2. домаћи

Диференцијална 1-форма на многострукости V^{2n+1}, $n \geq 1$, се назива **контактна форма** ако је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n$$

форма запремине на V. Тада кажемо $(V, \ker\alpha)$ је **контактна многострукост**. У свакој тачки x контактне многострукости V постоји хиперраван $\xi_x \subset T_xV$ која је језгро линеарног пресликавања $\alpha_x : T_xV \to \mathbb{R}$. Називамо је **контактна раван**. Скуп свих контактних равни је дистрибуција која се назива **контактна структура**. То је управо језгро форме α.

1. Нека је дата многострукост V^{2n+1} са формом запремине $\alpha \wedge (d\alpha)^n$.
а) Описати језгро од α, као и језгро од $d\alpha$.
б) Показати да за свака два линеарно независна ненула векторска поља $X, Y \in \ker\alpha$ на V^3 важи $[X, Y] \notin \ker\alpha$.
б') Показати да је услов $\dim V = 3$ неопходан.
в) Показати да постоји јединствено векторско поље R на V^{2n+1} тако да важи

$$\alpha(R) = 1 \text{ и } d\alpha(R, \cdot) = 0.$$

Назива се **Ребово векторско поље.**

2. а) Одредити Ребово векторско поље R контактне форме $\alpha = xdy + dz$ на $\mathbb{R}^3$. Описати његове трајекторије. Нацртати контактне равни дуж кружнице $z = 0, x^2 + y^2 = \pi^2$, као и у тачки $r = z = 0$.
б) Ако је $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\theta$, где су (r, θ, z) цилиндричне координате на $\mathbb{R}^3$, показати да је α контактна форма. Одредити придружено Ребово векторско поље и његове трајекторије. Нацртати контактне равни дуж кружнице $z = 0, x^2 + y^2 = \pi^2$, као и у тачки $r = z = 0$.

3. На јединичној сфери $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, $n \geq 1$, посматрамо 1-форму $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1}(x_k dy_k - y_k dx_k)$.
а) Показати да је α контактна форма и одредити придружено Ребово векторско поље. Описати његове трајекторије.
б) Показати $\ker\alpha = TS^{2n+1} \cap J(TS^{2n+1})$, при чему је $J : T\mathbb{R}^{2n+2} \to T\mathbb{R}^{2n+2}$ пресликавање дефинисано са

$$J\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}, J\frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Дакле, $J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ је пресликавање које је индуковано пресликавањем $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (iz_1, \ldots, iz_n)$.

Напомена. Кружница S^1 се такође може посматрати као контактна многострукост, при чему тражимо само α је форма запремине.

4. Нека је дата симплектичка многострукост (M, ω) са непразном границом V и нека је дато векторско поље Y које је трансверзално на границу и усмерено ка споља од M. Ако је Y Лиувилово векторско поље ($\mathcal{L}_Y\omega = \omega$) показати да је $\iota_Y\omega$ контактна форма на V. Да ли важи обрнуто? Ако је $\iota_Y\omega$ контактна форма, да ли је Y Лиувилово векторско поље у односу на ω?

5. Описати сферу из задатка 3. као границу симплектичке многострукости из задатка 4.

6. Нека је дата Риманова многострукост (L, g). Описати контактну структуру на косферном раслојењу од L уз помоћ задатка 4. (Почети од симплектичке многострукост кодиск раслојења над L.)