ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА – Р смер

Десети двочас

асистент: Марија Микић

1. Решити диференцијалну једначину $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$.

2. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Решити диференцијалну једначину $(x+a)^3y'''+3(1-b)(x+a)^2y''+(3b^2-3b+1)(x+a)y'-b^3y = c$.

3. Нека су $p, q \in C(a, b)$. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ ако је познато партикуларно решење $\varphi_1(x)$, где је $\varphi_1(x) \neq 0$, за свако $x \in (a, b)$.

4. Решити диференцијалну једначину $xy'' + 2y' + xy = 1$, ако је $\varphi_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ једно партикуларно решење одговарајуће хомогене диференцијалне једначине.

5. Решити диференцијалну једначину $\sin 2x \cdot y'' - 2\cos x(3\cos x + 2)y' - 4\sin x(1 + \cos x)y = 0$.

6. Нека су функције $a_0, a_1, a_2 \in C(a, b)$ и $a_2(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Доказати да се сменом

$$u(x) = e^{\int f(x)y(x)\,dx},$$

где је $y = y(x)$ нова непозната функција, а $f \in C^1(a, b)$ и $f(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$, произвољна хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0$$

своди на Рикатијеву диференцијалну једначину.

---

1. Нека су $m, a, b \in \mathbb{R}$. Испитати осцилаторност произвољног решења диференцијалне једначине $y'' + m^2y = 0$. Колико нула има произвољно решење на интервалу $[a, b]$?

2. Нека је $q \in C(a, b)$. Доказати да свако нетривијално решење диференцијалне једначине $y'' + q(x)y = 0$ на произвољном сегменту $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ може имати само коначно много нула.

3. Нека су $p, q \in C(a, b)$. Да ли линеарно независна решења диференцијалне једначине $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ могу имати заједничких нула?

4. Нека је $q \in C(a, b)$ и $q(x) \leqslant 0$ за свако (a, b). Доказати да свако нетривијално решење диференцијалне једначине $y'' + q(x)y = 0$ има највише једну нулу на интервалу (a, b).

5. Нека су $p, q \in \mathbb{R}$. Под којим условом су неосцилаторна сва нетривијална решења диференцијалне једначине $y'' + py' + qy = 0$?

6. Нека је $a \neq 0$. Испитати осцилаторност решења диференцијалне једначине $y'' + \dfrac{a^2}{x^2}y = 0$.

7. Нека је $q \in C(a, +\infty)$, $q(x) > 0$ за свако $x \in (a, +\infty)$ и $\inf\limits_{x\in(a,+\infty)} q(x) = m > 0$. Доказати да свако нетривијално решење диференцијалне једначине $y'' + q(x)y = 0$ има бесконачно много нула на интервалу $(a, +\infty)$.

8. Испитати осцилаторност решења диференцијалне једначине $x^3y'' + xy' + (x^3 - \frac{1}{4})y = 0$ на интервалу $(0, +\infty)$.

9*. Нека је $q(x)$ непрекидна, неопадајућа и позитивна функција на интервалу $(a, +\infty)$. Нека је дата диференцијална једначина $y'' + q(x)y = 0$.
а) Испитати осцилаторност произвољног нетривијалног решења посматране једначине на интервалу $(a, +\infty)$.
б) Доказати да за сваке две суседне нуле x_n и x_{n+1}, где је $x_n < x_{n+1}$, произвољног нетривијалног решења посматране једначине, важи

$$\frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{n+1})}} \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{q(x_n)}}\,.$$