva je zapravo parametrizacija leve grane hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ date u dekartovim koordinatama. Vektor brzine u proizvoljnoj tački $P = \beta(t_0)$ krive je $\beta'(t_0) = (-\operatorname{sh} t_0, \operatorname{ch} t_0)$, pa je kriva regularna u svim tačkama.



Jednačina tražene tangente p je

$$\frac{x + \operatorname{ch} t_0}{-\operatorname{sh} t_0} = \frac{y - \operatorname{sh} t_0}{\operatorname{ch} t_0},$$

odnosno u parametarskom obliku

$$(-\operatorname{sh} t_0 \cdot s - \operatorname{ch} t_0, \operatorname{ch} t_0 \cdot s + \operatorname{sh} t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(b) Dovoljno je dokazati da je vektor pravca prave p (tj. vektor brzine krive β) kolinearan sa vektorom simetrale ugla $\measuredangle APB$. Nakon kraćeg računa dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{PA}}{\|\overrightarrow{PA}\|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PB}\|} &= \frac{1}{(\operatorname{ch} t_0 - \sqrt{2})^2 + \operatorname{sh}^2 t_0}(\operatorname{ch} t_0 - \sqrt{2}, -\operatorname{sh} t_0) + \frac{1}{(\operatorname{ch} t_0 + \sqrt{2})^2 + \operatorname{sh}^2 t_0}(\operatorname{ch} t_0 + \sqrt{2}, -\operatorname{sh} t_0) \\
&= \left(\frac{\operatorname{ch} t_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t_0 - 1} + \frac{\operatorname{ch} t_0 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t_0 + 1}, \frac{-\operatorname{sh} t_0}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t_0 - 1} + \frac{-\operatorname{sh} t_0}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t_0 + 1} \right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sh}^2 t_0}{\operatorname{ch} 2t_0}, \frac{-2\sqrt{2}\operatorname{sh} t_0 \operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch} 2t_0} \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sh} t_0}{\operatorname{ch} 2t_0}(-\operatorname{sh} t_0, \operatorname{ch} t_0) \\
&= -\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sh} t_0}{\operatorname{ch} 2t_0}\beta'(t_0),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. Naravno, moguće je i eksplicitno odrediti uglove između pravih p i AP, odnosno p i BP, i dokazati da su jednaki.

Napomena. Tačke A i B su žiže hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Upravo smo dokazali da će se zrak svetlosti koji izvire iz jedne žiže hiperbole odbiti od hiperbole u pravcu odlazećeg zraka iz druge žiže. Ova osobina hiperbole naziva se **optičko svojstvo hiperbole**. Postoje analogna tvrđenja i za elipsu i parabolu.

3. Data je kriva svojom polarnom jednačinom $\rho = 1 - \cos\theta$.

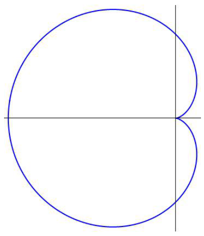
(a) Skicirati datu krivu i naznačiti parametar na crtežu.

(b) Izračunati dužinu date krive.

Rešenje.

(a) Data kriva je parametrizovana parametrom θ koji predstavlja polarni ugao, dok je $\rho = \rho(\theta))$ rastojanje tačke koja odgovara parametru θ od koordinatnog početka. Njen skup slika je simetričan u odnosu na $y-$osu tragu standardno parametrizovane kardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ (tačnije, tački sa parametrom θ jedne krive odgovara tačka sa parametrom $\pi - \theta$ druge krive). Kriva ima "špic" u tački $\theta = 0$ i jedino u toj tački nije regularna. Zbog $2\pi-$periodičnosti funkcije u parametrizaciji krive, kriva je zatvorena i dovoljno je posmatrati njen trag na intervalu (vrednosti parametra) dužine 2π, recimo $[0, 2\pi]$.

(b) Dužina krive je:



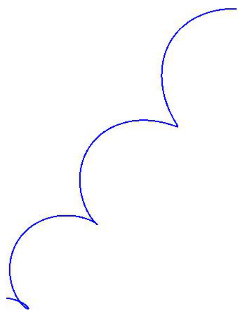
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta d\theta}$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = -8\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

4. Data je kriva $\gamma(t) = (t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, t\sqrt{3} - \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Odrediti Freneov reper krive γ.

(b) Izračunati krivinu i torziju krive γ i dokazati da je kriva kružni heliks.

Rešenje.



- vektor brzine: $\gamma'(t) = (1 + \sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3} - \cos t)$;
- brzina: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1+\sqrt{3}\cos t)^2 + (-2\sin t)^2 + (\sqrt{3} - \cos t)^2} = 2\sqrt{2}$;
- funkcija dužine luka: $s(t) = \int_0^t 2\sqrt{2} du = 2\sqrt{2}u|_0^t = 2\sqrt{2}t \Longrightarrow t = \frac{s}{2\sqrt{2}} = \frac{s\sqrt{2}}{4}$;
- prirodna parametrizacija: $\gamma(s) = \left(\frac{s\sqrt{2}}{4} + \sqrt{3}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}, 2\cos\frac{s\sqrt{2}}{4}, \frac{s\sqrt{6}}{4} - \sin\frac{s\sqrt{2}}{4}\right)$, $s \in \mathbb{R}$;
- tangentni vektor: $T(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\cos\frac{s\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{s\sqrt{2}}{4}\right)$,
$$T(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\cos t, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos t\right);$$
- krivina: $\gamma''(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}\cos\frac{s\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{8}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}\right)$,
$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{4};$$
- normalni vektor: $N(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}, -\cos\frac{s\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}\right)$,
$$N(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, -\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right);$$

- binormalni vektor: $B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\frac{s\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{s\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$,
$$B(t) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t - \frac{\sqrt{6}}{4}\right);$$
- torzija: $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle = -\frac{1}{4}$;

Kako su krivina i torzija krive konstantne, na osnovu Osnovne teoreme za krive u $\mathbb{R}^3$ dobijamo da je data kriva kružni heliks. Iz oblika same parametrizacije krive γ može se dobiti da je u pitanju heliks koji leži na cilindru čije dekartove koordinate zadovoljavaju jednačinu $(x\sqrt{3} - z)^2 + y^2 = 4$.

5. Neka je α regularna kriva parametrizovana proizvoljnim parametrom t, $\kappa \neq 0$ njena krivina, τ torzija i v brzina krive.

(a) Predstaviti vektor ubrzanja u Freneovoj bazi krive i izračunati njegov intenzitet, tj. ubrzanje krive.

(b) Interpretirati dobijene formule u slučaju prirodno parametrizovane krive.

Rešenje.

(a) Vektori brzine i ubrzanja proizvoljno parametrizovane regularne krive $\alpha = \alpha(t)$ iznose
$$\alpha' = vT,$$
$$\alpha'' = v'T + v^2\kappa N,$$
pri čemu smo koristili uopštenu Freneovu formulu $T' = v\kappa N$. Kako je Freneova baza ortonormirana, traženi intenzitet je
$$\|\alpha''\| = \sqrt{(v')^2 + v^4\kappa^2}.$$

(b) U slučaju prirodno parametrizovane krive, imamo da je brzina krive jedinična $v = 1$. Kada to ubacimo u prethodne relacije, dobijamo
$$\alpha' = T,$$
$$\alpha'' = \kappa N,$$
$$\|\alpha''\| = |\kappa|\|N\| = \kappa.$$