

## GEOMETRIJA 2

### zadaci po kojima se drže vežbe

#### PODUDARNOST

1. Ako su  $B_1$  i  $C_1$  središta duži  $CA$  i  $BA$  trougla  $ABC$ , onda su prave  $BC$  i  $B_1C_1$  paralelne i važi  $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ . (**srednja linija trougla**)
2. Ako su  $A, B, C, D$  četiri različite tačke i  $M, N, K, L, P, Q$  središta duži  $AB, BC, CD, DA, AC, DB$  redom, dokazati:
  - 1)  $MN$  i  $KL$ ,  $MP$  i  $QK$ ,  $NP$  i  $QL$  su međusobno podudarne duži;
  - 2) duži  $LN, MK, PQ$  imaju zajedničko središte;
  - 3) svaki od uglova  $\sphericalangle PMQ, \sphericalangle PNQ, \sphericalangle LMN$  podudaran je jednom od uglova kojeg određuju prave  $AC$  i  $BD, BC$  i  $AD, AB$  i  $CD$ .
3. Dokazati da se težišne duži trougla seku u tački koja ih deli u odnosu  $2 : 1$ . (**težište trougla**)
4. Neka je  $D$  podnožje visine iz temena  $C$  pravouglog trougla  $ABC$  na hipotenuzu  $AB$ , a  $O_1$  i  $O_2$  centri krugova upisanih u trouglove  $CAD$  i  $CBD$ . Dokazati da je simetrala pravog ugla trougla  $ABC$  normalna na pravoj  $O_1O_2$ .
5. Dokazati da tačke simetrične ortocentru u odnosu na:
  - a) stranice trougla;
  - b) središta stranica trougla;pripadaju krugu opisanom oko tog trougla.
6. Središte opisanog kruga  $O$ , ortocentar  $H$  i težište  $T$  proizvoljnog trougla su kolinearne tačke i važi  $HT = 2TO$ . Dokazati. (**Ojlerova prava**)
7. Središta stranica, podnožja visina i središta duži određenih temenima i ortocentrom trougla pripadaju jednom krugu. Dokazati. (**Ojlerov krug**)
8. Podnožja normala iz proizvoljne tačke kruga opisanog oko nekog trougla, na pravama koje sadrže stranice tog trougla, pripadaju jednoj pravoj. (**Simsonova prava**)
9. Dat je tetivan četvorougao  $ABCD$  čije su dijagonale međusobno normalne i seku se u tački  $S$ .
  - a) Prava koja sadrži tačku  $S$  i normalna je na pravoj  $AB$  sadrži središte duži  $CD$ . Dokazati.
  - b) Ako su  $A', B', C', D'$  projekcije tačke  $S$  na pravama  $AB, BC, CD, DA$ , redom, tada je četvorougao  $A'B'C'D'$  tetivan i tangentan. Dokazati.
10. Nad ivicama trougla  $ABC$  u spoljašnjosti konstruisani su jednakokranični trouglovi  $ADB, BEC, CFA$ . Dokazati da su duži  $AE, BF, CD$  međusobno podudarne i da se seku u jednoj tački. (**Toričelijeva tačka**)
11. Medijatrisa stranice i bisektrisa naspramnog ugla trougla seku se u tački koja pripada opisanom krugu tog trougla. Dokazati.
12. Neka su  $P$  i  $Q$  središta lukova  $\widehat{AB}$  i  $\widehat{AC}$  kruga opisanog oko trougla  $ABC$  i  $s_a$  bisektrisa ugla  $\sphericalangle BAC$ . Dokazati da je  $PQ \perp s_a$ .

13. Neka su  $A'$ ,  $N$  i  $O$  podnožje visine iz  $A$ , presek bisektrise ugla  $\sphericalangle BAC$  sa opisanom krugom trougla  $ABC$  ( $AB < AC$ ) i centar opisanog kruga, dokazati  $\sphericalangle A'AE = \sphericalangle ANO = \sphericalangle NAO = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB)$ .
14. (**Veliki zadatak**) Ako sa  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  obeležimo središta ivica  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  trougla  $ABC$  ( $b > c$ ), sa  $p$  poluobim tog trougla, sa  $l(O, r)$  opisani krug tog trougla, sa  $P, Q, R$  tačke u kojima upisani krug  $k(S, \rho)$  dodiruje prave  $BC, CA, AB$ , sa  $P_i, Q_i, R_i$  ( $i = a, b, c$ ) tačke u kojima spolja upisani krug  $k_i(S_i, \rho_i)$  dodiruje redom prave  $BC, CA, AB$ , sa  $M$  i  $N$  tačke u kojima medijatrisa ivice  $BC$  seče krug  $l$ , pri čemu je  $M$  na luku  $BAC$ , sa  $M'$  i  $N'$  podnožja upravnih iz tačaka  $M$  i  $N$  na pravoj  $AB$ , dokazati da je:
- 1)  $\mathcal{B}(A, P', P_a), \mathcal{B}(A, P, P'_a), \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$ ;
  - 2)  $AQ_a = AR_a = p, QQ_a = RR_a = a, Q_bQ_c = R_bR_c = a$ ;
  - 3)  $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$ ;
  - 4)  $PP_a = b - c, P_bP_c = b + c$ ;
  - 5)  $PA_1 = P_aA_1, P_cA_1 = P_bA_1$ ;
  - 6)  $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$ ;
  - 7)  $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$ ;
  - 8)  $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$ ;
  - 9)  $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ ;
  - 10)  $NS = NS_a = NB = NC, MS_b = MS_c = MB = MC$ ;
  - 11)  $M'N' = b$ .

## SLIČNOST

1. Ako su  $E$  i  $F$  tačke u kojima bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla  $\sphericalangle BAC$  trougla  $ABC$  ( $AB < AC$ ) seku pravu  $BC$  dokazati  $BE : CE = BF : CF = AB : AC$ .
2. Neka su  $E$  i  $F$  tačke iz prethodnog zadatka. Dokazati:
  - 1)  $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$ ;
  - 2)  $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC, AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$ ;
  - 3)  $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$ .
3. Dokazati (važne oznake iz Velikog zadatka):
  - 1)  $SA \cdot SN = 2r\rho$ ;
  - 2)  $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$ ;
  - 3)  $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$ ;
  - 4)  $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$ .
4. (**Ptolomejeva teorema**) Ako je  $ABCD$  konveksan i tetivan četvorougao, dokazati da važi  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ .
5. Ako su  $a$  i  $d$  ivica i dijagonala pravilnog petougla, izraziti  $d$  u funkciji od  $a$ . Kako se konstruiše pravilni petougao ivice  $a$ ?

(**Čevaova teorema**) Ako su  $P, Q, R$  redom tačke pravih  $BC, CA, AB$  gde su  $A, B, C$  tri nekolinearne tačke, tada prave  $AP, BQ, CR$  pripadaju jednom pramenu ako i samo ako važi  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ .

(**Menelajeva teorema**) Tačke  $P, Q, R$  pravih određenih stranicama  $BC, CA, AB$  trougla  $ABC$  su kolinearne ako i samo ako važi  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ .

6. Ako su  $P, Q, R$  tačke u kojima upisani krug trougla  $ABC$  dodiruje stranice  $BC, CA, AB$  dokazati da su prave  $AP, BQ, CR$  konkurentne.
7. Dokazati da se bisektrisa jednog unutrašnjeg i dva spoljašnja ugla trougla  $ABC$  seku u jednoj tački.
8. Dokazati da, ukoliko postoje tačke u kojima bisektrise spoljašnjih uglova kod temena  $A, B$  i  $C$  seku prave određene naspramnim stranicama trougla  $ABC$ , one su kolinearne.
9. Dokazati da tačke  $P, Q, R$  u kojima tangente opisanog kruga trougla  $ABC$  u njegovim temenima seku prave određene naspramnim stranicama, ukoliko postoje, pripadaju jednoj pravoj.

**Def.** Neka su  $P, Q, R, S$  četiri razne kolinearne tačke. Par tačaka  $(P, Q)$  je harmonijski spregnut sa parom  $(R, S)$  ako važi  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ . Tada pišemo  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .

**Def.** Prave  $a, b, c, d$  jednog pramena su harmonijski spregnute ako postoji prava  $p$  koja ih seče u harmonijski spregnutim tačkama. Tada pišemo  $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ . Ova osobina ne zavisi od izbora prave  $p$ .

Osobine:

- Ako važi  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$  tada važi i  $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$ ,  $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$ ,  $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$ .
  - Ako su  $P, Q, R$  tri kolinearne tačke i  $R$  nije središte duži  $PQ$ , tada postoji jedinstvena tačka  $S$  takva da je  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .
  - $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \mathcal{B}(P, R, Q) \perp \mathcal{B}(P, S, Q)$ .
  - Ako su  $a, b, c, d$  konkurentne prave i  $c \perp d$  važi:  $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$  i  $d$  su simetrale uglova određenih pravama  $a$  i  $b$ .
10. Važi  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$  ako i samo ako postoje četiri tačke  $A, B, C, D$  takve da važi  $AB \cap CD = \{P\}$ ,  $BC \cap AD = \{Q\}$ ,  $PQ \cap AC = \{R\}$ ,  $PQ \cap BD = \{S\}$ .
  11. Ako su  $A, B, C, D$  razne kolinearne tačke, a  $O$  središte duži  $AB$ , tada važi  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = OC \cdot OD$ .
  12. Ako su  $A, B, C, D$  razne tačke prave  $p$ ,  $O$  tačka van te prave,  $E$  i  $F$  tačke u kojima prava koja sadrži tačku  $B$  i paralelna je  $OA$  seče  $OC$  i  $OD$ , dokazati da važi  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$  je središte  $EF$ .
  13. Neka su  $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$  projekcije tačaka  $S, S_a, S_b, S_c$  na pravu određenu visinom  $AA'$  trougla  $ABC$ , a  $\overline{E}$  projekcija tačke  $E$  na pravu  $AC$ . Dokazati:
    - 1)  $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ ,  $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$ ,  $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$ ,  $\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$ ;
    - 2)  $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ ,  $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$ ,  $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$ .
  14. (**Apolonijev krug**) Odrediti skup svih tačaka u ravni kojima su rastojanja od dveju datih tačaka srazmerna datim nepodudarnim dužima.

**Def.** Ako neka prava koja sadrži tačku  $P$  seče krug  $k(O, r)$  u tačkama  $A$  i  $B$ , tada je *potencija* tačke  $P$  u odnosu na krug  $k$  data sa  $p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$  i ne zavisi od izbora prave. Potencija tačke  $P$  je veća, manja ili jednaka nuli u zavisnosti da li se tačka nalazi u spoljašnjosti ili unutrašnjosti kruga ili na krugu.

**Def.** Geometrijsko mesto tačaka ravni koje imaju jednake potencije u odnosu na dva data kruga  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  je prava koja se zove *radikalna* ili *potencijalna osa*.

Radikalna osa je upravna na pravoj  $O_1O_2$ . Radikalne ose triju krugova neke ravni pripadaju jednom pravcu.

15. Neka su  $A, B, C, D$  kolinearne tačke takve da važi  $\mathcal{B}(A, C, B, D)$  i neka je  $k$  krug nad prečnikom  $AB$  i  $l$  bilo koji krug koji sadrži tačke  $C, D$ . Dokazati da važi  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow k \perp l$ .
16. Ako je  $l(O, r)$  opisan krug,  $k(S, \rho)$  upisani krug i  $k_a(S_a, \rho_a)$  spolja upisani krug koji dodiruje stranicu  $BC$  datog trougla  $ABC$ , dokazati da je  $OS^2 = r^2 - 2r\rho$  i  $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$ .
17. Prava određena visinom  $AD$  trougla  $ABC$  predstavlja radikalnu osu krugova kojima su prečnici težišne linije  $BB'$  i  $CC'$  tog trougla.

## KONSTRUKTIVNI ZADACI

1. Konstruisati trougao  $ABC$  ako su zadati sledeći elementi:

- |                             |                                  |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1) $t_a, t_b, t_c$ ;        | 7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$ ; |
| 2) $\beta, \gamma, p$ ;     | 8) $\alpha, b - c, \rho_a$ ;     |
| 3) $\alpha, a, b + c$ ;     | 9) $a, \rho_b, \rho_c$ ;         |
| 4) $\beta, h_c, b \pm c$ ;  | 10) $\alpha, \rho, \rho_a$ ;     |
| 5) $t_a, h_b, b \pm c$ ;    | 11) $b - c, h_a, \rho$ .         |
| 6) $\beta - \gamma, b, c$ ; |                                  |

2. Date su tačke  $A_1, S, F$ . Konstruisati trougao  $ABC$  ako je  $A_1$  središte  $BC$ ,  $S$  centar upisanog kruga, a  $F$  presek simetrale spoljašnjeg ugla u temenu  $A$  i prave  $BC$ .
3. Konstruisati tetivni četvorougao takav da su mu ivice podudarne datim dužima.

## INVERZIJA

**Def.** Neka je  $k(O, r)$  proizvoljni krug ravni  $E^2$ . *Inverzija u odnosu na krug  $k$*  je preslikavanje  $\psi_k : E^2 \setminus \{O\} \rightarrow E^2 \setminus \{O\}$  kojom se tačka  $P$  slika u tačku  $P'$  takvu da  $P$  i  $P'$  pripadaju istoj polpravoj sa temenom u  $O$  i važi  $OP \cdot OP' = r^2$ .

### Osobine

- $\psi_k^2 = Id$ .
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$ .
- $\psi_k$  slika unutrašnjost kruga u spoljašnjost i obrnuto.
- Ako  $\psi_k$  slika  $A$  u  $A'$  i ako je  $PQ$  prečnik kruga  $k$  takav da su  $P, Q, A, A'$  kolinearne, onda važi  $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$ .
- Ako prava  $p$  sadrži tačku  $O$ , tada se  $p \setminus \{O\}$  slika u  $p \setminus \{O\}$ .

- Ako prava  $p$  ne sadrži tačku  $O$ , onda se slika u  $l \setminus \{O\}$  gde je  $l$  krug koji sadrži  $O$ .
  - Ako krug  $l$  sadrži tačku  $O$ , onda se  $l \setminus \{O\}$  slika u pravu koja ne sadrži  $O$ .
  - Ako krug  $l$  ne sadrži tačku  $O$  slika se u krug  $l_1$  koji takodje ne sadrži  $O$ . Pri tom se centar kruga  $l$  NE PRESLIKAVA u centar kruga  $l_1$ .
  - $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$ .
  - $\psi_k$  čuva uglove između krivih.
1. Ako se krugovi  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju u centru inverzije, tada se inverzijom slikaju u dve paralelne prave. Dokazati.
  2. Neka se inverzijom  $\psi_k$  tačka  $A$  koja ne pripada krugu  $k$  slika u  $A'$  i neka je  $l$  proizvoljan krug koji sadrži  $A$  i  $A'$ . Dokazati da je  $l \perp k$ .
  3. Neka je  $O$  centar opisanog kruga  $l$  trougla  $ABC$ . Ako su  $B'$  i  $C'$  tačke polupravih  $AB$  i  $AC$  takve da je  $AB \cdot A'B' = AC \cdot A'C'$  dokazati da je  $OA \perp B'C'$ .
  4. Neka je  $ABPQ$  netetivni četvorougao. Dokazati da je ugao između krugova opisanih oko trouglova  $ABP$  i  $ABQ$  jednak uglu između krugova opisanih oko trouglova  $PQA$  i  $PQB$ .
  5. Neka se krugovi  $k_1, k_2, k_3$  međusobno dodiruju u tačkama  $P, Q, R$ . Dokazati da je krug opisan oko trougla  $PQR$  ortogonalan na sva tri kruga.
  6. Krugovi  $k_1, k_2, k_3$  su međusobno ortogonalni, pri čemu se  $k_1$  i  $k_2$  seku u tačkama  $A$  i  $B$ ,  $k_2$  i  $k_3$  u tačkama  $C$  i  $D$ ,  $k_3$  i  $k_1$  u tačkama  $E$  i  $F$ . Dokazati da se krugovi opisani oko trouglova  $ACE$  i  $ADF$  dodiruju u tački  $A$ .
  7. U ravni su data četiri kruga od kojih svaki dodiruje tačno dva kruga od preostalih. Dokazati da su dodirne tačke kolinearne ili konciklične.
  8. Konstruisati krug  $k$  koji sadrži dve date tačke  $A$  i  $B$  i dodiruje datu pravu  $p$ .
  9. Konstruisati krug  $k$  koji sadrži datu tačku  $A$  i dodiruje date krugove  $k_1$  i  $k_2$ .
  10. Konstruisati krug koji spolja dodiruje tri data kruga  $k_1, k_2, k_3$ .

## IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE RAVNI

1. Dokazati:  $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$ .
2. Dokazati:  $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$  ako i samo ako su  $p, q, r$  prave jednog pramena.
3. Dokazati:  $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$ .
4. Neka je  $ABCD$  romb takav da je  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$  i neka prava  $p$  seče redom stranice  $AB$  i  $BC$  u tačkama  $M$  i  $N$  tako da je zbir duži  $BM$  i  $BN$  jednak stranici romba. Dokazati da je trougao  $DMN$  pravilan.
5. Neka je  $ABCDE$  petougao upisan u krug takav da je  $BC \parallel DE$  i  $CD \parallel EA$ . Dokazati da  $D$  pripada medijatriksi stranice  $AB$ .
6. Neka je u ravni  $\mathbb{E}^2$  dat trougao  $ABC$  i neka su  $B', C'$  tačke pravih  $AB$  i  $AC$  takve da važi  $\mathcal{B}(A, B, B')$  i  $\mathcal{B}(A, C, C')$ . Ako je  $P_a$  tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu  $A$  dodiruje stranicu  $BC$  tog trougla, dokazati da je  $\mathcal{R}_{C, \sphericalangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \sphericalangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \sphericalangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$ .
7. Neka je  $t$  tangenta opisanog kruga trougla  $ABC$  u temenu  $A$ . Dokazati da važi  $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$ , gde je  $\mathcal{G}$  klizajuća simetrija.
8. Dokazati da je četvorougao  $ABCD$  tetivan ako i samo ako važi  $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$ .

9. Data su dva kruga koji imaju presečnu tačku  $A$ . Konstruisati pravu koja
- sadrži  $A$ ;
  - je paralelna datoj pravoj  $p$ ;
- i na kojoj dati krugovi odsecaju podudarne duži.
10. Konstruisati trougao  $ABC$  takav da su date nekolinearne tačke  $O_a$ ,  $O_b$  i  $O_c$  središta kvadrata konstruisanih spolja nad njegovim ivicama  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ .

## STEREOMETRIJA

- Dokazati da u prostoru  $\mathbb{E}^3$  postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku  $O$  i upravna je na svakoj od dveju mimoilaznih pravih  $p$  i  $q$ .
  - Ako su  $P$  i  $Q$  podnožja zajedničke normale dveju mimoilaznih pravih  $p$  i  $q$ , dokazati da je duž  $PQ$  kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih  $p$  i  $q$ .
- Zbir dve stranice triedra veći je od treće. Dokazati.
- Ravni od kojih je svaka određena ivicom i simetralom naspramne stranice triedra imaju zajedničku pravu. Dokazati.
- Neka su strane triedra jednake redom  $60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ . Dokazati da je diedar naspram najveće stranice prav.
- Dokazati da se oko svakog tetraedra  $ABCD$  u prostoru  $\mathbb{E}^3$  može opisati sfera, kao i da se u svaki tetraedar može upisati sfera.
- Duži određene središtima naspramnih ivica trostrane piramide (tetraedra) seku se u jednoj tački koja ih polovi. Dokazati. (**Težište tetraedra**)
  - Dokazati da težište tetraedra deli duži određene temenima i težištima naspramnih strana u odnosu  $3 : 1$ .
- Dve naspramne ivice nekog tetraedra su međusobno podudarne ako i samo ako su duži određene središtima ostalih dvaju parova naspramnih ivica međusobno normalne.
  - Dve naspramne ivice tetraedra su normalne ako i samo ako su duži određene središtima ostalih dvaju parova naspramnih ivica međusobno podudarne.
- Dokazati da je prava određena središtima stranica  $AC$  i  $BD$  tetraedra  $ABCD$  ujedno i njihova zajednička normala ako i samo ako je  $AB = CD$  i  $AD = BC$ .  
**Def.** Tetraedar  $ABCD$  je *ortogonalan* ako važi  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ .
- Visine  $AA'$  i  $BB'$  tetraedra  $ABCD$  se seku ako i samo ako je  $AB \perp CD$ . Dokazati.
- Dokazati da podnožja visina iz temena tetraedra predstavljaju ortocentre naspramnih pljosni ako i samo ako je tetraedar ortogonalan.

## IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE PROSTORA

1. Dokazati:  $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$ .
2. Dokazati da je kompozicija neparnog broja centralnih simetrija prostora ponovo centralna simetrija.
3. Ako su  $A, B, C$  tri tačke ravni  $\pi$ , dokazati da važi  $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$ .
4. Odrediti tip izometrije  $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$ .
5. Dokazati da je kompozicija tri ravanske refleksije kojima su osnove određene bočnim pljosnima trostrane prizme  $ABCA'B'C'$  klizajuća refleksija tog prostora.
6. Odrediti tip i komponente izometrije koja predstavlja kompoziciju dveju osnih refleksija  $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$  euklidskog prostora, u zavisnosti od uzajamnog položaja pravih  $p$  i  $q$ .
7. Neka su  $OP, OQ, OR$  tri međusobno normalne duži prostora. Dokazati da je kompozicija  $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$  translacija.
8. Dokazati da je u euklidskom prostoru kompozicija sastavljena od tri ravanske refleksije kojima su osnove određene pljosnima triedra osnorotaciona refleksija.

## HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

1. Prave određene osnovicom i protivosnovicom Sakerijevog četvorougla su hiperparalelne. Dokazati.
2. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su podudarni i oštri. Dokazati.
3. Dokazati da su dva Lambertova četvorougla  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  sa oštrim uglovima  $D$  i  $D'$  podudarna ako je:

a)  $AB = A'B', BC = B'C'$ ;

b)  $AB = A'B', AD = A'D'$ ;

c)  $AD = A'D', BC = B'C'$ ;

d)  $AD = A'D', CD = C'D'$ ;

e)  $AD = A'D', \sphericalangle D = \sphericalangle D'$ ;

f)  $AB = A'B', \sphericalangle D = \sphericalangle D'$ .

4. Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  sa osnovama  $AB$  i  $A'B'$  podudarna ako je:

a)  $AB = A'B', BC = B'C'$ ;

b)  $AB = A'B', CD = C'D'$ ;

c)  $BC = B'C', CD = C'D'$ ;

d)  $AB = A'B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$ ;

e)  $BC = B'C', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$ ;

f)  $CD = C'D', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$ .

5. Ako su tačke  $P$  i  $Q$  središta stranica  $AB$  i  $AC$  trougla  $ABC$ , dokazati da su prave  $BC$  i  $PQ$  među sobom hiperparalelne.
6. Ako su  $A, B, C$  tri razne tačke neke prave  $l$  i  $O$  tačka izvan te prave, dokazati da središta  $A', B', C'$  duži  $OA, OB, OC$  ne pripadaju jednoj pravoj.
7. Dokazati da je u Sakerijevom četvorouglu protivosnovica veća od osnovice.
8. Ako su  $P$  i  $Q$  središta stranica  $AB$  i  $AC$  trougla  $ABC$ , dokazati da je  $PQ < \frac{1}{2}BC$ .
9. Neka je  $A_1$  središte hipotenuze  $BC$  pravouglog trougla  $ABC$ . Dokazati da je duž  $AA_1$  manja od polovine hipotenuze.
10. Ako je visina ekvidistante veća od nule tada ta ekvidistanta nije prava. Dokazati.
11. Prave  $p$  i  $q$  seku se u tački  $S$ . Odrediti pravu  $a$  paralelnu pravoj  $q$  u određenom smeru i normalnu na pravoj  $p$ .

12. Prave  $p$  i  $q$  su paralelne. Odrediti pravu  $a$  paralelnu pravoj  $q$  u određenom smeru i normalnu na pravoj  $p$ .
13. Prave  $p$  i  $q$  su hiperparalelne. Odrediti pravu  $a$  paralelnu pravoj  $q$  u određenom smeru i normalnu na pravoj  $p$ .
14. Neka su  $a, b$  i  $c$  međusobno paralelne prave, ali ne sve u istom smeru. Neka su  $b'$  i  $c'$  upravne iz tačke  $A$  prave  $a$  na pravama  $b$  i  $c$ . Odrediti ugao između pravih  $b'$  i  $c'$ .
15. Dva razna parabolička pramena imaju zajedničku pravu. Dokazati.
16. Neka su  $A, B, C$  i  $D$  tačke takve da su redom poluprave  $AB$  i  $DC$ , odnosno  $BC$  i  $AD$  paralelne. Dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova kod temena  $A$  i  $C$  i spoljašnjih uglova kod temena  $B$  i  $D$  prave istog pramena.
17. Dokazati da za tri nekolinearne tačke  $A, B, C$  važi  $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC)$ .
18. Ako je u ravni Lobačevskog dat trougao  $ABC$  kod koga je  $\sphericalangle C$  prav, tj.  $\sphericalangle C = R$ , zatim  $\sphericalangle A = \Pi(a')$ ,  $\sphericalangle B = \Pi(b')$ ,  $BC = a$  i  $AB = c$ , dokazati da je:

a)  $\sphericalangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$ ;

b)  $\sphericalangle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ za } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & , \text{ za } b' > c \end{cases}$  ;

c)  $\sphericalangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ za } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)] & , \text{ za } b' > c \end{cases}$  ;

d)  $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ za } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)] & , \text{ za } b' > c \end{cases}$  ;

e)  $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R.$

## POENKAREOV DISK MODEL

1. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni date su  $h$ -prava  $a$  i  $h$ -tačka  $A$ . Odrediti  $h$ -pravu  $n$  koja sadrži tačku  $A$  i upravna je na pravu  $a$ .
2. U Poenkareovom disk modelu date su tačke  $A$  i  $B$ . Odrediti  $h$ -simetralu duži  $AB$ .
3. U Poenkareovom disk modelu date su tačke  $X$  i  $Y$ . Konstruisati  $h$ -krug  $l$  sa centrom u tački  $X$  koji sadrži tačku  $Y$ .
4. U Poenkareovom disk modelu date su dve prave koje se seku. Odrediti  $h$ -bisektrisu ugla kojeg određuju.
5. U Poenkareovom disk modelu konstruisati  $h$ -duž mere  $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$ .