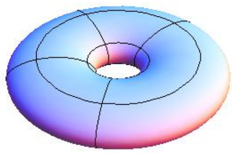
Geometrija 3, drugi test 2012/13

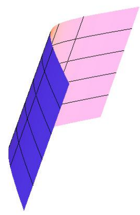
Ime i prezime, broj indeksa, smer ______________________________

1.

(a)



(c)



(d)

(a) Dokazati da ravan $x + 2y + 3z = 4$ predstavlja sliku elementarne površi i skicirati je sa koordinatnim linijama.

Rešenje. Datu ravan možemo videti kao sliku površi

$$r(y, z) = (4 - 2y - 3z, y, z), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2,$$

koja jeste elementarna površ jer predstavlja grafik glatke funkcije dve realne promenljive. Koordinatne linije su dve familije paralelnih pravih date sa

$$r(y, z_0) = (4 - 2y - 3z_0, y, z_0), \quad z_0 = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R},$$
$$r(y_0, z) = (4 - 2y_0 - 3, y_0, z), \quad y_0 = \text{const} \quad z \in \mathbb{R}.$$

(b) Dokazati da je skup rešenja jednačine $x^5 + \sin y + \operatorname{arctg} z = 2013$ lokalno slika elementarne površi. A globalno?

Rešenje. Neka je $f(x, y, z) = x^5 + \sin y + \operatorname{arctg} z - 2013$. Kako je

$$\nabla f(x, y, z) = \left(5x^4, \cos y, \frac{1}{1 + z^2}\right) \neq (0, 0, 0),$$

lokalno u okolini proizvoljne tačke možemo izraziti bilo koju promenljivu preko druge dve i na taj način dobiti lokalno grafik glatke funkcije. Međutim, u ovom konkretnom slučaju važi

$$x = \sqrt[5]{2013 - \sin y - \operatorname{arctg} z},$$

pa je skup rešenja jednačine globalno grafik glatke funkcije $F(y, z) = \sqrt[5]{2013 - \sin y - \operatorname{arctg} z}$. Dobijena površ jeste regularna, ali nije $1 - 1$, pa formalno nije elementarna površ.

(c) Skicirati sliku površi date parametrizacijom $f(u, v) = ((3 + 2\cos u)\cos v, (3 + 2\cos u)\sin v, \sin u)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, i koordinatne linije na njoj.

Rešenje. Data površ je eliptički torus dobijen rotacijom elipse $\frac{(x-3)^2}{4} + z^2 = 1$ uz $xz-$ravni oko $z-$ose. Koordinatne linije su elipse i krugovi (meridijani i paralele) redom dati sa

$$f(u, v_0) = ((3 + 2\cos u)\cos v_0, (3 + 2\cos u)\sin v_0, \sin u), \quad v_0 = \text{const}, \quad u \in (0, 2\pi),$$
$$f(u_0, v) = ((3 + 2\cos u_0)\cos v, (3 + 2\cos u_0)\sin v, \sin u_0), \quad u_0 = \text{const}, \quad v \in (0, 2\pi),$$

pri čemu formalno gledano nedostaje meridijan $v = 0$ i paralela $u = 0$.

(d) Odrediti parametrizaciju hiperboličkog cilindra čija je osnova hiperbola $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, a izvodnice su prave paralelne pravoj $x = 0$, $y = z$, i skicirati ga sa koordinatnim linijama.

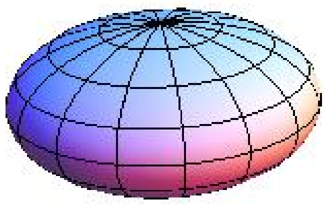
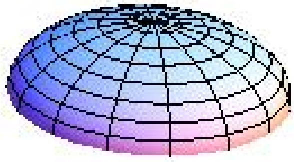
Rešenje. Hiperbolički cilindar je pravolinijska površ čija je osnova hiperbola $(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u, 0)$, a direktrise su prave određene vektorom $(0, 1, 1)$. Tražena parametrizacija je

$$g(u, v) = (\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u, 0) + v(0, 1, 1) = (\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u + v, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Koordinatne linije su hiperbole i prave, date sa

$$g(u, v_0) = (\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u + v_0, v_0), \quad v_0 = \text{const}, \quad u \in \mathbb{R},$$
$$g(u_0, v) = (\operatorname{ch} u_0, \operatorname{sh} u_0 + v, v), \quad u_0 = \text{const}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

2. Dat je skup tačaka $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\}$.

(a) Odrediti elementarnu površ $h : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ čija je slika maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja grafik glatke funkcije promenljivih x, y, kao i elementarnu površ $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ cija je slika maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja rotacionu površ oko $z-$ose. Koji je maksimalan podskup skupa $\mathcal{M}$ koji se može realizovati kao slika elementarne površi? Skicirati.

Rešenje. Dati skup tačaka $\mathcal{M}$ je elipsoid. Maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja grafik glatke funkcije promenljivih x, y je deo elipsoida iznad $xy-$ravni, tj. gde je $z > 0$ (ili ispod, tj. gde je $z < 0$), koji je parametrizovan sa

$$h(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}\right), \quad (x,y) \in \mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\}.$$

Maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja rotacionu površ oko $z-$ose je skup $\mathcal{M}$ bez poluelipse $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$, $x > 0$, u $xz-$ravni, koji je parametrizovan sa

$$r(u,v) = (2\cos u \cos v, 2\cos u \sin v, \sin u), \quad (u,v) \in \mathcal{U} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi).$$

Maksimalan podskup skupa $\mathcal{M}$ koji se može realizovati kao slika elementarne površi je skup $\mathcal{M}$ bez jedne proizvoljne tačke (recimo severnog pola $(0,0,1)$) i parametrizuje se pomoću stereografske projekcije, slično kao kod sfere.

(b) Odrediti formule koordinatnih transformacija $\Phi = h^{-1} \circ r : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}'$ i $\Psi : r^{-1} \circ h : \mathcal{V}' \to \mathcal{U}'$ između lokalnih koordinata $(u,v) \in \mathcal{U}' = r^{-1}(r(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{V}))$ i $(x,y) \in \mathcal{V}' = h^{-1}(r(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{V}))$. Da li su dobijena preslikavanja Φ i Ψ glatka?

Rešenje. Oznachimo Dekartove koordinate elipsoida sa (X,Y,Z). Kako je presek $\mathcal{M}'$ slika elementarnih površi h i r deo elipsoida iznad $XY-$ravni, bez polumeridijana u $XZ-$ravni, važi

$$\mathcal{M}' = r(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{V}) = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = 1,\ Z > 0\right\}$$
$$\setminus \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = 1,\ X > 0,\ Y = 0,\ Z > 0\right\}.$$

Delovi ravni $\mathbb{R}^2$ koji se slikaju na ovaj presek odgovarajućim preslikavanjima su $\mathcal{U}' = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ i $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x < 2\}$. Preslikavanja $h : \mathcal{U}' \to \mathcal{M}'$ i $r : \mathcal{V}' \to \mathcal{M}'$ su bijekcije i nihove inverzne funkcije su

$$(x,y) = h^{-1}(X,Y,Z) = (X,Y),$$
$$(u,v) = r^{-1}(X,Y,Z) = (\arcsin Z, \theta),$$

gde je $\theta \in (0, 2\pi)$ polarni ugao tačke sa Dekartovim koordinatama $(X,Y) \in \mathcal{V}'$.
Tražene formule koordinatnih transformacija $\Phi : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}'$ i $\Psi : \mathcal{V}' \to \mathcal{U}'$ su

$$\Phi(u,v) = (2\cos u \cos v, 2\cos u \sin v),$$

$$\Psi(x,y) = (\arcsin \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}, \theta),$$

gde je $\theta \in (0, 2\pi)$ polarni ugao tačke sa Dekartovim koordinatama $(x,y) \in \mathcal{V}'$. Očigledno dobijena preslikavanja jesu glatka na odgovarajućim domenima $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$.

(c) Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale u tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ slika ovih površi.

Rešenje. Jednačine tangentne ravni i normale ne zavise od parametrizacije, dok jedinični vektor normale može jedino promeniti znak pri promeni parametrizacije. Koristićemo parametrizaciju r (dela) elipsoida. Tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ odgovaraju vrednosti parametara $u = \frac{\pi}{6}$, $v = \frac{\pi}{2}$. Kako je

$$r_u = (-2\sin u \cos v, -2\sin u \sin v, \cos u),$$
$$r_v = (-2\cos u \sin v, 2\cos u \cos v, 0),$$
$$n = \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2 u}}(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -2\sin u),$$

vektor normale u tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ je $(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}})$. Jednačina tangentne ravni u tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ je

$$0 \cdot (x-0) + \sqrt{3} \cdot (y - \sqrt{3}) + 2 \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

tj. $\sqrt{3}y + 2z = 4$. Jednačina normale u tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ je

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{2}.$$

(d) Izračunati površinu skupa $\mathcal{M}$.

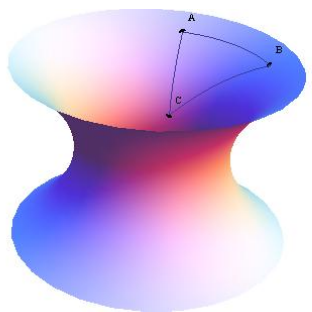
Rešenje. Opet ćemo koristiti parametrizaciju r jer je slika te površi skup $\mathcal{M}$ bez meridijana koji je mere nula i neće uticati na površinu. Koeficijenti prve forme površi r su $E = 1 + 3\sin^2 u$, $F = 0$, $G = 4\cos^2 u$, element površine je

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = 2\cos u\sqrt{1+3\sin^2 u}\, dudv,$$

pa je tražena površina

$$P = \iint_{\mathcal{U}} 2\cos u \sqrt{1+3\sin^2 u}\, dudv = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1+3\sin^2 u}\, du$$
$$= \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{z^2+1}dz = 16\pi + \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\ln(2+\sqrt{3}).$$

3. Katenoid je rotaciona površ čija se slika dobija rotacijom krive $\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, u $xz-$ravni, oko $z-$ose.



(a) Parametrizovati katenoid i dokazati da su dobijene lokalne koordinate u, v konformne.

Rešenje. Neka je u parametar profilne krive $\gamma(u) = (\operatorname{ch} u, 0, u)$ i v ugao za koji je zarotirana kriva u odnosu na početni položaj u $xz-$ravni. Tada je

$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u), \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$

regularna površ čija je slika katenoid bez jednog meridijana (bez profilne krive u $xz-$ravni). Važi $r_u = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, 1)$ i $r_v = (-\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, 0)$, koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = \operatorname{sh}^2 u + 1 = \operatorname{ch}^2 u,$$
$$F = \langle r_u, r_v \rangle = 0,$$
$$G = \langle r_v, r_v \rangle = \operatorname{ch}^2 u.$$

Kako je $E = G$ i $F = 0$, koordinate (u, v) su konformne koordinate. Prema tome, čuvaju se uglovi iz karte i prenose na sliku površi.

(b) Odrediti jednačine stranica krivolinijskog trougla na katenoidu određenog krivama čije su jednačine (u karti) $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$, $u + v = \frac{\pi}{2}$. Skicirati.

Rešenje. Jednačine stranica krivolinijskog trougla su

$$\begin{aligned}
AB:\ \gamma(v) &= r(1, v) = (\operatorname{ch} 1 \cos v, \operatorname{ch} 1 \sin v, 1), \quad v \in \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right], \\
AC:\ \beta(u) &= r\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = (0, \operatorname{ch} u, u), \quad u \in [0, 1], \\
BC:\ \alpha(t) &= r\left(t, \frac{\pi}{2} - t\right) = (\operatorname{ch} t \sin t, \operatorname{ch} t \cos t, t), \quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Duž AB je deo kružnice (paralele), duž AC je deo lančanice (meridijana), a duž BC predstavlja deo jedne od loksodroma na katenoidu.

(c) Izračunati obim i unutrašnje uglove datog trougla.

Rešenje. Vektori brzine krivih koje obrazuju stranice datog trougla su

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(v)\| &= \|(-\operatorname{ch} 1 \sin v, \operatorname{ch} 1 \cos v, 0)\| = \operatorname{ch} 1, \\
\|\beta'(u)\| &= \|(0, \operatorname{sh} u, 1)\| = \operatorname{ch} u, \\
\|\alpha'(t)\| &= \|(\operatorname{sh} t \sin t + \operatorname{ch} t \cos t, \operatorname{sh} t \cos t - \operatorname{ch} t \sin t, 1)\| = \sqrt{2} \operatorname{ch} t,
\end{aligned}$$

pa su dužine stranica datog trougla $\|AB\| = \operatorname{ch} 1$, $\|AC\| = \operatorname{ch} 1 - 1$, $\|BC\| = \sqrt{2}(\operatorname{ch} 1 - 1)$.
Kako se čuvaju uglovi iz karte, unutrašnji uglovi trougla ABC su $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

(d) Odrediti jednačinu simetrale najvećeg ugla datog trougla na katenoidu.

Rešenje. Tražena simetrala je zapravo simetrala pravog ugla kod temena A datog trougla na katenoidu. Njena jednačina u karti je takođe simetrala pravog ugla odgovarajućeg jednakokrako-pravouglog trougla iz karte, čija su temena $(1, \frac{\pi}{2} - 1)$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$, i glasi $v = u + \frac{\pi}{2} - 1$. Simetrala na katenoidu ima jednačinu

$$\eta(u) = (-\operatorname{ch} u \sin(u - 1), \operatorname{ch} u \cos(u - 1), u), \quad u \in \mathbb{R}.$$