ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА – Р смер

Шести двочас

асистент: Марија Микић

1. Решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, одређивањем матрице e^{xA} у облику реда, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;   б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;   в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, где су $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Да ли је $e^{xA} \cdot e^{xB} = e^{x(A+B)}$, за свако $x \in \mathbb{R}$?

3. Нека су $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Доказати да ако је $AB = BA$, онда важи $Be^A = e^A B$.

4. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $\frac{d}{dx} e^{xA} = Ae^{xA}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $e^A = \lim\limits_{n \to \infty} (E + \frac{A}{n})^n$, где је E јединична матрица.

6. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $\det e^A = e^{TrA}$.

7. Испитати да ли постоји реална матрица A за коју је:

а) $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$;   б) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

8. Нека је $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $a_{ij} \geqslant 0$ за свако $i \neq j$ и нека је $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n = e^A$. Доказати да је $b_{ij} \geqslant 0$, за свако $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

9. Нека су $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ и нека је B инвертибилна матрица. Доказати да је $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$.

10. Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A. Доказати на два различита начина да је e^λ сопствена вредност матрице e^A.