Пред-Хилбертов простор.

Подсетимо се дефиниције векторског поља X над пољем $\mathbb{R}$. (Подсетити се дефиниције поља из Анализе 1.)

Дефиниција. Нека је X непразан скуп. Уређена тројка $(X, +, \cdot)$ се назива векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ ако важи:

1. $(X, +)$ је Абелова (комутативна) група.

2. Операција $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ се назива множење скаларом и задовољава следеће:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, за све $x \in X$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$, за све $x \in X$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, за све $x \in X$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $1x = x$, за све $x \in X$.

Елементе скупа X називамо векторима, а елементе поља $\mathbb{R}$ скаларима.

Пример. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ је векторски простор над пољем $\mathbb{R}$, при чему је

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

за све $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и све $\lambda \in \mathbb{R}$.

Дефиниција. Скаларни производ на векторском простору X над пољем $\mathbb{R}$ је функција

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

која задовољава следеће

1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, за све $x, y, z \in \mathbb{X}$ и све $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (линеарност).

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, за све $x, y \in \mathbb{X}$ (симетричност).

3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ (позитивна дефинитност) и
$\langle x, x \rangle = 0$ акко $x = 0$ (недегенерисаност).

Став. а) Важи линеарност по другој промењљивој.

б) За сваки вектор $x \in X$ важи $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$.

Доказ. а) $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle \overset{2)}{=} \langle \lambda y + \mu z, x \rangle \overset{1)}{=} \lambda \langle y, x \rangle + \mu \langle z, x \rangle \overset{2)}{=} \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$, што је и требало показати.

2) $\langle x, 0 \rangle = \langle x, 0 + 0 \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle x, 0 \rangle$. Дакле $\langle x, 0 \rangle = 0$. Слично важи $\langle 0, x \rangle = 0$. $\square$

Дефиниција. Пред-Хилбертов простор је векторски простор који је снабдевен скаларним производом.

Пример. Скаларни производ на векторском простору $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ се може дефинисати са

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Став. Нека је X пред-Хилбертов простор. Тада за све $x, y \in X$ важи

1) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ (Коши-Шварцова неједнакост).

2) $\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$ (Неједнакост Минковског).

Доказ. 1) За свако $\lambda \in \mathbb{R}$ важи

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

Ако последњи израз посматрамо као квадратну једначину са промењљивом λ, онда закључујемо да је њена дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ мања или једнака нули, тј

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

Дакле, $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. Квадратни корен је растућа функција, па се кореновањем добија тражена неједнакост.

2)

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle,\\ &\overset{\text{К-Ш}}{\leq} \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle,\\ &= (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2.\end{aligned}$$

Кореновањем следи тражена неједнакост. □

Пример. 1) $|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ (Коши-Шварцова неједнакост).

2) $\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \cdots (x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ (Неједнакост Минковског).

Дефиниција. Нека је X пред-Хилбертов простор над пољем $\mathbb{R}$. Тада је норма вектора $x \in X$ дефинисана са

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Став. Особине норме су

1) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ акко $x = 0$.

2) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$, за све $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$ (Коши-Шварцова неједнакост).

4) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Неједнакост Минковског).

Дефиниција. Вектори $x \in X$ и $y \in X$ су ортогонални ако важи $\langle x, y\rangle = 0$.

Питагорина теорема. Ако су вектори $x \in X$ и $y \in X$ ортогонални онда важи

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Доказ. На основу линеарности скаларног производа важи

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Тиме је доказ завршен. □

Дефиниција. Нека је X пред-Хилбертов простор. Скуп вектора $e_i \in X, \ \ i \in I$ се назива ортонормирани систем ако за све $i, j \in I$ важи

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пример. Вектори $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$, $i = 1, \dots, n$, је ортонормиран систем на $\mathbb{R}^n$.

Став. Сваки ортонормиран систем је линеарно независан.

Доказ. Нека је дат $\{e_i \in X, \ \ i \in I\}$ ортонормиран систем вектора. Треба показати да за произвољне ортонормиране векторе $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ важи ако је

$$\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_m e_{i_m} = 0,$$

тада је $\lambda_1 = \cdots \lambda_m = 0$. За свако $k = 1, \dots, m$ важи

$$0 = \langle \lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_m e_{i_m}, e_{i_k} \rangle = \lambda_1 \langle e_{i_1}, e_{i_k} \rangle + \cdots + \lambda_m \langle e_{i_m}, e_{i_k} \rangle = \lambda_k.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Дефиниција. Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{e_n \in X, \ \ n \in \mathbb{N}\}$ ортонормиран систем. Реални бројеви

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$$

се називају Фуријеови коефицјенти вектора $x \in X$ у односу на ортонормиран систем $\{e_n \in X, \ \ n \in \mathbb{N}\}$.

Став. Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{e_n \in X, \ \ n \in \mathbb{N}\}$ ортонормиран систем. Тада за сваки вектор $x \in X$ и све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k||^2 \geq ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2,$$

при чему су $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ произвољни реални бројеви. Једнакост важи ако и само ако је $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$, за све $k = 1, \dots, n$.

Доказ.

$$\begin{aligned} ||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k||^2 &= \langle x, x \rangle - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \\ &= \langle x, x \rangle + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \langle x, e_k \rangle)^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 \\ &\geq \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2. \end{aligned}$$

Очигледно, једнакост важи ако и само ако је $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Став. (Беселова неједнакост) Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{e_n \in X,\ \ n \in \mathbb{N}\}$ ортонормиран систем. Тада за сваки вектор $x \in X$ важи да ред реалних бројева $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2$ конвергира и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq ||x||^2.$$

Доказ. Ако у претходном ставу искористимо $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$ важи једнакост

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

Пошто је израз на левј страни сигурно ненегативан, онда важи и

$$||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 \geq 0.$$

Тиме смо показали неједнакост $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq ||x||^2$. Дакле, тражени ред је ограничен, а пошто му је општи члан ненегативан, значи да му је низ парцијалних сума монотоно растући низ. Пошто је низ парцијалних сума и ограничен, онда је конвергентан. Дакле, тражени ред конвергира. $\square$

Последица. За свако $x \in X$ важи

$$\lim_{n \to \infty} \langle x, e_n \rangle = 0.$$

Доказ следи из Беселове неједнакости и из чињенице да општи члан конвергентног реда тежи нули.

Реални бројеви

$$\langle x, e_n \rangle$$

се називају <u>Фуријеови коефицијенти</u> вектора $x \in X$ у односу на ортонормиран систем $\{e_n \in X,\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

На основу претходне последице видимо да Фуријеови коефицијенти вектора $x \in X$ увек теже ка нули.

Да бисмо могли да дефинишемо Фуријеов ред као лимес парцијалних сума, треба нам дефиниција лимеса низа вектора.

<u>Конвергенција вектора у пред-Хилбертовом простору.</u>

Нека је X пред-Хилбертов простор.

Дефиниција. Кажемо да низ вектора $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, конвергира ка вектору $x \in X$ ако важи

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

Користимо ознаку

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Пример. 1) Ако је $X = \mathbb{R}$ конвергенција вектора је заправо лимес реалних бројева.

2) Ако је $X = \mathbb{R}^k$ тада важи да низ вектора $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$ конвергира ка вектору $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$ ако и само ако важи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + \cdots + (x_n^k - x^k)^2} = 0,$$

што је еквивалентно услову

$$\lim_{n\to\infty} x_n^j - x^j = 0,\ j = 1, \dots, k.$$

Лема. Ако низ вектора $x_n \in X$ конвергира ка вектору $x \in X$, онда је тај низ ограничен, тј. постоји $M > 0$ тако да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\| x_n \| < M.$$

Доказ. Из дефиниције конвергенције вектора, следи да низ реалних бројева $\| x_n - x \|$ конвергира, па је овај низ ограничен, тј. постоји $M_1 > 0$ тако да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\| x_n - x \| < M_1$. Следи,

$$\| x_n \| = \| x_n \pm x \| \leq \| x_n - x \| + \| x \| < M_1 + \| x \| = M.$$

за све $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Став 1. Нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Тада важи

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Приметимо да су прва два лимеса лимеси вектора, а резултат је лимес реалних бројева.

Доказ. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Треба показати да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_0$ важи $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| < \epsilon$. Пошто је низ вектора x_n конвергентан, онда на основу претходне леме следи да постоји $M > 0$ тако да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\| x_n \| < M.$$

Даље, из дефиниције конвергенције вектора следи да постоје $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_2 \in \mathbb{N}$ такви да за све $n \geq n_1$ важи $\| x_n - x \| < \frac{\epsilon}{2\|y\|}$ и за све $n \geq n_2$ важи $\| y_n - y \| < \frac{\epsilon}{2M}$. Нека је

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за све $n \geq n_0$ важи

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle \pm \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|, \\
&\leq |\langle x_n, y_n\rangle + \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|, \\
&= |\langle x_n, (y_n - y)\rangle| + |\langle (x_n - x), y\rangle|, \\
&\overset{\text{К-Ш}}{\leq} \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \|, \\
&< M\frac{\epsilon}{2M} + \| y \| \frac{\epsilon}{2 \| y \|} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Тиме је доказ завршен. □

Фуријеови редови.

Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{e_n \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$ ортонормиран систем вектора. Реални бројеви $\langle x, e_n\rangle$ се називају Фуријеови коефицијенти вектора $x \in X$ у односу на ортонормиран систем $\{e_n \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$, а ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

се назива Фуријеов ред вектора $x \in X$ у односу на ортонормиран систем $\{e_n \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$.

Дакле, дати ред је лимес низа вектора парцијалних сума $s_n = e_1 + \cdots + e_n$. (Зато нам је требала дефиниција лимеса вектора.)

Став. Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{e_n \in X, \; n \in \mathbb{N}\}$ ортонормиран систем. Тада за сваки вектор $x \in X$ и све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \| \geq \| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \|,$$

при чему су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ произвољни реални бројеви. Једнакост важи ако и само ако је $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$, за све $k = 1, \ldots, n$.

Доказ. Нека је $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Тада је

$$x - y = \Big(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k - y\Big).$$

Приметимо да је први сабирак на десној страни вектор $v_1 = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ ортогоналан на све векторе $e_k, k = 1, \ldots, n$, (тј. $\langle v_1, e_k\rangle = 0$,) а други сабирак је вектор

$v_2 = \sum_{k=1}^{n}(\langle x, e_k\rangle - \lambda_k)e_k$. Дакле, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, па можемо применити Питагорину теорему и важи

$$\| x - y \|^2 \geq \| x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k \|^2 .$$

Тиме је доказ завршен. □

Претходни став показује да је парцијална сума Фуријеовог реда вектора најбоља апроксимација тог вектора. У наставку ћемо се бавити питањем када Фуријеов ред вектора x конвергира ка том вектору x.

Дефиниција. Нека је X пред-Хилбертов простор. Ортонормиран систем вектора $\{e_n \in X,\ \ n \in \mathbb{N}\}$ је <u>потпун</u> или <u>база</u> простора X ако за свако $x \in X$ важи

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$$

Став. (Парсевалова једнакост) Ако је $\{e_n \in X,\ \ n \in \mathbb{N}\}$ потпун ортонормиран систем, онда за свако $x \in X$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2 = ||x||^2.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
||x||^2 = \langle x, x\rangle &= \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n \Big\rangle \\
&= \Big\langle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k, \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j \Big\rangle \\
&\overset{*1}{=} \lim_{n\to\infty}\Big\langle \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j \Big\rangle \\
&\overset{*2}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle x, e_j\rangle\langle e_k, e_j\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2.
\end{aligned}$$

Једнакост $*1$ важи на основу Става 1., а једнакост $*2$ важи на основу билинеарности скаларног производа. Тиме је доказ завршен. □

Пред-Хилбертов простор $C_0([-\pi,\pi])$.

Дефиниција. Функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ је <u>део по део непрекидна</u> ако је непрекидна на целом интервалу $[a,b]$ осим можда у тачкама $x_1<\cdots<x_n$ у којима f има прекид прве врсте. Дакле, за свако $k\in\{1,\dots,n\}$ постоје $\lim_{x\to x_{k-}}f(x)$ и $\lim_{x\to x_{k+}}f(x)$.

Пример. Свака непрекидна функција је део по део непрекидна. Функција $sign\, x$ је део по део непрекидна.

Важе следеће особине:

- ако је f део по део непрекидна на $[a,b]$ онда је она ограничена.

- ако је f део по део непрекидна на $[a,b]$ онда је она Риман-интеграбилна на $[a,b]$.

Дефинишемо следећи простор део по део непрекидних функција

$$\begin{aligned} C_0([-\pi,\pi]) = \Big\{ f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \;\mid\; & f \text{ део по део непрекидна},\\ & f(-\pi)=f(\pi)=(\lim_{x\to-\pi_+}f(x)+\lim_{x\to\pi_-}f(x))/2,\\ & f(x_k)=(\lim_{x\to x_{k-}}f(x)+\lim_{x\to x_{k+}}f(x))/2,\;\; k=1,\dots,n.\Big\}\end{aligned}$$

Став. $C_0([-\pi,\pi])$ је пред-Хилбертов простор.

Доказ. $C_0([-\pi,\pi])$ је векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ зато што операције сабирања две функције као и множења функције скаларом задовољавају све особине векторског простора. Дефинишимо пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : C_0([-\pi,\pi])\times C_0([-\pi,\pi])\to\mathbb{R}$ са

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

Линеарност следи на основу линеарности интеграла, симетричност на основу комутативности производа.

Остало је показати позитивну дефинитност. На основу особина интеграла сигурно важи $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\geq 0$. Покажимо још да ако је $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0$ онда мора бити $f=0$. Овде користимо да у тачкама прекида x_k, $k=1,\dots,n$, функција f узима вредност

$$f(x_k)=(\lim_{x\to x_{k-}}f(x)+\lim_{x\to x_{k+}}f(x))/2.$$

Ако је $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0$ онда је и $\int_{x_{k-1}}^{x_k}f^2(x)dx=0$, на сваком интервалу $[x_{k-1},x_k]$. Сада дефинишемо нову функцију $f_k:[x_{k-1},x_k]\to\mathbb{R}$ на следећи начин

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_{k-1},x_k),\\ \lim_{x\to x_{k-1}+}f(x), & x=x_{k-1},\\ \lim_{x\to x_k-}f(x), & x=x_k.\end{cases}$$

Дакле, функција f_k је непрекидна на целом домену. Пошто је и $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k^2(x)dx = 0$, онда је $f_k(x) = 0$, за све $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Дакле, $f(x) = 0$, за све $x \in (x_{k-1}, x_k)$ као и $\lim_{x\to x_k-} f(x) = \lim_{x\to x_{k-1}+} f(x) = 0$. Ове једнакости важе за свако $k = 1, \dots, n$. Пошто је

$f(x_k) = (\lim_{x\to x_{k-}} f(x) + \lim_{x\to x_{k+}} f(x))/2$, закључујемо и $f(x_k) = 0$, за све $x_k \in [-\pi, \pi]$.

Тиме је доказ завршен. □

Напомена. Услов

$$f(x_k) = (\lim_{x\to x_{k-}} f(x) + \lim_{x\to x_{k+}} f(x))/2,$$

$k = 1, \dots, n$, је неопходан услов да би скаларни производ био недегенерисан, тј да из једнакости $\langle f, f\rangle = 0$ следи $f = 0$. На пример, функција $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ јесте део по део непрекидна и важи

$$\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0,$$

али $f \neq 0$.

Теорема. Скуп функција

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\right\}$$

је ортонормиран систем вектора у пред-Хилбертовом простору $C_0([-\pi, \pi])$.

Доказ. Треба показати да је скаларни производ сваке функције датог скупа са самом собом једнак 1, док је скаларни производ две различите функције датог скупа једнак 0. Важи

$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}dx = 1.$$
$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kxdx = 0.$$
$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kxdx = 0.$$

Слично,

$$\langle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin^2 kxdx = 1.$$
$$\langle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\rangle \overset{n\neq k}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin kx\sin nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\frac{\cos(k-n)x - \cos(n+k)x}{2}dx = 0.$$
$$\langle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin kx\cos nxdx = 0.$$

И

$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2 kx dx = 1.$

$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \rangle \overset{n \neq k}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos kx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\cos(k-n)x + \cos(n+k)x}{2} dx = 0.$

Остале једнакости следе из симетричности скаларног производа. □

Сада када имамо ортонормирани систем функција на простору $C_0([-\pi, \pi])$ можемо дефинисати Фуријеов ред сваке функције $f \in C_0([-\pi, \pi])$. Користимо следеће ознаке.

$$\alpha_0 = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx.$$

$$\alpha_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 1.$$

$$\beta_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \sin nx dx, \quad n \geq 1.$$

Тада Фуријеов ред фунцкије $f \in C_0([-\pi, \pi])$ гласи

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx).$$

Приметимо да је претходни израз једнак

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \sin nx dx \Big).$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx dx + \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx dx \Big).$$

Дакле, Фуријеов ред функције $f \in C_0([-\pi, \pi])$ гласи и

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big)}$$

при чему је

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx., \quad n \geq 1.$$

Другим речима, $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \alpha_0$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_n$, $n \geq 1$.

Теорема. Скуп функција

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\Big\}$$

је потпун у пред-Хилбертовом простору $C_0([-\pi,\pi])$.

Напомена. Претходна теорема каже да Фуријеов ред функције $f \in C_0([-\pi,\pi])$ конвергира у норми ка f, тј. важи

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx = 0,$$

при чему је $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos kx + b_k\sin kx\Big)$ функционални низ парцијалних сума Фуријеовог реда функције f.

Дефиниција. Функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ је <u>део по део глатка</u> ако је непрекидно диференцијабилна на целом интервалу $[a,b]$ осим можда у тачкама $x_1 < \cdots < x_n$ у којима f' има прекид прве врсте. Дакле, за свако $k \in \{1,\dots,n\}$ постоје $\lim_{x\to x_{k-}} f'(x)$ и $\lim_{x\to x_{k+}} f'(x)$.

Приметимо да је свака непрекидно-диференцијабилна функција и део по део глатка.

Теорема. Свака функција $f \in C_0([-\pi,\pi])$ која је део по део глатка једнака је свом Фуријеовом реду тачка по тачка, тј важи

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos nx + b_n\sin nx\Big).$$

У доказу ове теореме је битан услов

$$f(-\pi) = f(\pi) = (\lim_{x\to-\pi_+} f(x) + \lim_{x\to\pi_-} f(x))/2$$

зато што се функција продужује на $\mathbb{R}$ да буде 2π-периодична.

Напомена. Претходна теорема каже да Фуријеов ред део по део глатке функције $f \in C_0([-\pi,\pi])$ конвергира тачка по тачка ка функцији f.

Напомена. За равномерну конвергенцију Фуријеовог реда неопходан је још и услов да је f диференцијабилна свуда (па и непрекидна), као и да је f' део по део непрекидна функција.

Пример. Користећи Фуријеов ред функције $f(x) = x$ показати да важи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Да бисмо тражили Фуријеов ред ове функције, мало ћемо модификавати дату функцију да би важио услов

$$f(-\pi) = f(\pi) = (\lim_{x\to-\pi_+} f(x) + \lim_{x\to\pi_-} f(x))/2.$$

Посматрамо функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Сада важи $f \in C_0([-\pi, \pi])$ и f је део по део глатка па на основу претходне теореме Фуријеов ред ове функције конвергира тачка по тачка ка тој функцији. Напоменимо још да ако функција промени вредност у коначном броју тачака, њен Риманов интеграл се не мења. Важи

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0, \quad n \geq 0,$$

зато што је подинтегрална функција непарна. И важи

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1,$$

што се може израчунати парцијалном интеграцијом. Следи

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Специјално, за $x = \frac{\pi}{2}$ следи

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Еквивалентно,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Покажимо још једну примену Фуријеових редова.

(**Парсевалова једнакост**.) Парсевалова једнакост за део по део глатку функцију $f \in C_0([-\pi, \pi])$ гласи

$$\| f \|^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Може се представити и овако

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Пример. Уз помоћ Парсевалове једнакости за функцију $f(x) = x$ показати да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

На основу претходног примера имамо $a_n = 0$, $n \geq 0$ и

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \ \ n \geq 1.$$

Следи,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2},$$

тј.

$$\frac{1}{\pi} \frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Закључујемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$