3. домаћи

Нека је дата глатка многострукост M^n. **Дистрибуција** димензије $k > 0$ на M је пресликавање $D : M \to TM$ које свакој тачки $p \in M$ додељује векторски потпростор $D_p \subset T_pM$ димензије k. Дистрибуција димензије k је **глатка** ако за сваку тачку $p \in M$ постоји околина $u \subset M$ тако да на u постоје векторска поља $X_1, \dots, X_k \subset TM$ тако да су вектори $X_1(x), \dots, X_k(x)$ база тангентне равни $T_x u$, за све $x \in u$.

1. а) Описати дистрибуције димензије 1 на многострукости. Постоје ли дистрибуције димензије 1 које нису глатке?
б) Показати да је контактна структура на контактној многострукости глатка дистрибуција кодимензије 1. (Искористити Дарбуову теорему.)

Глатка дистрибуција D на многострукости M је **инволутивна** ако за свака два векторска поља $X, Y \in D$ важи $[X, Y] \in D$.

2. а) Дати пример многострукости димензије 4 и на њој инволутивну дистрибуцију димензије 2.
б) На многострукости из дела под а) наћи дистрибуцију димензије 2 која није инволутивна.
в) Показати да дистрибуција $\ker \alpha$ није инволутивна на контактној многострукости $(V^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$.
г) Дати пример неке инволутивне дистрибуције димензије 2 на некој контактној многострукости димензије 3.

Глатка дистрибуција D на многострукости M је **интеграбилна** ако за свако $p \in M$ постоји имерзија $\iota : N \to M$, тако да $p \in i(N)$ и за све $x \in N$ важи

$$d\iota_x(T_x N) = D_{\iota(x)}.$$

Подмногострукост $\iota(N)$ се назива **интегрална многострукост** дистрибуције D.

3. Показати да је свака интеграбилна дистрибуција и инволутивна.

(На основу Фробенијусове теореме важи еквиваленција.)

4. а) Дати пример многострукости димензије 4 и на њој интеграбилну дистрибуцију димензије 2. Описати све интегралне многострукости.
б) Дати пример неке интеграбилне дистрибуције димензије 2 на некој контактној многострукости димензије 3 и описати све интегралне многострукости.
в) Показати да дистрибуција $\ker \alpha$ није интеграбилна на контактној многострукости $(V^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$.

Ако је D инволутивна дистрибуција димензије k на многострукости M, онда M можемо представити као дисјунктну унију имерзованих подмногострукости димензије k. Ова декомпозиција се назива **фолијација** многострукости M.

5. За многострукости из задатка 4. одредити фолијацију у односу на задату интеграбилну дистрибуцију.

Нека је дата контактна многострукост $(V^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$ и на њој глатка хиперповрш Σ^{2n}. У свакој тачки $p \in \Sigma$ раван $\xi_p \cap T_p\Sigma$ је или димензије $2n$ или димензије $2n-1$.

6. а) Показати да је 2-форма $d\alpha$ симплектичка на ξ.
б) Описати симплектички ортогонални комплемент $(\xi \cap T\Sigma)^{\perp} \subset \xi$ као сингуларну дистрибуцију димензије 1. Зашто не постоји отворен скуп на коме је $\xi = T\Sigma$?
в) Показати $(\xi_p \cap T_p\Sigma)^{\perp} = \xi_p \cap T_p\Sigma$, за све $p \in \Sigma$, ако је $n = 1$.

Карактеристична фолијација хиперповрши $\Sigma \subset V$ је фолијација у односу на контактну структуру ξ и придружену сингуларну дистрибуцију $(\xi_p \cap T_p\Sigma)^{\perp}$.

7. Описати карактеристичну фолијацију диска $z = 0, x^2 + y^2 \leq \pi^2$ на $\mathbb{R}^3$ где је
а) $\xi = \ker \alpha = \ker(xdy + dz)$,
б) $\xi = \ker \alpha = \ker(\cos r dz + r \sin r d\theta)$, где су (r, θ, z) цилиндричне координате на $\mathbb{R}^3$.

Нека је M^n глатка многострукост и Ω n-форма која нигде није нула (форма запремине) на M. Нека је X векторско поље на M. Јединствена функција $divX$ која задовољава $d(\iota_X\Omega) = (divX)\Omega$ се назива **дивергенција векторског поља** X.

8. Испитати да ли дивергенција векторског поља зависи од избора форме запремине.

9. Нека је дата површ Σ са формом запремине Ω. Нека је X векторско поље на Σ тако да $divX$ није нула ни у једној тачки.
а) Показати да је $\iota_X\Omega + dz$ контактна форма на $\Sigma \times \mathbb{R}$, при чему је z реална координата.
б)(*) Показати да интегралне криве векторског поља X дефинишу карактеристичну фолијацију Σ у односу на дату контактну структуру.

10. Нека је $C \subset M$ коизотропна подмногострукост симплектичке многострукости (M^{2n}, ω). Дистрибуција $(TC)^{\perp}$ се назива карактеристична дистрибуција подмногострукости C. Доказати да је $(TC)^{\perp}$ интеграбилна. (Упутство: користити формулу

$$d\omega(X,Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) + Y(\omega(Z,X)) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y).$$

(Спивак 7.13.))