Geometrija 3, jun 1, 27.05.2013.

Napomena. Studenti M, N smerova na pismenom ispitu radili su prvi, treći i peti zadatak. Studenti V, R, L smerova na ispitu su radili prvi zadatak (u slučaju prostorne krive, bez dela c)), drugi, treći zadatak (bez izometrije u delu b)) i četvrti zadatak.

1. Neka je α regularna ravanska kriva. Slika krive β sastoji od tačaka koje su na rastojanju d od odgovarajućih tačaka slike krive α duž normala krive α.

(a) Ispitati regularnost krive β. Ako je kriva α zatvorena, dokazati da se može odabrati dovoljno malo d tako da je kriva β regularna.

(b) Izraziti krivinu krive β preko krivine krive α i d.

(c) Ako je kriva α elipsa, opisati krive β za različite vrednosti d i skicirati ih.

Rešenje. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ regularna kriva. Zbog toga možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je kriva α parametrizovana prirodnim parametrom. Tada je kriva $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ data sa

$$\beta(s) = \alpha(s) + dN(s).$$

Kako je

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + dN'(s) = (1 - d\kappa(s))T(s)$$
$$\|\beta'(s)\| = |1 - d\kappa(s)|,$$

kriva je regularna u onim tačkama $s \in I$ u kojima je $\kappa(s) \neq \dfrac{1}{d}$. Ako je kriva α zatvorena, možemo uzeti $I = [a, b]$ i $\alpha(a) = \alpha(b)$. Kako je skup I kompaktan, neprekidna funkcija κ dostiže svoj minimum i maksimum na I. Neka je $|\kappa(s)| \leqslant K$ za sve $s \in [a, b]$. Tada je dovoljno odabrati $d < \dfrac{1}{K}$, recimo $d = \dfrac{1}{2K}$.
U slučaju da je kriva α prostorna kriva, dobija se

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + dN'(s) = (1 - d\kappa(s))T(s) + \tau(s)B(s)$$
$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{(1 - d\kappa(s))^2 + \tau^2(s)},$$

pa kriva α nije regularna jedino u onim tačkama $s \in I$ u kojima je $\kappa(s) = \dfrac{1}{d}$ i $\tau(s) = 0$ (recimo ako je ravanska i $\kappa(s) = \frac{1}{d}$).
Krivina krive β može računati po formuli $\kappa_\beta = \dfrac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}$. Kako je

$$\beta' = (1 - d\kappa)T(s) + \tau B,$$

$$\beta'' = -d\kappa' T + (\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')N + \tau' B,$$

dobijamo

$$\beta' \times \beta'' = (\tau^2\tau' + d\kappa^2\tau - \kappa\tau)T + (d\kappa\tau' - d\kappa'\tau - \tau')N + (1 - d\kappa)(\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')B,$$

pa je krivina krive β

$$\kappa_\beta = \frac{\sqrt{(\tau^2\tau' + d\kappa^2\tau - \kappa\tau)^2 + (d\kappa\tau' - d\kappa'\tau - \tau')^2 + (1 - d\kappa)^2(\kappa - d\kappa^2 - \tau\tau')^2}}{\sqrt{((1 - d\kappa)^2 + \tau^2)^3}}.$$

Ako je kriva α (a samim tim i β) ravanska, imamo $\tau = 0$, pa je

$$\kappa_\beta = \frac{\kappa}{|1 - d\kappa|}.$$

Ako je kriva α elipsa data parametrizacijom $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (t nije prirodni parametar), njena normala i krivina date su sa

$$N(t) = \Big(-\frac{b}{c}\cos t, -\frac{a}{c}\sin t\Big),$$

$$\kappa = \frac{ab}{c^3}, \quad c = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

Ovde je uzet smer normale tako da je Freneova baza $[T, N]$ pozitivno orijentisana. Parametrizacija krive β je

$$\beta(t) = \left(\left(a - \frac{db}{c}\right)\cos t, \left(b - \frac{da}{c}\right)\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Tačke u kojima kriva β nije regularna zadovoljavaju $d = \dfrac{c^3}{ab}$ i leže na krivoj parametrizovanoj sa

$$\gamma(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

koja zapravo predstavlja astroidu $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

Kriva β paralelna elipsi α na rastojanju $d > 0$ je elipsa za sve $d < \dfrac{a^2 - b^2}{a}$ i za sve $d > \dfrac{a^2 - b^2}{b}$, dok za ostale vrednosti parametra d ima neke od singulariteta - špiceve, samopreseke, tačke samododira itd. Za detalje i slike pogledati tekst i animaciju na stranici $http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_curve$.

2. Data je kriva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2\cos t)$. Odrediti ugao između $z-$ ose i rektifikacione ravni krive γ.

Rešenje. Rektifikaciona ravan krive γ je koordinatna ravan Freneovog repera razapeta vektorima tangente i binormale, pa joj je normalni vektor vektor N normale krive γ. Taj vektor se računa po formuli

$$N = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{||\gamma'|| \cdot ||\gamma' \times \gamma''||} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}(-\cos t, -5\sin t, -2\cos t).$$

Vektor $z-$ose je $k = (0, 0, 1)$. Ugao φ između $z-$ose i rektifikacione ravni se dobija kao $\varphi = |\frac{\pi}{2} - \measuredangle(N, k)|$.

$$\cos\measuredangle(N, k) = \frac{\langle N, k\rangle}{||N|| \cdot ||k||} = \frac{-\cos t}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

$$\sin\varphi = |\cos\measuredangle(N, k)| = \frac{|\cos t|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{|\cos t|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

3. Data je elementarna površ $r(u, v) = (u, \operatorname{ch} u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Skicirati datu površ i koordinatne linije. Izračunati glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.

(b) Dokazati da je data površ izometrična ravni. Odrediti krive (loksodrome) koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa koordinatnim linijama $v = \text{const}$.

(c) Dokazati da sve geodezijske linije na površi čine koordinatne linije, kao i krive date sa $v = A\operatorname{sh} u + B$, $A, B = \text{const}$, $A \neq 0$.

(d) Odrediti sve asimptotske i glavne linije na datoj površi.

Rešenje. Kako je $r(u, v) = (u, \operatorname{ch} u, 0) + v(0, 0, 1)$, data površ je linijska površ i predstavlja cilindar nad osnovom koja je lančanica $y = \operatorname{ch} x$ u $xy-$ravni, sa direktrisama paralelnim $z-$osi.

Koordinatne linije

$u-$parametarske krive $v = v_0 = \text{const}$ su lančanice u ravnima paralelnim $xy-$ravni, date sa $(u, \operatorname{ch} u, v_0)$, $u \in \mathbb{R}$.
$v-$parametarske krive $u = u_0 = \text{const}$ su prave paralelne $z-$osi, date sa $(u_0, \operatorname{ch} u_0, v)$, $v \in \mathbb{R}$.

$$r_u = (1, \operatorname{sh} u, 0) \qquad r_v = (0, 0, 1)$$

$$r_{uu} = (0, \operatorname{ch} u, 0) \qquad r_{uv} = r_{vv} = (0, 0, 0)$$

jedinična normala

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \left(\operatorname{th} u, -\frac{1}{\operatorname{ch} u}, 0\right)$$

koeficijenti prve fundamentalne forme

$$E = \operatorname{ch}^2 u \qquad F = 0 \qquad G = 1$$

koeficijenti druge fundamentalne forme

$$e = -1 \qquad f = g = 0$$

matrični zapis formi

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Glavne krivine date površi predstavljaju sopstvene vrednosti matrice

$$\mathrm{II} \cdot \mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i iznose $\kappa_1 = -\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}$, $\kappa_2 = 0$. **Gausova krivina** površi iznosi

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0,$$

a **srednja krivina** iznosi

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-1}{2\mathrm{ch}^2 u}.$$

Uspostavićemo izometriju između ravni $y = 0$ i date površi "savijajući" tu ravan na dati cilindar. Tačka sa koordinatama $(x, 0, z)$ slika se u tačku koja je na istoj visini z i na istom rastojanju x od $z-$ose, ali sada mereno duž lančanice $(u, \mathrm{ch}\, u, v)$. Zbog toga je

$$x = \int\limits_0^u \mathrm{ch}\, u du = \mathrm{sh}\, u,$$

pa je izometrija data sa

$$x = \mathrm{sh}\, u, \quad z = v.$$

Preciznije, ravan parametrizovana sa $(\mathrm{sh}\, u, 0, v)$ i data površ $(u, \mathrm{ch}\, u, v)$ imaju iste koeficijente prve fundamentalne forme i izometrične su. Kako izometrije, između ostalog, čuvaju i uglove, loksodrome na datoj površi dobijaju se kao slike krivih iz ravni koje zaklapaju konstantan oštar ugao φ sa pravama $z = \mathrm{const}$ u ravni $y = 0$, a to su prave $z = \mathrm{tg}\, \varphi \cdot x + C$, $C = \mathrm{const}$. Jednačina traženih loksodroma je

$$v = \mathrm{tg}\, \varphi \cdot \mathrm{sh}\, u + C, \quad C = \mathrm{const}.$$

Naravno, isti rezultat dobio bi se i računskim putem, slično kao u zadatku 2.8 a) sa vežbi (loksodrome na sferi). Geodezijske linije čuvaju se pri izometrijama, pa su geodezijske na datoj površi slike pravih (geodezijskih) iz ravni $z = Ax + B$. Njihove jednačine su

$$v = A\mathrm{sh}\, u + B, \qquad A, B = \mathrm{const}, \quad A \neq 0.$$

Ovde nedostaju slike pravih $x = \mathrm{const}$ i $z = \mathrm{const}$, a to su upravo koordinatne linije na datoj površi koje takođe jesu geodezijske. Opet, isti rezultat dobija se i primenjujući proceduru opisanu na vežbama, u rešenju zadatka 2.20 c).
kako je $F = f = 0$ i kako nema umbiličkih tačaka na datoj površi, jedine glavne linije na datoj površi su koordinatne linije.
Jednačina asimptotskih linija svodi se na $-u'^2 = 0$, odakle je $u = \mathrm{const}$. Jedine asimptotske linije na datoj površi su $v-$koordinatne linije (koje su prave).

4. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \dfrac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $B(\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{7}}{8})$, $C(2, \frac{\sqrt{7}}{2})$ i $D(2, \frac{5}{2})$. Odrediti tačku A tako da je četvorougao $ABCD$ Lambertov sa oštrim uglom u tački A i izračunati taj ugao. Odrediti središte duži CD.

Rešenje. Jednačina prave CD je $u = 2$. Prava BC je deo euklidskog kruga. Kako je ugao kod temena C prav, centar tog kruga mora pripadati (euklidskoj) pravoj BC (i naravno $u-$osi), pa je u pitanju (polu)krug

$$(u-2)^2 + v^2 = \frac{7}{4}, \quad v > 0.$$

Analogno, jednačina hiperboličke prave AD je zapravo jednačina euklidskog polukruga

$$(u-2)^2 + v^2 = \frac{25}{4}, \quad v > 0.$$

Ostaje da odredimo jednačinu prave AB. Prava AB je u euklidskom smislu polukrug koji mora biti normalan na polukrug određen pravom BC, zbog pravog ugla u temenu B. To znači da odgovarajući poluprečnici koji sadrže tačku B moraju biti normalni međusobno. Ako su $(c,0)$ euklidske koordinate centra polukruga AB, koristeći sličnosti trouglova (ili Pitagorinu teoremu ili nekako drugačije) dobijamo

$$\frac{\frac{9}{8}-c}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{2-\frac{9}{8}},$$

odakle je $c=0$. Prema tome, jednačina prave AB je

$$u^2 + v^2 = \frac{9}{4}, \quad v > 0.$$

Koordinate temena A dobijamo u preseku pravih AB i AD i iznose $A(0, \frac{3}{2})$, tj. tačka A se nalazi na $v-$osi.
Ugao kod temena A četvorougla $ABCD$ možemo računati i kao euklidski ugao između poluprečnika krugova AD i AB koji sadrže teme A. Taj ugao je ugao pravouglog trougla čije su katete $\frac{3}{2}$ i 2, naspram katete 2, pa je njegova mera $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.
Središte E duži CD ima koordinate $(2, t_0)$ i zadovoljava

$$\|CE\| = \int_{\frac{\sqrt{7}}{2}}^{t_0} \frac{1}{t} dt = \int_{t_0}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t} dt = \|DE\|.$$

Odavde je $2\ln t_0 = \ln \frac{5}{\sqrt{7}}$, pa je $t_0 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{7}}$. Središte duži CD je tačka $E(2, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{7}})$.

5. Data je regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli (minimalna površ), a Gausova krivina različita od nule u svim tačkama.

(a) Dokazati da u svakoj tački P date površi postoje tačno dva asimptotska pravca, pri čemu oni zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$ sa glavnim pravcima.

(b) Ako su v_P i w_P proizvoljna dva normalna jedinična tangentna vektora date površi u tački P, dokazati da važi $\mathtt{II}(v_P, v_P) = -\mathtt{II}(w_P, w_P)$.

(c) Dokazati da definicija minimalne površi ne zavisi od parametrizacije, iako srednja krivina zavisi.

Rešenje. Neka su κ_1 i κ_2 glavne krivine date površi u proizvoljnoj tački P, a e_1 i e_2 odgovarajući jedinični glavni pravci. Iz datih uslova zaključujemo da je $\kappa_1 = -\kappa_2$, kao i da su obe glavne krivine različite od nule. Odatle sledi da su glavne krivine suprotnog znaka, pa su sve tačke ovakve površi hiperboličke. Neka proizvoljan pravac tangentne ravni zaklapa orijentisan ugao φ sa glavnim pravcem e_1. Iz Ojlerove teoreme imamo da je normalna krivina površi duž tog pravca data formulom

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi.$$

Za asimptotski pravac važi $\kappa_n = 0$, odakle je

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 1.$$

Prema tome, $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$, što uz činjenicu da su glavni pravci medjusobno normalni daje deo (a) zadatka.
Neka jedinični tangentni vektor v_P zaklapa orijentisan ugao θ sa e_1. Tada w_P zaklapa ugao $\frac{\pi}{2}+\theta$ sa e_1. Iz Ojlerove teoreme imamo da su normalne krivine duž pravaca v_P i w_P redom

$$\kappa_v = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta,$$

$$\kappa_w = \kappa_1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \kappa_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \kappa_1 \sin^2\theta + \kappa_2 \cos^2\theta.$$

Tvrđenje (b) zadatka sledi iz činjenice da je $\mathtt{II}(v_P, v_P) = \kappa_v$ i $\mathtt{II}(w_P, w_P) = \kappa_w$, kao i $\kappa_1 = -\kappa_2$, $\kappa_v = -\kappa_w$.
Pri promeni parametrizacije površi, glavni pravci se menjaju, ali i dalje ostaju međusobno normalni tangentni vektori (možemo se ograničiti na jedinične). Kako su glavne krivine zapravo normalne krivine površi duž glavnih pravaca, a srednja krivina je njihov poluzbir, tvrđenje (c) odmah sledi iz dela (b).