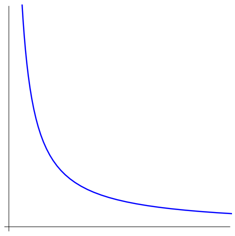
Geometrija 3, prvi kolokvijum 2012. **Prezime i ime, broj indeksa, grupa**

Rešenja

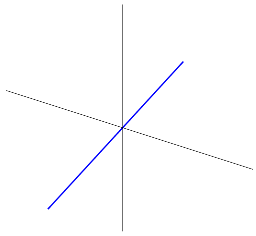
1. Skicirati sledeće krive i ispitati njihovu regularnost ($t \in \mathbb{R}$):

(a) $\alpha(t) = (e^t, e^{-t})$; (b) $\beta(t) = (0, t^3, 0)$; (c) $\gamma(t) = (3\sin t, 3\cos t, t)$.

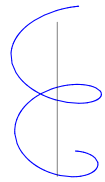
Rešenje.



(a)



(b)



(c)

(a) Kako $e^t \in (0, +\infty)$ za $t \in \mathbb{R}$ i $e^t \cdot e^{-t} = 1$, u pitanju je desna grana hiperbole $y = \frac{1}{x}$ u ravni $\mathbb{R}^2$.
Kako je $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t})$, kriva je regularna u svim tačkama.

(b) Kako $t^3 \in \mathbb{R}$ za $t \in \mathbb{R}$, u pitanju je cela $y-$osa prostora $\mathbb{R}^3$.
Kako je $\beta'(t) = (0, 3t^2, 0)$, kriva je regularna u svim tačkama osim u $t = 0$.

(c) Data kriva je levi heliks (zbog obrnute parametrizacije kružnice u projekciji), koji leži na standardnom cilindru poluprečnika 3.
Kako je $\gamma'(t) = (3\cos t, -3\sin t, 1)$, kriva je regularna u svim tačkama.

2. Data je kriva α svojom parametrizacijom $\alpha(t) = a\big(\sin t, \cos t + \ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})\big)$, $t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$, $a > 0$.

(a) Dokazati da je rastojanje između proizvoljne tačke ove krive i preseka sa $y-$osom tangente u toj tački konstantno.

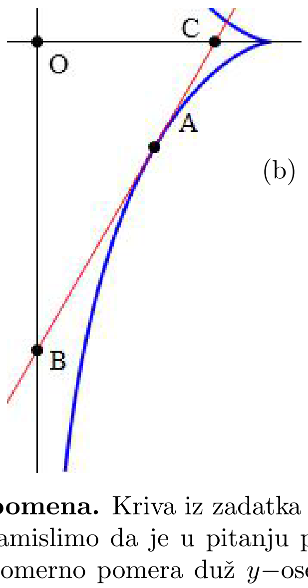
(b) Dokazati da parametar t predstavlja ugao između tangentnog vektora u proizvoljnoj tački krive i $y-$ose.

Rešenje.

(a) Vektor brzine krive je $\alpha'(t) = a(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}) = a(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t})$, pa se za vektor pravca tangente u proizvoljnoj tački može uzeti vektor $(\sin t, \cos t)$. Jednačina tangente u proizvoljnoj tački $A\big(a\sin t, a\cos t + a\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})\big)$ je

$$\frac{x - a\sin t}{\sin t} = \frac{y - a\cos t - a\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})}{\cos t}.$$

Presečnu tačku sa $y-$osom dobijamo za $x = 0$: $B(0, a\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}))$. Dužina duži AB jednaka je intenzitetu vektora $\overrightarrow{BA} = (a\sin t, a\cos t)$ i iznosi a, nezavisno od toga koja je vrednost parametra $t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

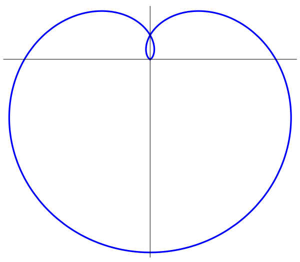


(b) Kako je vektor pravca tangente $(\sin t, \cos t)$, tvrđenje je očigledno. Može se i direktno izračunati ugao ψ između ovog vektora i vektora pravca $y-$ose $(0,1)$: $\cos\psi = \frac{<(\sin t, \cos t),(0,1)>}{\|(\sin t, \cos t)\| \cdot \|(0,1)\|} = \cos t \implies \psi = t$ (uglovi su iz intervala $(0, \frac{\pi}{2})$). Takodje, ugao ψ može se dobiti i kao oštar trougla OBC, gde je C presečna tačka tangente sa $x-$osom: $C(-a\operatorname{tg} t \ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}), 0)$, a O koordinatni početak.

Napomena. Kriva iz zadatka zove se **traktrisa** (ili pseća kriva). Dobija se kao trag koji opisuje jedan kraj štapa dužine a (zamislimo da je u pitanju pas na povodcu), koji je na početku u tački $(a, 0)$, dok se drugi kraj štapa (vlasnik psa) ravnomerno pomera duž $y-$ose, iz koordinatnog početka. Za $t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ dobija se donja grana krive, dok za $t \in (0, \pi)$ cela kriva (koja ima špic za $t = \frac{\pi}{2}$ i u toj tački nije regularna). U literaturi se može susresti i situacija u kojoj $x-$ i $y-$koordinata zamene mesta. Tada je parametar najčešće ugao između tangente i pozitivnog kraja $x-$ ose.

3. Izračunati dužinu krive date svojom polarnom parametrizacijom $\rho(\theta) = a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$, $a > 0$, $\theta \in [0, 3\pi]$.

Rešenje. Koristićemo formulu za dužinu luka krive zadate u polarnom obliku:

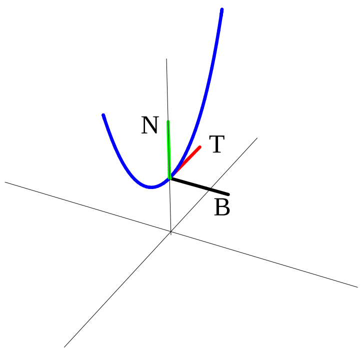


$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta = \int_0^{3\pi} \sqrt{\left(a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2 + \left(a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2} d\theta$$
$$= a\int_0^{3\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right) d\theta = \frac{3a\pi}{2}.$$

Napomena. Iz periodičnosti funkcija koje učestvuju u parametrizaciji krive jasno je da je u pitanju zatvorena kriva, kao i da za $\theta \in [0, 3\pi]$ upravo dobijamo celu njenu dužinu.

4. Neka je α kriva data svojom parametrizacijom $\alpha(t) = (0, t, \operatorname{ch} t)$, $t \in \mathbb{R}$. Odrediti prirodnu parametrizaciju, Freneov reper, krivinu i torziju krive α. Skicirati krivu i na njoj reper u tački $(0, 0, 1)$.
(Pomoć: $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.)

Rešenje.



Kriva predstavlja **lančanicu** $z = \operatorname{ch} y$ u $yz-$ravni.
Koristeći standardne formule, nakon kraćeg računa dobijamo:

- vektor brzine i brzina: $\alpha'(t) = (0, 1, \operatorname{sh} t)$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$;
- funkcija dužine luka: $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\alpha'(t)\|dt = \int_0^t \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t \Longrightarrow t = \operatorname{arsh} s$;
- prirodna parametrizacija: $\alpha(s) = (0, \operatorname{arsh} s, \operatorname{ch}(\operatorname{sh} s)) = (0, \operatorname{arsh} s, \sqrt{1+s^2})$, $s \in \mathbb{R}$;
- tangentni vektor: $T(s) = \alpha'(s) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$, $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(0, \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \operatorname{th} t\right)$;
- krivina: $\alpha''(s) = \left(0, \frac{-s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$, $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{1+s^2}$, $\kappa(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$;
- normalni vektor: $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \left(0, \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$, $N(t) = \left(0, -\operatorname{th} t, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$;
- binormalni vektor: $B(s) = T(s) \times N(s) = (1, 0, 0) = B(t)$;
- torzija: $\tau \equiv 0$ (kriva je ravanska, a dobija se i direktno iz formule).

U tački $(0, 0, 1)$ (za $t = s = 0$) dobijamo $T = (0, 1, 0)$, $N = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$.

5. (a) Dokazati da za regularnu krivu ($\kappa \neq 0$) parametrizovanu prirodnim parametrom važi $\|N'\|^2 = \|T'\|^2 + \|B'\|^2$.

(b) Normalna ravan u proizvoljnoj tački regularne krive je ravan koja sadrži tu tačku i normalna je na tangentni vektor T. Dokazati da normalne ravni proizvoljne regularne sferne krive seku sferu po velikim krugovima.

Rešenje.

(a) Koristeći Freneove formule i činjenicu da je Freneova baza ortonormirana, lako dobijamo:

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \|\kappa N\| = |\kappa|\|N\| = \kappa\\ \|N'\| &= \|-\kappa T + \tau B\| = \sqrt{<-\kappa T + \tau B, -\kappa T + \tau B>} = \sqrt{(-\kappa)^2 + \tau^2} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\\ \|B'\| &= \|-\tau N\| = |-\tau|\|N\| = |\tau|,\end{aligned}$$

odakle sledi tražena formula.

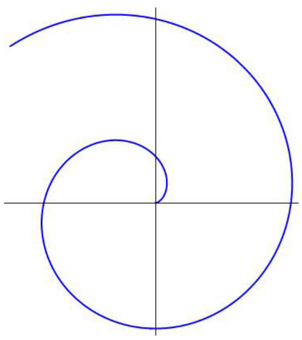
(b) Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ sferna kriva parametrizovana prirodnim parametrom s (što možemo pretpostaviti bez umanjenja opštosti jer je kriva regularna). Ako je C centar krive, a r poluprečnik, važi $\|\alpha(s) - C\| = r$, tj. $<\alpha(s) - C, \alpha(s) - C>= r^2$. Diferenciranjem (po s) poslednjeg izraza, dobijamo $< T(s), \alpha(s) - C > + < \alpha(s) - C, T(s) >= 0$, tj. $< T(s), \alpha(s) - C >= 0$. Prema tome, vektor $\alpha(s) - C$ je normalan na vektor $T(s)$, pa pripada normalnoj ravni krive u tački $\alpha(s)$. Odatle sledi da centar C sfere pripada normalnoj ravni, što znači da je presek normalne ravni i sfere veliki krug.

6. Odrediti parametrizaciju ravanske krive (do na izometriju prostora $\mathbb{E}^2$) čija je krivina (s je prirodni parametar) $\kappa(s) = \dfrac{1}{2\sqrt{s}}$.

Rešenje. Uzećemo $s_0 = 0$, pa je $\theta(s) = \int\limits_0^s \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{s}$ i $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, pri čemu je

$$x(s) = \int\limits_0^s \cos\sqrt{t}dt, \qquad y(s) = \int\limits_0^s \sin\sqrt{t}dt.$$

Nakon smene $z = \sqrt{t}$, primenom parcijalne integracije dobijamo:



$$x(s) = 2\int\limits_0^{\sqrt{s}} z\cos z dz = 2(\sqrt{s}\sin\sqrt{s} + \cos\sqrt{s} - 1),$$

$$y(s) = 2\int\limits_0^{\sqrt{s}} z\sin z dz = 2(\sin\sqrt{s} - \sqrt{s}\cos\sqrt{s}).$$

Jedna moguća parametrizacija je $\alpha(s) = (2(\sqrt{s}\sin\sqrt{s} + \cos\sqrt{s} - 1), 2(\sin\sqrt{s} - \sqrt{s}\cos\sqrt{s}))$.

Napomena. Kriva iz zadatka je reparametrizacija tzv. **kružne involute**. Ova kriva je standardno parametrizovana sa $a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dobija se kao trag koji opisuje slobodan kraj štapa promenljive dužine čiji se jedan kraj pomera po kružnici poluprečnika a, u svakom trenutku postavljen u pravcu tangentnog vektora, dužine $s(t)$, gde je $s(t)$ dužina luka kružnice merena od $t = 0$ do tekuće tačke. Na ovaj način se uvek od postojeće krive može dobiti nova kriva.