Geometrija 3, prvi kolokvijum, 08.04.2011. **Ime i prezime, broj indeksa, grupa**

Rešenja

1. Neka je $\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ preslikavanje dato sa $\alpha(t) = (e^{-5t}\cos 5t, -e^{-5t}\sin 5t, e^{-5t})$.

(a) Odrediti najveći interval $\mathcal{I}$ na kom je $\alpha(t)$ regularna kriva i skicirati njen skup slika za $\mathcal{I} = (-2\pi, 2\pi)$.

(b) Odrediti prirodnu parametrizaciju krive α i dužinu luka krive α na intervalu $(-2\pi, 2\pi)$.

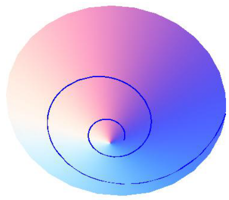
(c) Odrediti krivinu i torziju krive α.

(d) Odrediti Freneov reper krive α. Napisati Freneove formule krive α koristeći dobijene podatke.

(e) Odrediti ugao između vektora položaja i tangentnog vektora krive α u tački $P = \alpha(t_0)$.

Rešenje.

(a) Vektor brzine krive α je $\alpha'(t) = (-5e^{-5t}\cos 5t - 5e^{-5t}\sin 5t, 5e^{-5t}\sin 5t - 5e^{-5t}\cos 5t, -5e^{-5t})$, pa je brzina krive $\|\alpha'(t)\| = 5\sqrt{3}e^{-5t}$. Kako je brzina krive očigledno uvek različita od nule, kriva je regularna u svakoj tački i najveći skup koji možemo uzeti za domen parametra t je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Kako koordinate krive zadovoljavaju $x^2 + y^2 = z^2$, kriva leži na konusu.



(b) Računaćemo dužinu luka od tekuće tačke do tačke $t = +\infty$ (koja odgovara koordinatnom početku u $\mathbb{R}^3$ kome se kriva približava proizvoljno blizu, ali ga ne sadrži). Naime, ispostaviće se da je ova dužina konačna, a funkcija dužine luka i njen inverz u ovom slučaju imaju najpogodniji oblik. Naravno, moguće je birati i druge vrednosti (npr. $t = 0$).

$$s(t) = \int_t^{+\infty} 5\sqrt{3}e^{-5u}du = \sqrt{3}e^{-5t} \Longrightarrow t = -\frac{1}{5}\ln\frac{s}{\sqrt{3}}$$

Prirodna parametrizacija krive glasi

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{s}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{s}{\sqrt{3}}\right).$$

Dužina krive na intervalu $(-2\pi, 2\pi)$ (zapravo na segmentu $[-2\pi, 2\pi]$) iznosi $s(-2\pi) - s(2\pi) = \sqrt{3}(e^{10\pi} - e^{-10\pi})$ (tačka koja odgovara vrednosti $t = -2\pi$ je dalja od $t = +\infty$ nego što je tačka $t = 2\pi$). Ovo smo mogli dobiti i integracijom brzine krive

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \|\alpha'(t)\|dt = \int_{-2\pi}^{2\pi} 5\sqrt{3}e^{-5t}dt = \sqrt{3}(e^{10\pi} - e^{-10\pi}).$$

(c), (d) Koristeći standardne formule za prirodno parametrizovanu krivu, dobijamo (naravno, u svim računima naravno moguće je koristiti i zadatu parametrizaciju i odgovarajuće formule):

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 1\right),$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}s}\left(-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right),$$

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{s},$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right),$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 2\right),$$

$$\tau(s) = -< B'(s), N(s) >= \frac{1}{\sqrt{3}s}.$$

Koristeći dobijene vektore Freneove baze, krivinu i torziju, lako proveravamo Freneove formule:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}s}\left(-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right)\\
&= \kappa(s)N(s),\\
N'(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right)\\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)+\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 1\right)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}s}\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 2\right)\\
&= -\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s),\\
B'(s) &= \frac{\sqrt{6}}{6s}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)+\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right), 0\right)\\
&= -\tau(s)N(s).
\end{aligned}$$

(e) Neka je ψ traženi ugao između vektora položaja $\alpha(t_0) = (e^{-5t_0}\cos 5t_0, -e^{-5t_0}\sin 5t_0, e^{-5t_0})$ tačke $\alpha(t_0) = P$ i tangente u toj tački određene vektorom pravca $\alpha'(t_0) = (-5e^{-5t_0}\cos 5t_0 - 5e^{-5t_0}\sin 5t_0, 5e^{-5t_0}\sin 5t_0 - 5e^{-5t_0}\cos 5t_0, -5e^{-5t_0})$. Koristeći formulu $\cos\psi = \dfrac{<\alpha(t_0), \alpha'(t_0)>}{\|\alpha(t_0)\|\cdot\|\alpha'(t_0)\|}$, lako dobijamo $\psi = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Prema tome, kriva α ima osobinu da je ugao između vektora položaja proizvoljne tačke i tangente u toj tački konstantan. Istu osobinu među ravanskim krivama ima logaritamska spirala, što je upravo kriva koja se dobija projekcijom krive α na $xy-$ravan.

Napomena. Ova kriva ima osobinu $\dfrac{\kappa}{\tau} = \sqrt{2}$, što je konstanta, pa kriva spada u klasu tzv. **uopštenih heliksa**. U pitanju je konusni heliks, drugačije parametrizovan u odnosu na standardan način. Može se proveriti da tangentni vektori zaklapaju konstantan ugao $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ sa $z-$osom (tzv. osom heliksa), tj. njenim vektorom $(0, 0, 1)$; vektori normale su normalni na osu heliksa a vektori binormale zaklapaju konstantan ugao $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$ sa osom heliksa.

2. Dat je helikoid parametrizacijom $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \sqrt{3}v)$, $(u, v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Odrediti najveći skup $\mathcal{U}$ na kom je helikoid $r(u, v)$ regularna površ.

(b) Odrediti prvu fundamentalnu formu helikoida i napisati jednačine koordinatnih linija na helikoidu.

(c) Izračunati površinu četvorougla $ABCD$ na helikoidu određenog koordinatnim krivama $u = 0$, $v = 0$, $u = \sqrt{3}$, $v = 1$.

(d) Izračunati obim i napraviti skicu četvorougla $ABCD$.

(e) Izračunati ugao između krivih $u = 0$ i $u = \sqrt{3}v$ na helikoidu.

Rešenje.

(a) Kako je $r_u = (\cos v, \sin v, 0)$ i $r_v = (-u\sin v, u\cos v, \sqrt{3})$, važi $r_u \times r_v = (\sqrt{3}\sin v, -\sqrt{3}\cos v, u)$ i $\|r_u \times r_v\| = \sqrt{3+u^2} \neq 0$ za sve moguće vrednosti parametra (u, v). Prema tome, najveći skup na kom je helikoid $r(u, v)$ regularna površ je $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. Naravno, obično se uzima ograničen skup za $\mathcal{U}$, recimo $\mathcal{U} = (0, a) \times \mathbb{R}$, $a = \text{const}$.

(b) Koeficijenti prve fundamentalne forme površi r su

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1$$
$$F = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$
$$G = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 + 3,$$

pa je ona data sa $ds^2 = du^2 + (u^2+3)dv^2$, tj. matricom

$$I(\cdot,\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+3 \end{pmatrix}.$$

Koordinatne linije dobijaju se fiksiranjem jednog od parametara i predstavljaju slike pravih $u = \text{const}$ i $v = \text{const}$ iz $\mathbb{R}^2$. Za $v = v_0$ dobijamo $u-$parametarske koordinatne linije

$$\alpha(u) = (u\cos v_0, u \sin v_0, \sqrt{3}v_0)$$

koje su očigledno prave. Za $u = u_0$ dobijamo $v-$parametarske koordinatne linije

$$\beta(v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, \sqrt{3}v)$$

koje su kružni heliksi.

(c) Element površine je $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2+3}$, pa je tražena površina

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG-F^2}dudv &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{u^2+3}dudv \\ &= 3\int_0^1 \sqrt{z^2+1}dz \\ &= \frac{3}{2}(z\sqrt{z^2+1} + \ln|z + \sqrt{z^2+1}|)\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})),\end{aligned}$$

pri ěcmu je $\mathcal{D}$ pravougaonik u $\mathbb{R}^2$ ograničen pravama $u = 0$, $v = 0$, $u = \sqrt{3}$, $v = 1$.

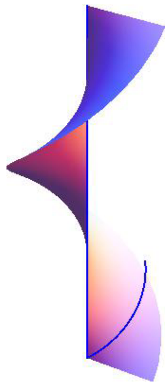
(d) Kako su stranice četvorougla $ABCD$ na helikoidu delovi odgovarajućih koordinatnih linija, vektori brzine tih krivih su upravo r_u i r_v u odgovarajućim tačkama. Traženi obim je:

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \|AB\| + \|BC\| + \|CD\| + \|AD\| \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \|r_u(u,0)\|du + \int_0^1 \|r_v(\sqrt{3},v)\|dv + \int_0^{\sqrt{3}} \|r_u(u,1)\|du + \int_0^1 \|r_v(0,v)\|dv \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} du + \int_0^1 \sqrt{6}dv + \int_0^{\sqrt{3}} du + \int_0^1 \sqrt{3}dv \\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{6}.\end{aligned}$$

(e) Date krive $\beta(v) = (0,0,\sqrt{3}v)$ i $\gamma(v) = (\sqrt{3}v\cos v, \sqrt{3}v \sin v, \sqrt{3}v)$ se u ravni $\mathbb{R}^2$ (tj. u karti helikoida) vide kao krive $\widetilde{\beta}(v) = (0,v)$ ($v-$osa) i $\widetilde{\gamma}(v) = (\sqrt{3}v, v)$. Presečna tačka krivih β i γ dobija se za vrednost parametara $u = 0$, $v = 0$. Neka je φ traženi ugao između krivih β i γ. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{\langle \beta'(0), \gamma'(0) \rangle}{\|\beta'(0)\| \cdot \|\gamma'(0)\|} = \frac{\langle \beta'(0), \gamma'(0) \rangle}{\sqrt{\langle \beta'(0), \beta'(0) \rangle} \cdot \sqrt{\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle}}.$$

Prema poznatim formulama za krive na površima, važi



$$< \beta'(0), \gamma'(0) >= I(\widetilde{\beta}'(0), \widetilde{\gamma}'(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$< \beta'(0), \beta'(0) >= I(\widetilde{\beta}'(0), \widetilde{\beta}'(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$< \gamma'(0), \gamma'(0) >= I(\widetilde{\gamma}'(0), \widetilde{\gamma}'(0)) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 6,$$

pa je $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Neka su $\kappa(t) \neq 0$, $\tau(t)$ i $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ krivina, torzija i brzina krive $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ klase C^4. Odrediti intenzitet vektora $\alpha'''(t)$ u funkciji od krivine, torzije, brzine i njihovih izvoda, ako je kriva α:

(a) prirodno parametrizovana;

(b) proizvoljna.

Rešenje. Koristićemo tzv. uopštene Freneove formule. Vektori brzine i ubrzanja proizvoljno parametrizovane regularne krive $\alpha = \alpha(t)$ iznose

$$\begin{aligned} \alpha' &= vT, \\ \alpha'' &= v'T + v^2\kappa N. \end{aligned}$$

Diferenciranjem poslednjeg izraza dobijamo vektor $\alpha'''(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha''' &= v''T + v'T' + (v^2\kappa)'N + v^2\kappa N' \\ &= v''T + vv'\kappa N + (2vv'\kappa + v^2\kappa')N + v^3\kappa(-\kappa T + \tau B) \\ &= (v'' - v^3\kappa^2)T + (3vv'\kappa + v^2\kappa')N + v^3\kappa\tau B. \end{aligned}$$

Kako je Freneova baza ortonotmirana, traženi intenzitet je

$$\|\alpha'''\| = \sqrt{(v'' - v^3\kappa^2)^2 + (3vv'\kappa + v^2\kappa')^2 + v^6\kappa^2\tau^2}.$$

U slučaju prirodno parametrizovane krive, imamo da je brzina krive jedinična $v = 1$. Kada to ubacimo u prethodne relacije, dobijamo

$$\begin{aligned} \alpha' &= T, \\ \alpha'' &= \kappa N, \\ \alpha''' &= -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B, \\ \|\alpha'''\| &= \sqrt{\kappa^4 + \kappa'^2 + \kappa^2\tau^2}. \end{aligned}$$