Интеграли са часа 29.3.2023.

1. задатак.

$$\boxed{\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx}$$

Користимо смену

$$\boxed{x = \tan t}$$

(Претпоставимо на пример $x \in (0, \pi/2)$ да не бисмо делили нулом). Тада је

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt, \;\; 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Следи,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dx = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c.$$

Сада треба вратити промењливу x. Користимо да је $t = \operatorname{arctg} x$, као и

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^t} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Дакле,

$$\boxed{\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}) + c.}$$

2. задатак.

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx}$$

1. начин - Користимо смену

$$\boxed{x = \frac{1}{\sin t}}$$

(Претпоставимо на пример $x \in (0, \pi/2)$ да не бисмо делили нулом.) Тада је

$$dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt, \;\; \sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Следи,

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt.$$

Сада уводимо смену

$$\boxed{s = \tan(t/2)}$$

Тада је

$$\cos t = \frac{1-s^2}{1+s^2},\ \ \sin t = \frac{2s}{1+s^2},\ \ dt = \frac{2ds}{1+s^2}.$$

Следи

$$-\int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} dt = -\int \frac{(1-s^2)^2}{4s^3} ds = -\frac{1}{4}(\frac{s^{-2}}{-2} - 2\log|s| + \frac{s^2}{2}) = -\frac{1}{8}(-\frac{1}{s^2} - 4\log|s| + s^2|).$$

Овде смо стигли на часу. Сада треба вратити смену и добијено решење изазити преко x. Пошто је $s = \tan(t/2)$ и $t = \arcsin(1/x)$ морамо некако да се ослободимо полуугла. Искористићемо да је

$$\sin^2(x/2) = \frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Зато је

$$\tan(t/2) = \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}.$$

Требаће нам и

$$\cos\arcsin(1/x) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Коначно

$$s = \tan(t/2) = \tan(t/2) = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} \stackrel{*}{=} \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}},$$

при чему једнакост $*$ важи јер је $t = \arcsin(1/x)$. Сада последњу једнакост помножимо и поделимо са $x - \sqrt{x^2+1}$, па следи

$$s = \sqrt{(x-\sqrt{x^2-1})^2} = |x - \sqrt{x^2-1}|.$$

Сада можемо да се вратимо да завршимо интеграл. Пошто је

$$-\frac{1}{s^2} + s^2 = -\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} + \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = -4x\sqrt{x^2-1}$$

следи

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = -\frac{1}{8}(-\frac{1}{s^2} - 4\log|s| + s^2|) = -\frac{1}{8}(-4x\sqrt{x^2-1} - 4\log|x-\sqrt{x^2-1}|).$$

Коначно

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} + \log|x-\sqrt{x^2-1}|) + c.}$$

Приметимо да важи и

$$x - \sqrt{x^2-1} = (x-\sqrt{x^2-1})\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

па је

$$\log|x-\sqrt{x^2-1}| = -\log|x+\sqrt{x^2-1}|$$

па се резултат може написати и овако

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|) + c.}$$

2. начин - Парцијална интеграција

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2-1} \\ v(x) = x \end{array} \right\} = x\sqrt{x^2-1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx \\
&= x\sqrt{x^2-1}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2 \pm 1}{\sqrt{x^2-1}}dx \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx
\end{aligned}$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са I закључујемо

$$2I = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Решимо сада $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.
Уводимо смену $x = \frac{1}{\sin t}$. Као и горе, тада је

$$dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Следи

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = -\int \frac{1}{\sin t}dt.$$

Сада уводимо смену

$$\boxed{s = \tan(t/2)}$$

Тада је

$$\sin t = \frac{2s}{1+s^2}, \quad dt = \frac{2ds}{1+s^2},$$

па је

$$\int \frac{1}{\sin t}dt = \int \frac{ds}{s} = \log|s| + c.$$

Као и у претходном начину, треба вратити смену. Пошто је

$$s = \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}},$$

следи

$$\log|s| = \log\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}} = \log|x-\sqrt{x^2-1}|.$$

Дакле,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left|x-\sqrt{x^2-1}\right| + c.$$

Коначно

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} + \log|x-\sqrt{x^2-1}|) + c.}$$

3. начин - Користимо прву Ојлерову смену

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} = t - x}$$

Квадрирањем једнакости добијамо

$$x = \frac{t^2+1}{2t}, \;\; dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$$

као и

$$x^2 - 1 = \frac{(t^2-1)^2}{(2t)^2}.$$

Следи

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \frac{t^4-2t^2+1}{4t^3}dt.$$

Са десне стране имамо три таблична интеграла, па је

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{t^2}{2} - 2\log|t| - \frac{t^{-2}}{2}\Big) + c.$$

Сада треба вратити смену $t = x+\sqrt{x^2-1}$ и добија се резултат (исти као на претходна два начина)

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|) + c.}$$

3. задатак.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}dx}}$$

Уводимо смену $x = \tan t$ и добијамо

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\cos t}dt \overset{*}{=} \log\left|\frac{\cos x/2 + \sin x/2}{\cos x/2 - \sin x/2}\right| + c.$$

Једнакост $*$ смо показали на часу. Сада израз под логаритмом помножимо и поделимо са $\cos x/2 + \sin x/2$ и искористимо формуле за двоструки угао. Следи

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + c.$$

Сада искористимо $\frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$, па је $\frac{1}{\cos t} = \sqrt{x^2+1}$, при чему не узимамо корен са знаком минус испред, заро што је $\cos t > 0$ на задатом интервалу $t \in (0, \pi/2)$. Следи

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + c.$$

4. задатак

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}dx}$$

1. начин - парцијална интеграција

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}dx &= \left\{\begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2+1} \\ v(x) = x \end{array}\right\} = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2 \pm 1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.\end{aligned}$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са I закључујемо

$$2I = x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Интеграл са десне стране смо израчунали у претходном примеру, па следи

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|) + c.}$$

2. начин - смена $x = \tan t$. Добијамо

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{1}{\cos^3 t}dt.$$

Интеграл на десној страни се може решити увођењем смене

$$s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Тада следи
$$\int \frac{1}{\cos^3 t}dt = 2\int \frac{(1+s^2)^2}{(1-s^2)^3}ds...$$