Тејлоров развој.

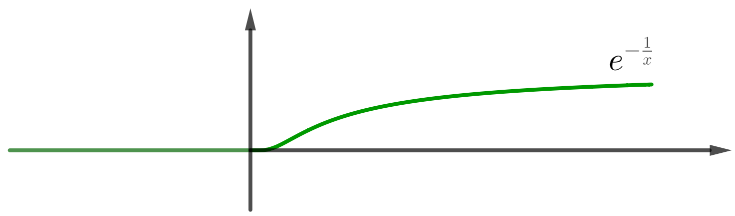
Став. Нека је дат степени ред
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$
на домену конвергенције D и нека је $R>0$ полупречник конвергенције. Тада је функција f бесконачно диференцијабилна на некој околини тачке x_0 и важи
$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Доказ. Јасно је да је $a_0=f(x_0)$. Ако је $R>0$ полупречник конвергенције, онда на сваком затвореном интервалу $[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)$ степени ред равномерно конвергира, па можемо диференцирати члан по члан. Дакле,
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},$$
па је
$$f'(x_0)=a_1.$$
Даље је
$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$
па је
$$f''(x_0)=2a_2.$$
И тако, за свако $k\in\mathbb{N}$ имамо
$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$
па је
$$f^{(k)}(x_0)=k(k-1)\cdots 2a_n=k!a_k.$$
Тиме је доказ завршен. □

Дефиниција. Нека је функција f бесконачно диференцијабилна у околини тачке x_0. Тада се степени ред
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
назива Тејлоров ред функције f у околини тачке x_0.

Тејлоров ред функције f у околини тачке $x_0=0$ се назива Маклоренов ред функције f.

Дефиниција. Функција f се назива аналитичка у тачки x_0 ако је једнака суми свог Тејлоровог реда у некој околини тачке x_0.



Пример. Даћемо пример функције која није аналитичка. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Ова функција је бесконачно диференцијабилна. Наиме, важи

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$$

док први извод у тачки $x = 0$ рачунамо по дефиницији

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}, & h > 0 \\ \frac{0}{h}, & h < 0 \end{cases} = 0.$$

Даље налазимо први извод функције f'

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$$

док први извод у тачки $x = 0$ рачунамо по дефиницији

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^2}, & h > 0 \\ \frac{0}{h}, & h < 0 \end{cases} = 0.$$

И тако даље, долазимо до n-тог извода и важи

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Зато Маклоренов развој гласи

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots = 0.$$

Пошто функција f није једнака нули ни у једној околини нуле, онда она није једнака свом Маклореновом развоју, дакле није аналитичка.

Пример. Елементарне функције: степене, експоненцијалне, тригонометријске итд су аналитичке функције. То ћемо ускоро показати.

Развој елементарних функција у Маклоренов ред.

Подсетимо се. Нека је функција f бесконачно диференцијабилна у околини тачке x_0. Тада се степени ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

назива Тејлоров ред функције f у околини тачке x_0. Тејлоров ред функције f у околини тачке $x_0 = 0$ се назива Маклоренов ред функције f. Функција f се назива аналитичка у тачки x_0 ако је једнака суми свог Тејлоровог реда у некој околини тачке x_0.

У наставку ћемо показати да су елементарне функције аналитичке.

Експоненцијална функција e^x.

Функција $f(x) = e^x$ је бесконачно диференцијабилна и важи

$$f^{(n)}(x) = e^x, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Дакле,

$$f^{(n)}(0) = 1, \;\; n \in \mathbb{N},$$

па је Маклоренов ред функције e^x једнак

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Овај ред конвергира за све $x \in \mathbb{R}$, што можемо видети користећи последицу Кошијевог кореног критеријума.

Сада треба проверити да ли је Маклоренов ред функције e^x једнак тој функцији. Користићемо Маклоренов развој функције e^x и Лагранжев облик остатка.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

при чему је $0 < |\xi| < |x|$. Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

преласком на лимес када $n \to \infty$, следи

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \;\; x \in \mathbb{R}.}$$

Претходна једнакост се може показати и на следећи начин.

Лема. Ако је $f'(x) = f(x)$ и $f(0) = 1$ тада је $f(x) = e^x$.

Доказ. Посматрамо функцију $g(x) = f(x)e^{-x}$. Тада је

$$g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} = 0.$$

Дакле, функција g је константа. Пошто је $g(0) = 1$ следи да је $g(x) = 1$ у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$, тј. $f(x) = e^x$. $\square$

Став. Важи једнакост

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказ. Покажимо да функција $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ задовољава услове претходне леме, тј. да је $f(0) = 1$ и да је $f'(x) = f(x)$. Пошто је $0! = 1$ следи $f(0) = 1$. Даље, степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ конвергира тачка по тачка за све $x \in \mathbb{R}$, дакле равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу. Зато можемо применити теорему о диференцирању степеног реда и важи

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1}.$$

Ако у последњем реду уведемо смену $n - 1 = m$, видимо да је ред на десној страни једнак почетном реду $f(x)$. Дакле, важи $f'(x) = f(x)$. На основу претходне леме следи да је $f(x) = e^x$. Дакле,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Напомена. Упоредимо Маклоренов ред

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

и Маклоренов развој са Пеановим остатком

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Приметимо да је Маклоренов ред дефинисан за све $x \in \mathbb{R}$, док је Маклоренов развој са Пеановим остатком дефинисан само у околини нуле. Даље, остатак Маклореновог реда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

је управо $o(x^n)$, тј

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{k-n}}{k!} \overset{*}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lim_{x \to 0} \frac{x^{k-n}}{k!} = 0.$$

Једнакост $*$ важи на основу теореме о замени места лимеса и реда, коју можемо применити зато што дати ред конвергира равномерно на затвореном интервалу око нуле, на пример на интервалу $[-1, 1]$.

Тригонометријска функција - синус

Функција $f(x) = \sin x$ је бесконачно диференцијабилна и важи

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \sin x, \\ f^{(4n+1)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\sin x, \\ f^{(4n+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

за све $n = 0, 1, 2 \ldots$

Дакле,

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(0) &= 0, \\ f^{(4n+1)}(0) &= 1, \\ f^{(4n+2)}(0) &= 0, \\ f^{(4n+3)}(0) &= -1, \end{aligned}$$

за све $n = 0, 1, 2 \ldots$. Следи да је Маклоренов ред функције $\sin x$ једнак

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Овај ред конвергира за све $x \in \mathbb{R}$.

Сада треба проверити да ли је Маклоренов ред функције $\sin x$ једнак тој функцији. Користићемо Маклоренов развој функције $\sin x$ и Лагранжев облик остатка

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

при чему је $0 < |\xi| < |x|$. Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = 0,$$

преласком на лимес када $n \to \infty$, следи

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \ x \in \mathbb{R}.}$$

Тригонометријска функција - косинус

Функција $f(x) = \cos x$ је бесконачно диференцијабилна и важи

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4n+1)}(x) &= -\sin x, \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\cos x, \\ f^{(4n+3)}(x) &= \sin x, \end{aligned}$$

за све $n = 0, 1, 2 \dots$

Дакле,

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(0) &= 1, \\ f^{(4n+1)}(0) &= 0, \\ f^{(4n+2)}(0) &= -1, \\ f^{(4n+3)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

за све $n = 0, 1, 2 \dots$. Следи да је Маклоренов ред функције $\cos x$ једнак

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Овај ред конвергира за све $x \in \mathbb{R}$. Слично као код функције $\sin x$, уз помоћ Маклореновог развоја, проверава се да је Маклоренов ред функције $\cos x$ једнак функцији $\cos x$.

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \ x \in \mathbb{R}.}$$

Степена функција.

Функција $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ је бесконачно диференцијабилна и важи

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ &\vdots \\ f^k(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \end{aligned}$$

за све $k \in \mathbb{N}$. Дакле,

$$f^k(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Користићемо ознаку

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Дакле, Маклоренов ред функције $(1+x)^\alpha$ је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Одредимо област конвергенције овог степеног реда.

1) Ако $\alpha \in \mathbb{N}$ онда важи $\binom{\alpha}{n} = 0$, за све $n \geq \alpha + 1$. Дакле тада ред $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ има само коначно много чланова, па конвергира за све $x \in \mathbb{R}$.

2) Ако $\alpha \notin \mathbb{N}$ тада је $\binom{\alpha}{n} \neq 0$, па рачунамо полупречник конвергенције

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Остало је још да проверимо у крајњим тачкама $x = \pm 1$. (Показује се уз помоћ Рабеовог критеријума, који није предвиђен за градиво Анализе 2.)

• Ако је $x = 1$ онда ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$$

апсолутно конвергира за све $\alpha \geq 0$, условно конвергира за све $-1 < \alpha < 0$ и дивергира за све $\alpha \leq -1$.

• Ако је $x = -1$ онда ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n.$$

апсолутно конвергира за све $\alpha \geq 0$ и дивергира за све $\alpha < 0$.

Специјално, ако је $\alpha \leq -1$, област конвергенције Маклореновог реда $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ је $(-1, 1)$, а ако је $\alpha \geq 0$ онда је област конвергенције $[-1, 1]$.

Уз помоћ Маклореновог развоја и Лагранжевог облика остатка проверава се да је

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ \ x \in (-1, 1).}$$

Пример. Наћи Маклоренов ред функција $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1-x}$.
Тада је

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ \ x \in (-1, 1)$$

и

$$\frac{1}{1-x} = (1+(-x))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \ x \in (-1, 1).$$

Логаритамска функција.

Нека је $f(x) = \log(1+x)$, при чему је $x \in (-1, \infty)$.

Приметимо да је

$$\log(1+x)' = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \;\; x \in (-1,1).$$

На основу Њутн-Лајбницове формуле важи

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Једнакост $*$ важи зато што дати степени ред равномерно конвергира на затвореном интервалу $[0, x] \subset (-1, 1)$. Слично се проверава и

$$f(0) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

на сваком затвореном интервалу $[x, 0] \subset (-1, 1)$. Дакле, следи

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

за све $x \in (-1, 1)$. Покажимо још да једнакост важи и у тачки $x = 1$. Приметимо да је област конвергенције овог степеног реда $(-1, 1]$. Пошто је функција $f(x) = \log(1+x)$ непрекидна са леве стране у тачки $x = 1$ важи

$$f(1) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lim_{x \to 1_-} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Једнакост $*$ важи зато што дати степени ред равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу $[1-\epsilon, 1] \subset (-1, 1]$. Дакле, важи једнакост

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \;\; x \in (-1, 1].}$$

Пошто је функција $\log(1+x)$ једнака свом Маклореновом реду на интервалу $(-1, 1]$ онда је она аналитичка.