Geometrija 3, treći test 2012/13

Ime i prezime, broj indeksa, smer ______________________________

Data je površ $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sa $r(u,v) = (u, v, \frac{u^2-v^2}{2})$.

1) Odrediti Gausovu krivinu date površi. Ispitati koje su tačke eliptičke/hiperboličke/paraboličke/planarne/umbiličke.

Rešenje.

$$r_u = (1,0,u) \qquad r_v = (0,1,-v)$$

$$r_{uu} = (0,0,1) \quad r_{uv} = (0,0,0) \quad r_{vv} = (0,0,-1)$$

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-u, v, 1)$$

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + u^2 \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = -uv \quad G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + v^2$$

$$e = \langle n, r_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \quad f = \langle n, r_{uv} \rangle = 0 \quad g = \langle n, r_{vv} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

Kako je u svim tačkama površi $K < 0$, sve tačke na površi su hiperboličke. Umbiličke tačke su one u kojima su jednake glavne krivine. Prema tome, one se mogu naći samo među eliptičkim i planarnim tačkama, pa ne postoje na datoj površi. Umbiličke tačke se takođe karakterišu osobinom da su im proporcionalni redom odgovarajući koeficijenti prve i druge fundamentalne forme, pa se i tako može zaključiti da ne postoje na datoj površi.

2) Odrediti asimptotske pravce u tački $P = (0,0,0)$ koja pripada tragu površi, kao i sve asimptotske linije date površi. Odrediti glavne krivine i glavne pravce površi u tački P.

Rešenje. Asimptotski pravac $X = X_1 r_u + X_2 r_v$ zadovoljava $\mathrm{II}(X,X) = 0$, pa je

$$eX_1^2 + 2fX_1X_2 + gX_2^2 = 0.$$

Kako sve razmatramo u tački P, važi $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$, odakle dobijamo $X_2 = \pm X_1$ i konačno 2 asimptotska pravca $(1,1)$ i $(1,-1)$.
Kriva $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ je asimptotska ako i samo ako duž cele krive važi

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0.$$

Data diferencijalna jednačina svodi se na $u'^2 = v'^2$, tj. $u' = \pm v'$, odakle je $u = \pm v + C$ ($C = \text{const}$) i

$$\alpha(v) = \left(\pm v + C, v, \pm Cv + \frac{C^2}{2} \right), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Glavne krivine su sopstvene vrednosti matrice (sve računamo u tački P)

$$\mathrm{II} \cdot \mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 1$. U tački P važi $F = f = 0$, pa se lako dobija da su glavni pravci zapravo pravci koordinatnih linija $(1,0)$ i $(0,1)$. Jedan način da ih dobijemo je direktno, kao sopstvene vektore prethodne matrice koji odgovaraju sopstvenim vrednostima κ_1 i κ_2. Drugi način je kao rešenje jednačine

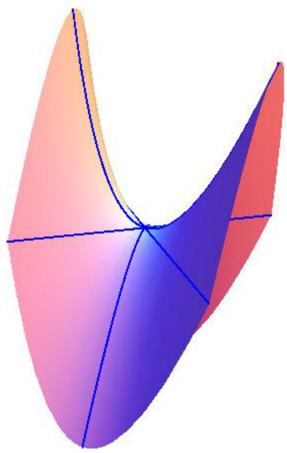
$$\begin{vmatrix} X_2^2 & -X_1X_2 & X_1^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle lako sledi $X_1 = 0$ ili $X_2 = 0$.

3) Odrediti krive na površi koje leže u normalnim sečenjima u dobijenim pravcima. Skicirati površ u okolini tačke P koristeći sve dobijene podatke.

Rešenje. Vektor normale u tački P iznosi $(0,0,1)$. Normalna sešenja u asimptotskim pravcima $(1,1)$ i $(1,-1)$ su redom prave α_1 i α_2 (koje su i asimptotske linije) čije su jednačine u karti $u = \pm v$:

$$\alpha_1(u) = (u, u, 0), \quad \alpha_2(u) = (u, -u, 0).$$



Normalna sešenja u glavnim pravcima $(1,0)$ i $(0,1)$ su redom parabole β_1 i β_2 čije su jednačine u karti redom $v = 0$, $u = 0$:

$$\beta_1(u) = \left(u, 0, \frac{u^2}{2}\right), \quad \beta_2(u) = \left(0, v, -\frac{v^2}{2}\right).$$

Tačka P je hiperbolička i parabole β_1 i β_2 su sa raznih strana tangentne ravni. Prave α_1 i α_2 predstavljaju presek površi i tangentne ravni u tački P i granicu duž koje površ prelazi sa jedne strane tangentne ravni na drugu.

Napomena. Data površ je hiperbolički paraboloid i predstavlja jedan od osnovnih primera površi čije su sve tačke hiperboličke.

4) Dokazati da je kriva $u + v = 2$ geodezijska linija, ali nije glavna linija (linija krivine). Odrediti najkraće rastojanje između tačaka $(1,1,0)$ i $(3,-1,4)$ koje pripadaju tragu površi.

Rešenje. Kriva data sa $u + v = 2$ je parametrizovana sa $\gamma(t) = (t, 2-t, 2t-2), t \in \mathbb{R}$, pa je u pitanju prava. Parametar t je proporcionalan prirodnom parametru i očigledno je $\gamma''(t) = (0,0,0)$, pa je $\kappa_g = 0$ i kriva je geodezijska. Prava linija na površi je uvek i geodezijska (naravno, na odgovarajući način parametrizovana) i asimptotska linija (sa proizvoljnom parametrizacijom).
Geodezijska linija u opštem slučaju ne mora da ostvaruje najmanje rastojanje između proizvoljne dve tačke koje spaja (ovo važi samo lokalno). Međutim, u našem slučaju kriva γ je prava koja sadrži date tačke $A(1,1,0)$ i $B(3,-1,4)$ i zaista ostvaruje najmanje (euklidsko) rastojanje između tih tačaka:

$$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Da bismo dokazali da kriva nije glavna linija, dovoljno je da dokažemo da u nekoj tački njen vektor brzine nije glavni vektor ili da kriva ne zadovoljava identički jednačinu glavnih linija. Duž krive γ važi

$$u' = 1, \qquad v' = -1,$$

$$E = 1 + t^2, \quad F = t^2 - 2t, \quad G = t^2 - 4t + 5,$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{2t^2 - 4t + 5}}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{1}{\sqrt{2t^2 - 4t + 5}}.$$

Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + t^2 & t^2 - 2t & t^2 - 4t + 5 \\ \frac{1}{\sqrt{2t^2-4t+5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2t^2-4t+5}} \end{vmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2t^2 - 4t + 5}} \not\equiv 0,$$

kriva γ nije glavna linija.