

ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – В, Ј и Н смер

Осми двочас

асистенти: Марија Микић и Душан Дробњак

Динамички модел љубави

Желимо да математички моделирамо динамику љубавне везе. Зато ћемо посматрати динамички систем

$$(1) \quad \begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

где $a_R, a_J, p_R, p_J \in \mathbb{R}$. Са $R(t)$ описан је интензитет Ромеових осећања према Јулији у тренутку t , а са $J(t)$ интензитет Јулијиних осећања према Ромеу у тренутку t . Константе које фигуришу у систему се одређују на основу типа особа које су у вези. Наиме, параметром a_R представљен је интензитет којим је Ромео охрабрен својим осећањима, а са p_R представљен је интензитет којим је Ромео охрабрен Јулијиним осећањима, док константе a_J и p_J се аналогно дефинишу за Јулију.

Сматраћемо да када је $R(t) > 0$ Ромео има позитивна осећања према Јулији у тренутку t , када је $R(t) = 0$ Ромео је равнодушан, а када је $R(t) < 0$ његова осећања према Јулији су негативна. Желимо да детаљније прокоментаришемо константе које фигуришу у систему како би што боље моделирали динамику везе. Ако је константа p_R позитивна, онда Јулијина љубав позитивно утиче на Ромеа, повећавајући његова осећања, а ако је p_R негативно, онда Јулијина осећања негативно утичу на Ромеа, и то се манифестује Ромеовим удаљавањем од ње. Ако је константа a_R позитивна, онда је Ромео сигуран у своја осећања, а ако је a_R негативно, Ромео је несигуран и склон оклевању. Аналогно важи за константе p_J и a_J .

У моделу који ћемо користити сваки партнер може бити један од четири типа личности (ми ћемо то приказати на пример на Ромеу):

- 1) Ако је $a_R > 0$ и $p_R > 0$, Ромео је **емотивни љубавник**.
- 2) Ако је $a_R > 0$ и $p_R < 0$, Ромео је **нарцисоидни љубавник**.
- 3) Ако је $a_R < 0$ и $p_R > 0$, Ромео је **опрезан љубавник**.
- 4) Ако је $a_R < 0$ и $p_R < 0$, Ромео је **самотњак**.

Желимо да испитамо динамику љубави између наведених типова. Посматрајмо матрицу система

$$A = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\text{Tr}A = a_R + a_J \text{ и } \det A = a_R a_J - p_R p_J, \text{ а } D = \text{Tr}^2 A - 4 \det A.$$

У зависности од $\text{Tr}A$ и $\det A$ одређује се природа еквилибријума и динамика везе. Неки могући исходи везе су:

- 1) обострана љубав;
- 2) веза постаје досадна и партнери постају равнодушни;
- 3) наизменични периоди љубави и "мржње";
- 4) обострана "мржња";
- 5) љубав једног партнера расте, док код другог расте "мржња".

Интересује нас да ли ће се партнери који су исти тип добро слагати и да ли ће се и под којим условима њихова љубав повећавати током времена? То ћемо илустровати на примеру два партнера који су "емотивни љубавници".

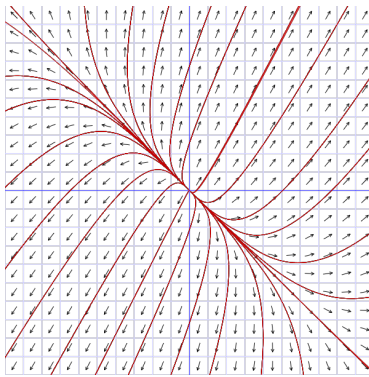
Пример 1. Нека је љубав између Ромеа и Јулије описана динамичким системом

$$(2) \quad \begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

Тада је $\text{Tr}A = 5$, $\det A = 4$ и $D = 9$, стога на основу класификације лако можемо закључити да је једини еквилибријум $X^* = (0, 0)$ нестабилан чвор. Да би смо детаљно анализирали динамику њихове љубави решићемо систем, скицирати фазни портрет и детаљно анализирати динамику у зависности од почетних услова. Сопствене вредности матрице A система су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 4$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_1 је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, а сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2 је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Опште решење система је

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

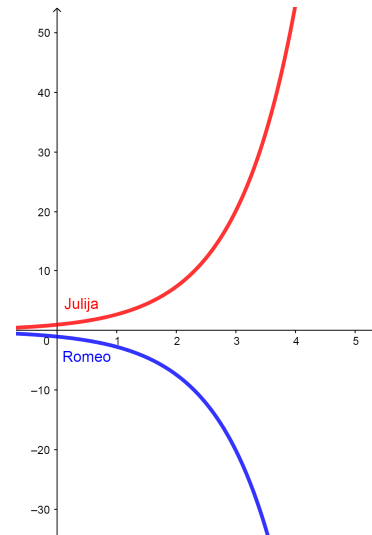
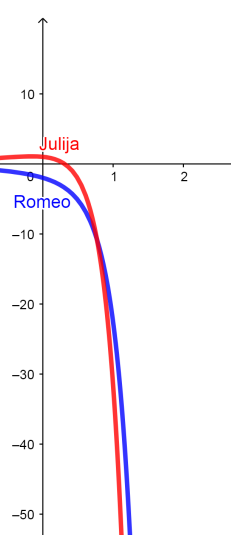
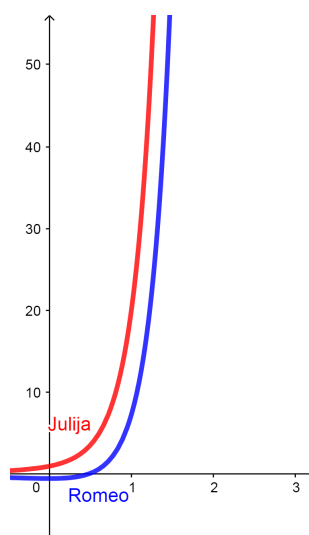
а одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



Задајмо један почетни услов нпр. $J(0) = 1$. Овај почетни услов показује да се Ромео допадао Јулији од самог почетка. Са слике се јасно види да уколико се Ромеу Јулија допадала од самог почетка, да ће исход бити обострана љубав. Занима нас да ли ће се Ромео заинтересовати за Јулију чак иако у почетку није био заинтересован. Из тог разлога посматраћемо следећа три случаја:

- 1) Ако је $R(0) = -\frac{1}{2}$, онда је $\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix}$. Тада $R(t) \rightarrow \infty$ и $J(t) \rightarrow \infty$ када $t \rightarrow \infty$.
- 2) Ако је $R(0) = -2$, онда је $\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{4t} \\ \frac{5}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}$. Тада $R(t) \rightarrow -\infty$ и $J(t) \rightarrow -\infty$ када $t \rightarrow \infty$.
- 3) Ако је $R(0) = -1$, онда је $\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \end{bmatrix}$. Тада $R(t) \rightarrow -\infty$ и $J(t) \rightarrow \infty$ када $t \rightarrow \infty$.

На сликама испод приказани су редом интензитети Ромеових и Јулијиних осећања током времена у случајевима 1), 2) и 3).



На основу слика јасно видимо да су у овом случају могућа три исхода:

- 1) обострана љубав (њихова љубав се повећава током времена);
- 2) обострана "мржња";
- 3) љубав једног партнера се повећава, док се "мржња" другог повећава.

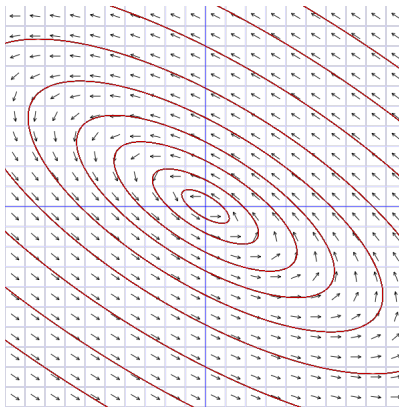
Приметимо да иако је Ромео у почетку незаинтересован, он може променити мишљење током времена. Међутим, ако је он више или подједнако незаинтересован у односу на Јулијину заинтересованост, то ће довести до негативног исхода. Тако да се може извести закључак да ако је Јулија довољно "упорна" може променити Ромеова осећања.

Пошто смо завршили анализу на примеру партнера истог типа, желимо да видимо како ће изгледати динамика љубави између партнера различитих типова. Следећи пример илуструје динамику љубави између "емотивног љубавника" и "самотњака".

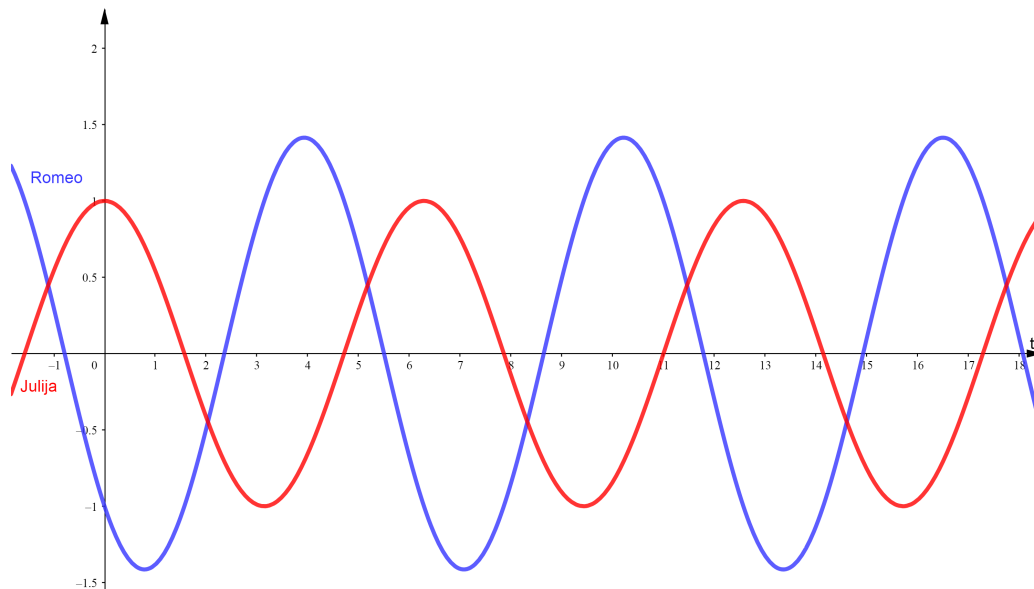
Пример 2. Нека је љубав између Ромеа и Јулије описана динамичким системом

$$(3) \quad \begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

Тада је $\text{Tr}A = 0$, $\det A = 1$ и $D = -4$, стога на основу класификације лако можемо закључити да је једини еквилибријум $X^* = (0,0)$ центар. Сопствене вредности матрице A система су $\lambda_{1,2} = \pm i$. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



Ако је нпр. $J(0) = R(0) = 1$, обоје имају позитивне емоције једно према другом на почетку, међутим како време одмиче, они ће имати периоде љубави и "мржње". Највећи део времена они се не воле или имају супротна осећања. Динамика њихове везе биће турбулентна, али никада неће бити равнодушни једно према другом истовремено. То се може видети на слици испод.

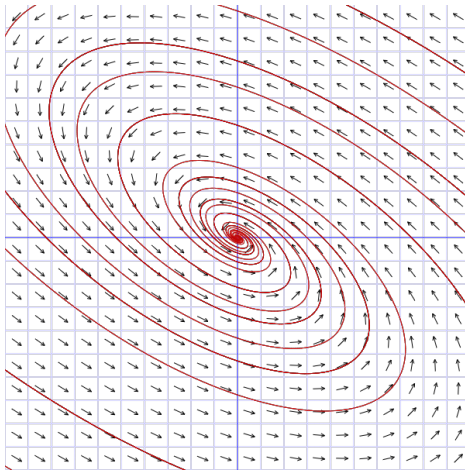


Приметимо да у претходном примеру је $|a_R| = a_J$, тј. интензитет којим је Јулија охрабрена својим осећањима једнак је интензитету којим је Ромео обесхрабрен својим осећањима. У следећем примеру илустроваћемо случај када је интензитет којим је Ромео обесхрабрен сопственим осећањима већи од интензитета којим је Јулија охрабрена својим осећањима тј. $|a_R| > a_J$.

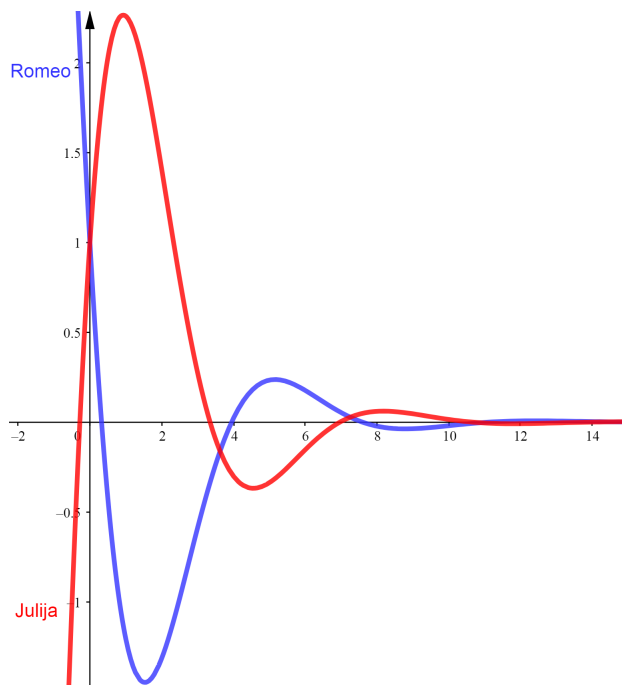
Пример 3. Нека је љубав између Ромеа и Јулије описана динамичким системом

$$(4) \quad \begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

Тада је $\text{Tr}A = -1$, $\det A = 4$ и $D = -3$, стога на основу класификације лако можемо закључити да је једини еквилибријум $X^* = (0, 0)$ стабилан фокус. Сопствене вредности матрице A система су $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



Ако је нпр. $J(0) = R(0) = 1$, приметимо да $R(t) \rightarrow 0$, $J(t) \rightarrow 0$ када $t \rightarrow \infty$. Обоје имају позитивне емоције једно према другом на почетку, међутим како време одмиче, њихове емоције осцилују и интензитет њихових емоција опада током времена и постају равнодушнији једно према друге. Такође, можемо приметити да већи део времена су њихове емоције супротне. Закључујемо да њихова веза нема срећан крај, јер постају равнодушни једно према другом. То се може видети на слици испод.

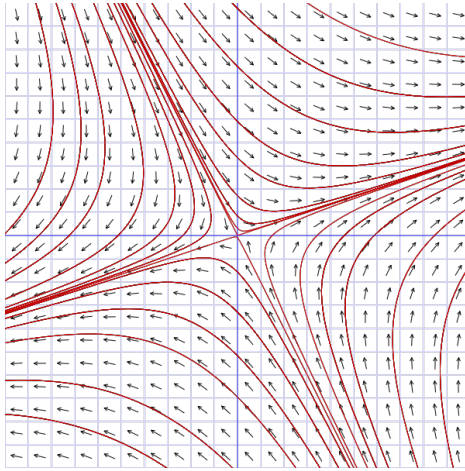


Хајде да још једним примером илуструјемо однос између два различита типа, нпр. између ”емотивног љубавника” и ”опрезног љубавника”.

Пример 4. Нека је љубав између Ромеа и Јулије описана динамичким системом

$$(5) \quad \begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$$

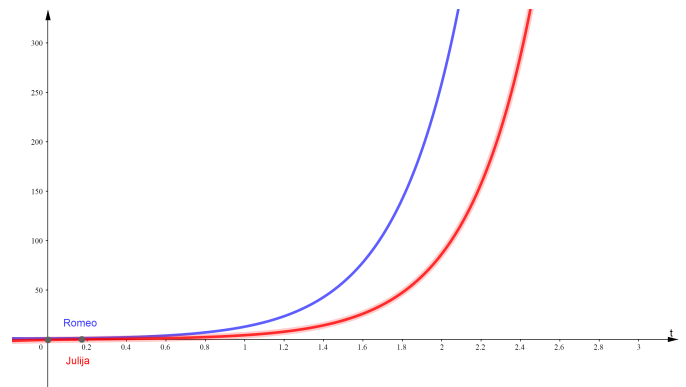
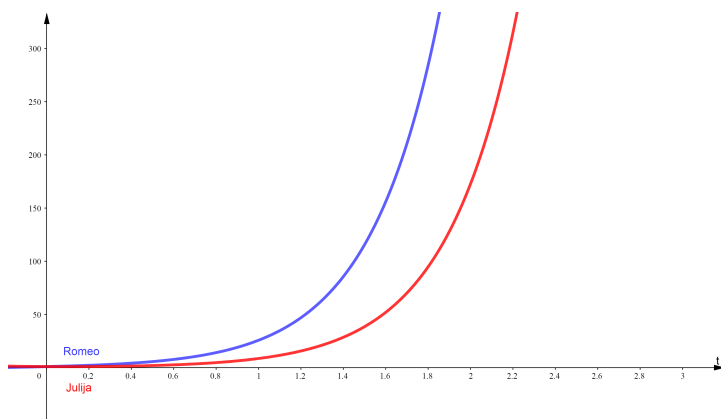
Тада је $\text{Tr}A = -1$, $\det A = -12$ и $D = 49$, па на основу класификације лако можемо закључити да је једини еквилибријум $X^* = (0, 0)$ седло. Сопствене вредности матрице A система су $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 3$. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



Задајмо један почетни услов нпр. $R(0) = 1$. Овај почетни услов показује да се Јулија допадала Ромеу од самог почетка. Посматрајмо четири случаја:

1) Ако је $J(0) = 1$, онда је се и Ромео допадао Јулији од самог почетка. Фазни портрет у том случају приказан је на слици испод лево.

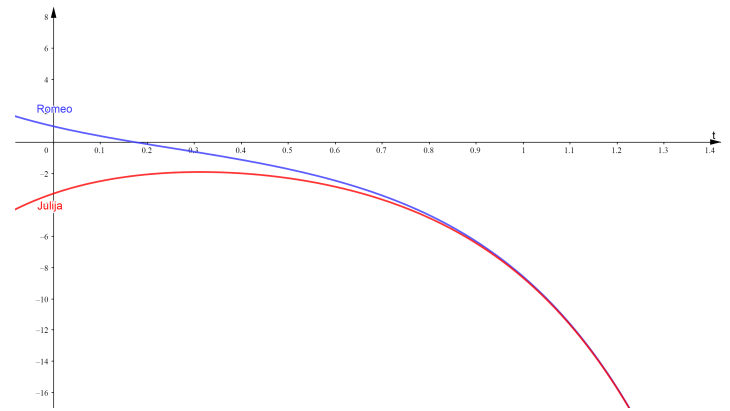
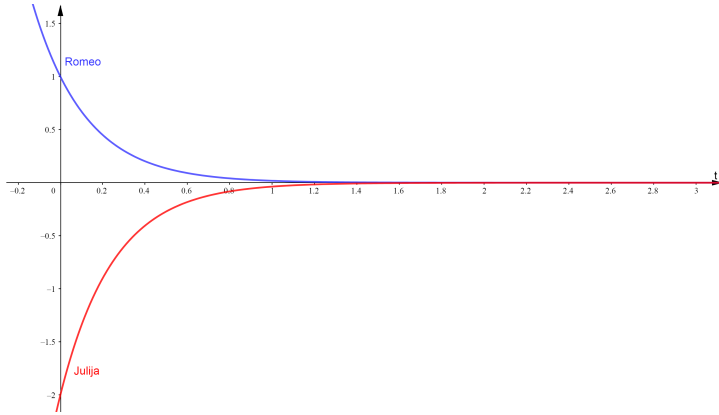
2) Ако је $J(0) = -\frac{1}{2}$, онда је Јулија на почетку била благо незаинтересована. Фазни портрет у том случају приказан је на слици испод десно.



Приметимо да у оба наведена случаја важи да $R(t) \rightarrow \infty$ и $J(t) \rightarrow \infty$ када $t \rightarrow \infty$. Приметимо да ће Јулијина осећања увек бити мања од Ромеових, а разлог због ког је то тако је што она бежи од сопствених осећања. У оба случаја закључак је да ће постојати обострана позитивна осећања која ће се повећавати током времена. Приметимо да иако је Јулија у почетку била благо незаинтересована (случај 2 и слика десно), током времена њено интересовање се повећава, толико да готово да посматрани графици исто изгледају.

3) Ако је $J(0) = -2$, онда је Јулија била више незаинтересована на почетку, него што је Ромео био заинтересован. Може се приметити да у овом случају почетни услов је такав да тачка $(1, -2)$ припада правој одређеном сопственим вектором. Фазни портрет у том случају приказан је на слици испод лево.

4) Ако је $J(0) = -3$, онда је Јулија била незаинтересованија за Ромеа више него у претходном случају. Фазни портрет у том случају приказан је на слици испод десно.



Приметимо да уколико је Јулија незаинтересована, она може променити своја осећања, али само у случају када је $|J(0)| < 2R(0)$ (случај 2). Приметимо да ако дођемо до граничног случаја (случај 3), када је $J(0) = -2$, добија се негативан исход, тј. $R(t) \rightarrow 0$ и $J(t) \rightarrow 0$, када $t \rightarrow \infty$. Оба партнера постају равнодушна током времена. Док уколико је $J(0) < -2$, оба партнера ће имати негативне емоције током времена чији ће се интензитет увећавати током времена. Тада ће $R(t) \rightarrow -\infty$ и $J(t) \rightarrow -\infty$ када $t \rightarrow \infty$. Стога ће исход бити обострана ”мржња”.