Geometrija 3, 29.05.2011. Ime i prezime, broj indeksa, grupa

1. Data je površ parametrizacijom $r(u,v) = (\sqrt{5}\cos u\cos v + 3\cos v, \sqrt{5}\cos u\sin v + 3\sin v, \sqrt{5}\sin u)$, $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$.

(a) Odrediti koeficijente prve, druge fundamentalne forme i Kristofelove simbole površi r.

Rešenje.

$$\begin{aligned} r_u &= (-\sqrt{5}\sin u\cos v, -\sqrt{5}\sin u\sin v, \sqrt{5}\cos u) \\ r_v &= (-(\sqrt{5}\cos u + 3)\sin v, (\sqrt{5}\cos u + 3)\cos v, 0) \\ r_u \times r_v &= (-\sqrt{5}(\sqrt{5}\cos u + 3)\cos u\cos v, -\sqrt{5}(\sqrt{5}\cos u + 3)\cos u\sin v, -\sqrt{5}(\sqrt{5}\cos u + 3)\sin u) \end{aligned}$$

jedinična normala

$$n = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

koeficijenti prve fundamentalne forme

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u\rangle = 5 \\ F &= \langle r_u, r_v\rangle = 0 \\ G &= \langle r_v, r_v\rangle = (\sqrt{5}\cos u + 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (-\sqrt{5}\cos u\cos v, -\sqrt{5}\cos u\sin v, -\sqrt{5}\sin u) \\ r_{uv} &= (\sqrt{5}\sin u\sin v, -\sqrt{5}\sin u\cos v, 0) \\ r_{vv} &= (-(\sqrt{5}\cos u + 3)\cos v, -(\sqrt{5}\cos u + 3)\sin v, 0) \end{aligned}$$

koeficijenti druge fundamentalne forme

$$\begin{aligned} e &= \langle n, r_{uu}\rangle = \sqrt{5} \\ f &= \langle n, r_{uv}\rangle = 0 \\ g &= \langle n, r_{vv}\rangle = (\sqrt{5}\cos u + 3)\cos u \end{aligned}$$

matrice fundamentalnih formi

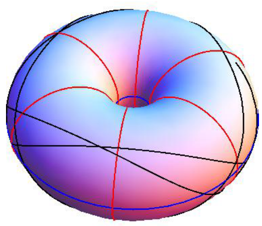
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}\cos u + 3)^2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}\cos u + 3)\cos u \end{pmatrix}$$

Kako je $F = 0$, $E_u = E_v = 0$, $G_v = 0$, lako računamo **Kristofelove simbole** date površi:

$$\Gamma^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^1_{12} = 0, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}\cos u + 3)\sin u,$$

$$\Gamma^2_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{-\sqrt{5}\sin u}{\sqrt{5}\cos u + 3}, \qquad \Gamma^2_{22} = 0.$$

(b) Skicirati površ r i odrediti Gausovu, srednju i glavne krivine.



Rešenje. Iz oblika parametrizacije površi

$$r(u,v) = ((\sqrt{5}\cos u + 3)\cos v, (\sqrt{5}\cos u + 3)\sin v, \sqrt{5}\sin u)$$

jasno je da je u pitanju torus parametrizovan kao rotaciona površ; njegova slika se dobija rotacijom oko $z-$ose kružnice poluprečnika $\sqrt{5}$, sa centrom u tački 3 $x-$ose u $xz-$ravni. Parametar $u \in (0,2\pi)$ je parametar profilne kružnice i predstavlja ugao između posmatrane tačke i pozitivnog dela $x-$ose, dok je parametar $v \in (0,2\pi)$ ugao

za koji je zarotirana posmatrana tačka u odnosu na odgovarajuću tačku profilne kružnice.
Glavne krivine date površi predstavljaju sopstvene vrednosti matrice

$$\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}\cos u+3)\cos u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sqrt{5}\cos u+3)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{\sqrt{5}\cos u+3} \end{pmatrix}$$

i iznose $\kappa_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\kappa_2 = \dfrac{\cos u}{\sqrt{5}\cos u+3}$. Gausova krivina površi je

$$K = \kappa_1\cdot\kappa_2 = \frac{\sqrt{5}\cos u}{5(\sqrt{5}\cos u+3)},$$

a srednja krivina

$$H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{10\cos u+3\sqrt{5}}{10(\sqrt{5}\cos u+3)}.$$

Naravno, moguće je prvo izračunati Gausovu i srednju krivinu koristeći formule

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}, \qquad H = \frac{Eg+eG-2Ff}{2(EG-F^2)},$$

a onda glavne krivine kao rešenja kvadratne jednačine

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0.$$

(c) Izračunati geodezijske krivine koordinatnih linija. Da li su neke od njih geodezijske linije?

Rešenje. Koordinatne linije ovako parametrizovanog torusa su kružnice. Preciznije, $u-$parametarske krive date sa $v = v_0 \in (0, 2\pi)$ su meridijani

$$\alpha(u) = ((\sqrt{5}\cos u+3)\cos v_0, (\sqrt{5}\cos u+3)\sin v_0, \sqrt{5}\sin u), \quad u \in (0,2\pi),$$

dok su $v-$parametarske krive date sa $u = u_0 \in (0, 2\pi)$ paralele

$$\beta(v) = ((\sqrt{5}\cos u_0+3)\cos v, (\sqrt{5}\cos u_0+3)\sin v, \sqrt{5}\sin u_0), \quad v \in (0,2\pi).$$

Slika površi r je torus bez jednog meridijana i bez jedne paralela, zbog $(u, v) \in (0, 2\pi)\times(0, 2\pi)$. Da bismo izračunali geodezijsku krivinu koordinatnih linija, potrebno je da ih prirodno parametrizujemo. Prirodni parametar meridijana dat je sa $s = \sqrt{5}u$, tj.

$$\alpha(s) = \left((\sqrt{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+3)\cos v_0, (\sqrt{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+3)\sin v_0, \sqrt{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \quad s \in (0, 2\sqrt{5}\pi),$$

dok je prirodni parametar paralela dat sa $t = (\sqrt{5}\cos u_0 + 3)v$, tj.

$$\beta(t) = \left((\sqrt{5}\cos u_0+3)\cos\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, (\sqrt{5}\cos u_0+3)\sin\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, \sqrt{5}\sin u_0\right), \quad t \in (0, 2(\sqrt{5}\cos u_0+3)\pi).$$

Vektori brzine i ubrzanja meridijana iznose

$$\alpha'(s) = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\cos v_0, -\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\sin v_0, \cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right),$$
$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\cos v_0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\sin v_0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right),$$

dok je vektor normale površi duž meridijana

$$n(s) = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\cos v_0, -\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\sin v_0, -\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right).$$

Geodezijska krivina meridijana iznosi

$$(\kappa_g)_{v=v_0} = [n(s), \alpha'(s), \alpha''(s)] = 0.$$

Naravno, ovo smo i očekivali jer su svi meridijani geodezijske linije na svakoj rotacionoj površi, pa i na datoj površi r.
Vektori brzine i ubrzanja paralela iznose

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \left(-\sin\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, \cos\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, 0\right),\\ \beta''(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}\cos u_0+3}\cos\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, -\frac{1}{\sqrt{5}\cos u_0+3}\sin\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, 0\right),\end{aligned}$$

dok je vektor normale površi duž paralela

$$n(t) = \left(-\cos u_0\cos\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, -\cos u_0\sin\frac{t}{\sqrt{5}\cos u_0+3}, -\sin u_0\right).$$

Geodezijska krivina paralela iznosi

$$(\kappa_g)_{u=u_0} = [n(t), \alpha'(t), \alpha''(t)] = \frac{-\sin u_0}{\sqrt{5}\cos u_0+3}.$$

Među paralelama su geodezijske one za koje $(\kappa_g)_{u=u_0} = 0$, što je ekvivalentno uslovu $\sin u_0 = 0$, tj. $u_0 = 0$ ili $u_0 = \pi$. U pitanju su naravno najmanja i najveća kružnica među paralelama, tj. najbliža i najdalja koordinatnom početku. Ovo je jasno i geometrijski jer jedino one leže u tzv. normalnom sečenju (kolinearni su vektori normale ovih krivih i vektori normale torusa duž njih).
Napomena. Može se dokazati da za geodezijsku krivinu proizvoljno parametrizovane krive γ na površi važi formula

$$\kappa_g = \frac{[n, \gamma', \gamma'']}{\|\gamma'\|^3}.$$

Takođe, postoje i posebne formule za geodezijsku krivinu koordinatnih linija

$$(\kappa_g)_{u=\text{const}} = -\Gamma^1_{22}\frac{EG-F^2}{G\sqrt{G}}, \qquad (\kappa_g)_{v=\text{const}} = \Gamma^2_{11}\frac{EG-F^2}{E\sqrt{E}}.$$

(d) Ako je ψ ugao između proizvoljne prirodno parametrizovane geodezijske linije i $v-$parametarske krive, dokazati da je izraz $(3+\sqrt{5}\cos u)\cos\psi$ konstantan. Koji ugao zaklapa geodezijska linija sa $u-$parametarskom krivom?

Rešenje. Neka je $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ proizvoljna prirodno parametrizovana geodezijska linija. Tangentni vektor ove krive je $\gamma' = u'r_u + v'r_v$, dok je vektor brzine proizvoljne $v-$parametarske krive $\beta(v)$ vektor $\beta' = r_v$. Kako je ψ ugao između ovih vektora brzine krivih na površi r, koristeći poznatu formulu dobijamo

$$\begin{aligned}\cos\psi = \frac{\langle\beta', \gamma'\rangle}{\|\beta'\|\cdot\|\gamma'\|} &= \frac{\mathrm{I}(\beta', \gamma')}{(\sqrt{5}\cos u+3)\cdot 1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\cos u+3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & (\sqrt{5}\cos u+3)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u'\\ v' \end{pmatrix}\\ &= (\sqrt{5}\cos u+3)v'.\end{aligned}$$

Na osnovu izračunatih Kristofelovih simbola, sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija za datu površ r ima oblik

$$\begin{aligned}u'' + \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}\cos u+3)\sin u(u')^2 &= 0,\\ v'' - \frac{2\sqrt{5}\sin u}{\sqrt{5}\cos u+3}u'v' &= 0.\end{aligned}$$

Druga jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(\sqrt{5}\cos u+3)v'' - 2\sqrt{5}\sin u u'v' = 0.$$

Primetimo da je izraz na levoj strani ove diferencijalne jednačine upravo izvod funkcije $(\sqrt{5}\cos u+3)^2v'$, pa je odatle

$$(\sqrt{5}\cos u+3)^2v' = C = \text{const}.$$

Zamenjujući $v' = \dfrac{C}{(\sqrt{5}\cos u+3)^2}$ u dobijenu jednakost $\cos\psi = (\sqrt{5}\cos u+3)v'$, lako dobijamo

$$(\sqrt{5}\cos u+3)\cos\psi = C = \text{const}.$$

Koordinatne krive su međusobno normalne jer je $F = 0$, pa je ugao koji zaklapa geodezijska linija γ sa $u-$parametarskom krivom jednak $\dfrac{\pi}{2} - \psi$.

(e) Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(3+\sqrt{5}\cos u)\sqrt{(3+\sqrt{5}\cos u)^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka konstanta. Skicirati nekoliko različitih geodezijskih linija na površi r.

Rešenje. Iz uslova da je geodezijska kriva γ prirodno parametrizovana, imamo da duž krive γ važi

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}\cos u + 3)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 1,$$

odnosno

$$5u'^2 + (\sqrt{5}\cos u + 3)^2 v'^2 = 1.$$

Kako je $\cos\psi = (\sqrt{5}\cos u + 3)v'$, dobijamo da je $5u'^2 = \sin^2\psi$, tj. $\sin\psi = \pm\sqrt{5}u'$. Deljenjem izraza

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{C}{(\sqrt{5}\cos u + 3)^2}$$

$$u' = \frac{du}{ds} = \pm\frac{\sqrt{(\sqrt{5}\cos u + 3)^2 - C^2}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}\cos u + 3)}$$

dobijamo

$$\frac{dv}{du} = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(\sqrt{5}\cos u + 3)\sqrt{(\sqrt{5}\cos u + 3)^2 - C^2}}.$$

Prema tome, moguće je parametrizovati geodezijsku liniju parametrom u pomoću

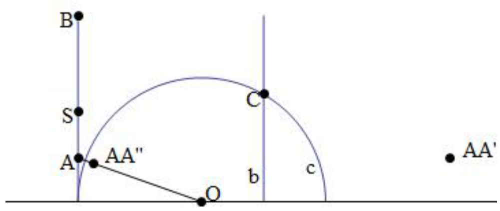
$$v = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(3+\sqrt{5}\cos u)\sqrt{(3+\sqrt{5}\cos u)^2 - C^2}} du.$$

Naravno, ovo možda nisu jednačine svih geodezijskih na torusu jer su pri ovom postupku izostavljene one geodezijske za koje važi $u' = 0$, tj. geodezijske među $v-$parametarskim linijama. Videli smo da postoje dve takve geodezijske među paralelama.

2. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(3, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(3,3)$ i prave $b : u = 6$, $c : (u-5)^2 + v^2 = 4$.

(a) Izračunati ugao između pravih b i c. U kakvom su međusobnom položaju prave AB, b i c?

Rešenje. Zbog uslova $E = G$ i $F = 0$, koordinate u poluravanskom modelu su konformne, što znači da se čuvaju uglovi iz karte. Prema tome, ugao između pravih b i c u $\mathcal{L}^2$ možemo tražiti kao uglove između euklidske poluprave b i euklidske polukružnice c. Koordinate presečne tačke $\{C\} = b \cap c$ su $(6, \sqrt{3})$, pa je traženi ugao ψ zapravo ugao između b i vektora položaja tačke C. Kako je ψ ugao naspram katete dužine 1 pravouglog trougla čije su stranice dužina $1, \sqrt{3}, 2$, očigledno je $\psi = \frac{\pi}{6}$. Isti rezultat se dobija i direktno, koristeći parametrizacije pravih b i c i koeficijente prve forme $\mathcal{L}^2$ u tački C.
Prave b i c se očigledno seku. Prava $a = AB$ ima jednačinu $u = 3$ i predstavlja (euklidski) otvorenu polupravu normalnu na $u-$osu. Zbog toga su prave a i c paralelne, i u euklidskom i u hiperboličkom smislu. Prave a i b su takođe paralelne jer se u euklidskom smislu seku na $u-$osi koja je granica modela $\mathcal{L}^2$. Prema tome, prave b i c se seku i obe su paralelne pravoj a, što je u kontradikciji sa Plejferovom aksiomom i pokazuje najbitniju razliku hiperboličke geometrije u odnosu na euklidsku geometriju.



(b) Odrediti središte i dužinu duži AB.

Rešenje. Parametrizacija duži AB je $AB = (3, t)$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant 3$. Neka središte duži AB ima koordinate $S(3, t_0)$. Vektor brzine duž prave AB ima koordinate $(0, 1)$ i intenzitet

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{v}.$$

Dužina duži AB je

$$\|AB\| = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{3} \frac{1}{v} dv = \ln v|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{3} = \ln(3\sqrt{2}).$$

Iz jednakosti dužina duži $\|AS\| = \|BS\|$ dobijamo

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{t_0} \frac{1}{v} dv = \int\limits_{t_0}^{3} \frac{1}{v} dv,$$

odakle sledi $\ln t_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}}$. Središte duži AB je tačka $S(3, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}})$.

(c) Odrediti tačke simetrične tački A u odnosu na prave b i c.

Rešenje. Refleksija u odnosu na pravu b u hiperboličkom smislu je ujedno i euklidska refleksija, pa tačka simetrična tački A u odnosu na pravu b ima koordinate $A'(9, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Refleksija u odnosu na pravu c u hiperboličkom smislu predstavlja u euklidskom smislu inverziju u odnosu na (polu)kružnicu c. Tačka A'' simetrična tački A u odnosu na pravu c leži na polupravoj OA i zadovoljava $\|OA\| \cdot \|OA''\| = 2^2 = 4$, gde je $O(5,0)$ centar kružnice c poluprečnika 2. Odavde dobijamo $\|OA''\| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, pa lako sledi da tražena tačka ima koordinate $A''(\frac{29}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9})$.

(d) Odrediti jednačine normala iz tačke A na pravama b i c.

Rešenje. Normala b' iz tačke A na pravoj b je euklidska polukružnica, pa njen centar mora biti presek prave b i $u-$ose, tj. tačka $(6,0)$. Iz uslova da b' sadrži tačku A dobijamo njenu jednačinu

$$b' : (u-6)^2 + v^2 = \frac{19}{2}.$$

Normala c' iz tačke A na pravoj c je takođe euklidska polukružnica. Iz normalnosti c i c' dobijamo da c' mora sadržati i sliku tačke A pri inverziji u odnosu na c, a to je baš dobijena tačka A''. Centar polukružnice c' dobija se u preseku (euklidske) simetrale duži AA'' i $u-$ose, pa njegove koordinate $(a,0)$ zadovoljavaju $(a-\frac{29}{9})^2 + (\frac{4\sqrt{2}}{9})^2 = (a-3)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$. Rešavanjem poslednje jednačine dobijamo $a = \frac{23}{8}$, pa je jednačina tražene normale

$$c' : \left(u - \frac{23}{8}\right)^2 + v^2 = \frac{33}{64}.$$

(e) Ispitati da li su (euklidske) homotetije sa centrima na $u-$osi i $v-$osi izometrije.

Rešenje. Euklidska homotetija sa centrom $(u_0, 0)$ i koeficijentom $\alpha > 0$ preslikava tačku (u,v) u (u',v') prema formuli $(u',v') = (u,v) + \alpha(u-u_0, v)$, tj.

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + (1-\alpha)u_0, \\ v' &= \alpha v. \end{aligned}$$

Kako je $du' = \alpha du$ i $dv' = \alpha dv$, važi $ds'^2 = ds^2$, tj. prva forma ostaje nepromenjena pri ovom preslikavanju i ono jeste lokalna izometrija. Štaviše, ovo preslikavanje je očigledno i difeomorfizam, pa se radi o jednoj globalnoj izometriji modela $\mathcal{L}^2$.
Euklidska homotetija sa centrom $(0, v_0)$ i koeficijentom $\beta \neq 0$ preslikava tačku (u,v) u (u',v') prema formuli $(u',v') = (u,v) + \beta(u, v - v_0)$, tj.

$$\begin{aligned} u' &= \beta u, \\ v' &= \beta v + (1-\beta)v_0. \end{aligned}$$

Kako je $du' = \beta du$ i $dv' = \alpha dv$, važi $ds'^2 = (\frac{\beta v}{\beta v + (1-\beta)v_0})^2 ds^2$, tj. prva forma se menja pri ovom preslikavanju i ono nije lokalna izometrija.