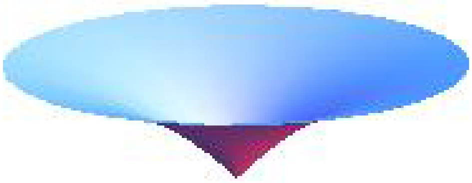
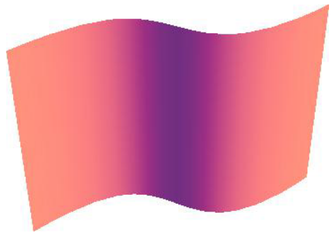
**Geometrija 3, drugi kolokvijum 2012.** **Prezime i ime, broj indeksa, grupa**

**1.** Skicirati sledeće površi i ispitati njihovu regularnost:

(a) $f(u,v) = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, u)$, $u \geq 0$, $v \in [-\pi, \pi]$; (b) $g(u,v) = (u, u^3, 2v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.



(a)



(b)

**Rešenje.**

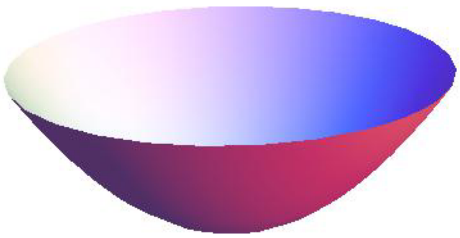
(a) Iz oblika same parametrizacije lako se zaključuje da je u pitanju rotaciona površ koja se dobija rotacijom krive $x = \operatorname{sh} z$, $z \geqslant 0$ u $xz-$ravni. Parametar $u$ predstavlja parametar profilne krive $(\operatorname{sh} u, 0, u)$, dok parametar $v \in [-\pi, \pi]$ označava ugao rotacije oko $z-$ose. Kako je $f_u = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, 1)$, $f_v = (-\operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, 0)$, $f_u \times f_v = (-\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u)$, to je $\|f_u \times f_v\| = \operatorname{sh} u \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 u}$. Kako je $\|f_u \times f_v\| = 0$ samo za $u = 0$, dobijamo da je površ regularna u svim tačkama osim za $u = 0$.

**Napomena.** U definiciji elementarne površi podrazumeva se otvoren skup $\mathcal{U}$ kome pripadaju parametri $(u, v)$. U prethodnom primeru najveći takav skup je $\mathcal{U} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ i $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ predstavlja regularnu parametrizaciju skupa iz dela (a), bez krive podudarne profilnoj, u levoj $xz-$poluravni (za $v = \pm\pi$), tj. bez krive $(-\operatorname{sh} u, 0, u)$.

(b) Kako je $g(u,v) = (u, u^3, 0) + v(0, 0, 2)$, u pitanju je pravolinijska površ koja predstavlja uniju pravih koje sadrže tačke krive $y = x^3$ u $xy-$ravni i čiji je vektor pravca vektor $(0, 0, 2)$, tj. paralelne su $z-$osi. Lako se dobija $g_u = (1, 3u^2, 0)$, $g_v = (0, 0, 2)$, $g_u \times g_v = (6u^2, -2, 0) \neq (0, 0, 0)$, pa je data parametrizacija regularna.

**2.** Površ je data jednačinom $f(u,v) = (2u \cos v, 2u \sin v, u^2)$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$. Izračunati:

(a) koeficijente I i II kvadratne forme;
(b) Gausovu, srednju i glavne krivine;
(c) ugao između krivih $u + v = 3$ i $u - v = 1$.



**Rešenje.** Data površ $f : \mathcal{U} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ je regularna parametrizacija dela paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$ kao rotacione površi. Ona se dobija rotacijom profilne krive koja prestavlja deo parabole $(2u, 0, u^2)$, $u > 0$, oko $z-$ose, gde je $v \in (0, 2\pi)$ ugao rotacije, čime smo prekrili sve osim jednog meridijana paraboloida.

(a)

$$f_u = (2\cos v, 2\sin v, 2u), \qquad f_v = (-2u \sin v, 2u \cos v, 0)$$

$$f_{uu} = (0, 0, 2), \qquad f_{uv} = (-2\sin v, 2\cos v, 0), \qquad f_{vv} = (-2u \cos v, -2u \sin v, 0)$$

$$f_u \times f_v = (-4u^2 \cos v, -4u^2 \sin v, 4u)$$

**normala**

$$n = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \left( -\frac{u}{u^2+1} \cos v, -\frac{u}{u^2+1} \sin v, \frac{1}{u^2+1} \right)$$

**koeficijenti prve fundamentalne forme**

$$E = \langle f_u, f_u\rangle = 4(u^2+1)$$
$$F = \langle f_u, f_v\rangle = 0$$
$$G = \langle f_v, f_v\rangle = 4u^2$$

**koeficijenti druge fundamentalne forme**

$$e = \langle n, f_{uu}\rangle = \frac{2}{u^2+1}$$
$$f = \langle n, f_{uv}\rangle = 0$$
$$g = \langle n, f_{vv}\rangle = \frac{2u^2}{u^2+1}$$

**matrični zapis**

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 4(u^2+1) & 0 \\ 0 & 4u^2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{2u^2}{u^2+1} \end{pmatrix}$$

(b) **Gausova krivina**

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{1}{4(u^2+1)^3}$$

**srednja krivina**

$$H = \frac{Eg+eG-2Ff}{2(EG-F^2)} = \frac{u^2+2}{4(u^2+1)^2}$$

**glavne krivine**

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$
$$\kappa_{1,2} = \frac{(u^2+2)\pm u^2}{4(u^2+1)^2}$$
$$\kappa_1 = \frac{1}{2(u^2+1)^2} \qquad \kappa_2 = \frac{1}{2(u^2+1)}$$

Naravno, glavne krivine moguće je izračunati i kao sopstvene vrednosti matrice

$$\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{2u^2}{u^2+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4(u^2+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(u^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(u^2+1)} \end{pmatrix}.$$

(c) Krive $u+v=3$ i $u-v=1$ predstavljaju prave u karti $\mathcal{U}$, parametrizovane sa $\widetilde{\alpha}(u) = (u, 3-u)$ i $\widetilde{\beta}(v) = (v+1, v)$, koje se seku u tački $(2,1)$. Odgovarajuće krive na paraboloidu su $\alpha(u) = f(\widetilde{\alpha}(u))$ i $\beta(v) = f(\widetilde{\beta}(v))$. Neka je $\varphi$ traženi ugao između krivih $\alpha$ i $\beta$. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{\langle\alpha'(2), \beta'(1)\rangle}{\|\alpha'(2)\|\cdot\|\beta'(1)\|} = \frac{\langle\alpha'(2), \beta'(1)\rangle}{\sqrt{\langle\alpha'(2), \alpha'(2)\rangle}\cdot\sqrt{\langle\beta'(1), \beta'(1)\rangle}},$$

$$\langle\alpha'(2), \beta'(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4,$$

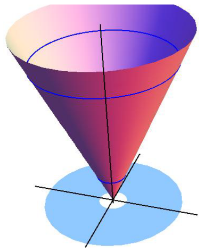
$$\langle\alpha'(2), \alpha'(2)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 36,$$

$$\langle\beta'(1), \beta'(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 36,$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}} = \frac{1}{9},$$
$$\varphi = \arccos\frac{1}{9}.$$

**3.** Izračunati površinu površi $z = \sqrt{5(x^2+y^2)}$ između ravni $z=1$ i $z=5$. Izračunati geodezijsku i normalnu krivinu krive u preseku površi i ravni $z=5$.



**Rešenje.** Data površ je gornja polovina konusa. Ovaj skup tačaka, bez jedne izvodnice konusa, možemo videti kao sliku elementarne površi $r(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{5}\rho)$, $(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)$. Iz

$$r_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{5}), \qquad r_\theta = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0),$$

lako dobijamo normalu površi

$$n = \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\cos\theta, -\sqrt{\frac{5}{6}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

kao i matricu prve fundamentalne forme

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Presek ravni $z=1$, odnosno $z=5$ sa konusom su kružnice čije su projekcije na $xy-$ravan date sa $\rho = \frac{\sqrt{5}}{5}$, odnosno $\rho = \sqrt{5}$. Deo površi izmedju ravni $z=1$ i $z=5$ u karti predstavlja kružni prsten $\mathcal{D}$ između pomenutih kružnica, pa je tražena površina

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG-F^2}\,d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{6}\rho\,d\rho d\theta \\ &= \sqrt{6}\pi\rho^2\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\sqrt{5}} \\ &= \frac{24\sqrt{6}\pi}{5}.\end{aligned}$$

Presek ravni $z=5$ sa konusom je kružnica $\gamma(\theta) = (\sqrt{5}\cos\theta, \sqrt{5}\sin\theta, 5)$, $\theta\in(0,2\pi)$. Njena prirodna parametrizacija je $\gamma(s) = \left(\sqrt{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}, 5\right)$, $s\in(0,2\sqrt{5}\pi)$. Vektori brzine i ubrzanja su

$$\gamma'(s) = T(s) = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \cos\frac{s}{\sqrt{5}}, 0\right),$$
$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

Duž krive $\gamma$ $(s=\sqrt{5}\theta)$ vektori $n$, $T$ i $n\times T$ čine ortonormiranu bazu ($T$ je tangentni vektor), pri čemu je

$$\gamma'' = \kappa_n n + \kappa_g (n\times T).$$

Normalna krivina krive $\gamma$ iznosi

$$\kappa_n = \langle \gamma'', n\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

dok je geodezijska krivina

$$\kappa_g = \langle \gamma'', n\times T\rangle = [n,\gamma',\gamma''] = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Kako je "obična" krivina krive $\gamma$ jednaka $\frac{1}{\sqrt{5}}$, lako se proveri da zaista važi veza između krivina

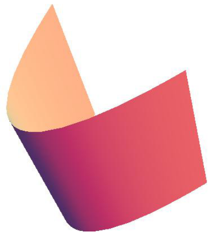
$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

**Napomena.** Kriva $\gamma$ iz zadatka, kao i svaka paralela na konusu, nije ni asimptotska ni geodezijska linija. Izvodnice konusa su, pak, i geodezijske i asimptotske linije.

**4.** Dokazati da na paraboličkom cilindru $r(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)$ važi:

(a) $v$ – parametarske linije su geodezijske;

(b) prirodno parametrizovana $u$ – parametarska linija $\alpha(s) = r(u(s), v_0)$ je geodezijska ako je $u'^2(1+u^2) = \text{const}$.



**Rešenje.** Parabolički cilindar $r(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)$ je pravolinijska površ koja se dobija od parabole $y = \frac{x^2}{2}$ u $xy-$ravni, sa generatrisama paralelnim $z-$osi. Koeficijenti prve fundamentalne forme ove površi su $E = 1+u^2$, $F = 0$, $G = 1$. Koristeći formule

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)},$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)},$$

tj. u skraćenom obliku

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{-G_u}{2E},$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{-E_v}{2G}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{2G},$$

dobijamo da je samo jedan Kristofelov simbol različit od nule $\Gamma^1_{11} = \dfrac{u}{1+u^2}$.
Kriva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = \gamma(s)$ je geodezijska na elementarnoj površi $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ akko funkcije $u = u(s)$ i $v = v(s)$ date sa $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina

$$u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0,$$
$$v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0.$$

U slučaju površi date u zadatku, sistem se svodi na samo jednu diferencijalnu jednačinu

$$u'' + \frac{u}{1+u^2}(u')^2 = 0. \tag{1}$$

Nije teško pokazati da je potreban uslov da bi kriva $\gamma(s)$ bila geodezijska da parametar $s$ bude proporcionalan prirodnom parametru.

(a) $v-$parametarske linije $u = u_0 = \text{const}$ su prave $\beta(v) = (u_0, \frac{u_0^2}{2}, v)$, $v \in \mathbb{R}$. Očigledno je parametar $v$ ovih krivih ujedno i prirodni parametar i važi $v' = 1$, $u' = u'' = 0$, pa je jednačina (1) zadovoljena.

**Napomena.** Svaka prava koja leži na nekoj površi je geodezijska na toj površi, posmatrana sa odgovarajućom parametrizacijom.

(b) $u-$parametarske linije $v = v_0 = \text{const}$ su parabole $\alpha(s) = r(u(s), v_0) = (u(s), \frac{u^2(s)}{2}, v_0)$ koje leže u ravnima paralelnim $xy-$ravni. Jednačina (1) je ekvivalentna jednačini $(1+u^2)u'' + u(u')^2 = 0$, pa dobijamo

$$(u'^2(1+u^2))' = 2u'u''(1+u^2) + 2u(u')^3 = 2u'((1+u^2)u'' + u(u')^2) = 0,$$

odakle sledi zaključak $u'^2(1+u^2) = \text{const}$.

**Napomena.** Uslov $u'^2(1+u^2) = \text{const}$ važi čim je kriva $\alpha(s) = r(u(s), v_0)$ prirodno parametrizovana, nezavisno od toga što je geodezijska. Međutim, mi smo upravo pokazali da isti zaključak važi i za sve odgovarajuće parametrizovane geodezijske linije na površi $r$ (a ne samo za one parametrizovane prirodnim parametrom).

**5.** Data je površ $r(u,v) = (3u\cos v, 3u\sin v, v)$, $u > 0$, $v \in (-\pi,\pi)$.

(a) Odrediti asimptotske linije.

(b) Dokazati da su linije krivine date sa $v = \pm\ln(3u + \sqrt{9u^2+1}) + \text{const}$.

**Rešenje.** Površ $r : (0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$ data sa

$$r(u,v) = (3u\cos v, 3u\sin v, v) = (0,0,v) + u(3\cos v, 3\sin v, 0)$$

je beskonačni helikoid. Koeficijenti prve i druge fundamentalne forme dati su sledećim matricama

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9u^2+1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{\sqrt{9u^2+1}} \\ \frac{-3}{\sqrt{9u^2+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Kako su koeficijenti druge fundamentalne forme $e = g = 0$, $f \neq 0$, jedine asimptotske krive su koordinatne krive (zadatak sa vežbi). Naime, jednačina

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0$$

asimptotskih linija $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ na površi svodi se na

$$fu'v' = 0,$$

odakle je $u' = 0$ ili $v' = 0$, tj. $u = \text{const}$ ili $v = \text{const}$.

(b) Iz uslova

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

koji zadovoljavaju glavne linije $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ na površi, dobijamo diferencijalnu jednačinu čija su ona rešenja

$$9(u')^2 = (9u^2+1)(v')^2. \tag{2}$$

Stavljajući $u = s$, tj. $v = v(u)$, ovu jednačinu možemo eksplicitno rešiti po $v$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 &= \frac{9}{9u^2+1}, \\ \frac{dv}{du} &= \pm\frac{3}{\sqrt{9u^2+1}}, \\ v &= \pm\int \frac{3}{\sqrt{9u^2+1}}du, \\ v &= \pm\ln(3u + \sqrt{9u^2+1}) + \text{const}. \end{aligned}$$

Naravno, dovoljno je samo zamenom proveriti da data rešenja u tekstu zadatka zadovoljavaju jednačinu (2).