Теорема о диференцирању функционалног низа. Нека је дат низ диференцијабилних функција $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ и нека важи:

1) постоји $x_0 \in (a,b)$ тако да низ реалних бројева $f_n(x_0)$ конвергира ка неком $c \in \mathbb{R}$,

2) функционални низ $f_n' : (a,b) \to \mathbb{R}$ равномерно конвергира ка функцији $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Тада

- функционални низ f_n равномерно конвергира ка некој функцији f,

- функција f је диференцијабилна и важи $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, за свако $x \in (a,b)$. Последња једнакост значи

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$

за свако $x \in (a,b)$.

Доказ. -Докажимо прво да f_n равномерно конвергира. Користићемо Кошијев критеријум. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Треба наћи $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ и за све $x \in (a,b)$ важи $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Из услова 1) знамо да је низ реалних бројева $f_n(x_0)$ Кошијев, дакле постоји неко $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_1$ важи $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Из услова 2) знамо да постоји неко $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_2$ и за све $x \in (a,b)$ важи $|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Нека је $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Тада за све $m > n \geq n_0$ и све $x \in (a,b)$ важи

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_n(x) \pm f_m(x_0) \pm f_n(x_0)| \\ &\leq |f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|.\end{aligned}$$

Нека је $h(x) = f_m(x) - f_n(x)$. Тада је израз у првој загради једнак $h(x) - h(x_0)$ а то је даље на основу Лагранжеве теореме о средњој вредности једнако $h'(\xi)(x - x_0)$, за неко $\xi \in (x_0, x)$. Пошто је $h'(\xi) = f_m'(\xi) - f_n'(\xi)$ и $|x - x_0| \leq (b-a)$ закључујемо

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|(b-a) + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

-Нека је $x_0 \in (a,b)$ произвољна тачка. На основу Њутн-Лајбницове формуле важи

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(x_0).$$

Преласком на лимес добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - c.$$

Пошто f_n' равномерно конвергира онда лимес и интеграл мењају место па важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - c.$$

Диференцирањем последње једнакости добијамо

$$\Big(\int_{x_0}^{x} g(t)dt\Big)' = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)'.$$

Пошто је $\int_{x_0}^{x} g(t)dt = G(x) - G(x_0)$, где је G примитивна функција за g, тј $G' = g$, следи да је $(\int_{x_0}^{x} g(t)dt)' = G'(x) = g(x)$. Дакле,

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Теорема о диференцирању функционалног реда. Нека је дат низ диференцијабилних функција $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$. Ако:
1) постоји $x_0 \in (a,b)$ тако да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвергира ка неком $c \in \mathbb{R}$ и
2) функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвергира ка функцији $g : (a,b) \to \mathbb{R}$,
тада функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно конвергира и важи

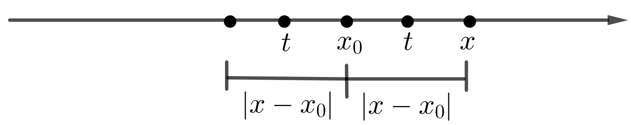
$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Доказ. Посматрамо низ парцијалних сума $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Пошто је коначна сума диференцијабилних функција диференцијабилна функција, следи да је $s_n(x)$ диференцијабилна, за свако $n \in \mathbb{N}$. Важи:
1) низ реалних бројева $s_n(x_0)$ конвергира ка $c \in \mathbb{R}$,
2) низ $s_n'(x)$ равномерно конвергира ка функцији g.
На основу теореме о диференцирању функционалног низа закључујемо да $s_n(x)$ равномерно конвергира ка некој диференцијабилној функцији $s(x)$ и важи $s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)$. Дакле

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Пример. Испитати диференцијабилност функције $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^6}$, $x \in \mathbb{R}$.
Свака функција $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^6}$ је диференцијабилна. Даље важи:
1) Ако је $x_0 = 0$ онда је $f_n(x_0) = 0$ па и $s_n(0) = 0$, а константан низ је увек конвергентан.
2) $f_n'(x) = \frac{\cos n^2 x}{n^4}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвергира (Вајерштрас).
Следи на основу претходне теореме да је $s(x)$ диференцијабилна функција.



Степени редови.

Дефиниција. Нека је дат низ реалних бројева a_n, $n \in \mathbb{N}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Функционални ред дефинисан са

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

се назива степени ред.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, при чему је $a_n = 1$, $x_0 = 0$.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, при чему је $a_n = n^2$, $x_0 = 0$.

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, $a_n = \frac{1}{n}$ и $x_0 = 0$.

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ и $x_0 = 0$.

Дефиниција. Скуп свих $x \in \mathbb{R}$ за које степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ конвергира тачка по тачка назива се област конвергенције степеног реда. Област конвергенције ћемо означити са D.

Дакле, када говоримо о области конвергенције, мислимо на конвергенцију тачка по тачка.

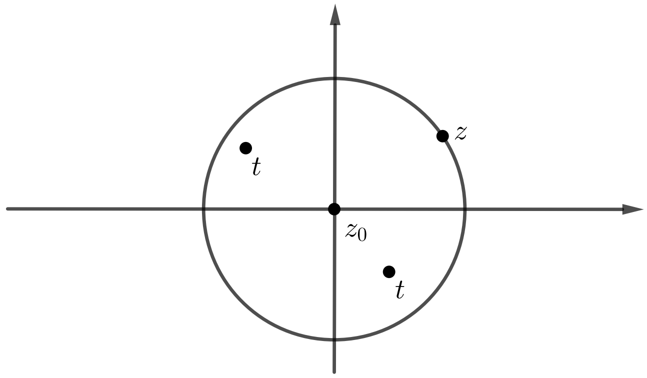
У наставку ћемо се бавити описивањем области конвергенције степеног реда у зависности од низа a_n и од тачке $x_0 \in \mathbb{R}$. Приметимо да сваки степени ред конвергира у тачки x_0.

Пример 1. Степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, конвергира тачка по тачка за све $x \in (-1, 1)$. Ако је $|x| \geq 1$ онда општи члан реда не тежи нули, па ред дивергира.

Став. Ако степени ред конвергира у тачки $x \in \mathbb{R}$, тј. $x \in D \subset \mathbb{R}$, онда степени ред апсолутно конвергира за све $t \in \mathbb{R}$ при чему је $|t - x_0| < |x - x_0|$. Дакле важи и $t \in D$. Другим речима, ако степени ред конвергира за фиксирано x онда он апсолутно конвергира на целом отвореном интервалу дужине $2|x - x_0|$ са центром у x_0. (Погледати слику.)

Доказ. Нека је $t \in \mathbb{R}$ произвољно тако да важи $|t - x_0| < |x - x_0|$. Тада је

$$|a_n (t - x_0)^n| = |a_n (x - x_0)^n| \left| \frac{t - x_0}{x - x_0} \right|^n \overset{*}{<} m |q|^n,$$



за неко $m > 0$ и $|q| < 1$. Објаснимо неједнакост $*$. Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ конвергира, следи да општи члан тежи нули, дакле $\lim_{n\to\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$. Сваки конвергентан низ је ограничен, па постоји $m > 0$ тако да је

$$|a_n(x-x_0)^n| < m,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Ако означимо $q = \frac{t-x_0}{x-x_0}$, онда је $|q| < 1$ и имамо

$$|a_n(t-x_0)^n| < m|q|^n.$$

Сада можемо да искористимо први поредбени критеријум за редове. Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} m|q|^n$ конвергира, за $|q| < 1$, следи и да ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t-x_0)^n|$ конвергира. Дакле ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$ конвергира апсолутно (па и обично у тачки t). $\square$

Из претходног става закључујемо да је област конвергенције D увек интервал. Тај интервал може бити отворен, затворен или са једне стране отворен са друге затворен, што ћемо видети у наставку.

Дефиниција. Полупречник или радијус конвергенције степеног реда је

$$R = \sup\{|x-x_0| \mid x \in D\}.$$

Дакле, радијус конвергенције, зависи од домена. На пример, ако је $D = \{x_0\}$ онда је $R = 0$. Ако је $D = \mathbb{R}$ онда је $R = \infty$.

Напомена. Студент се може запитати зашто се овај број назива полупречником или радијусом. Наиме, ако посматрамо степене редове над комплексним бројевима, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, при чему је поново a_n низ реалних бројева, а $z_0 \in \mathbb{C}$ комплексан број, онда важи следеће: Ако $z \in D \subset \mathbb{C}$ и ако је $||t-z_0|| < ||z-z_0||$ онда и $t \in D$. Другим речима, ако степени ред конвергира у тачки $z \in \mathbb{C}$ онда он конвергира за све комплексне бројеве који се налазе у кругу полупречника $||z-z_0||$ и центра z_0. Погледати слику.

У наставку испитујемо област конвергенције D у зависности од полупречника конвергенције.

Став. 1) Ако је $R = 0$ онда је $D = \{x_0\}$.

2) Ако је $R = \infty$ онда је $D = \mathbb{R}$.

3) Ако је $0 < R < \infty$ онда је $(x_0 - R, x_0 + R) \subset D \subset [x_0 - R, x_0 + R]$.

Доказ. 1) Ако претпоставимо да постоји још неко $x \neq x_0$ за које степени ред конвергира, тј такво да $x \in D$ онда не важи $\sup\{|x - x_0| \mid x \in D\} = 0$.

2) Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Тада постоји $x_1 \in D$ тако да је $|x - x_0| < |x_1 - x_0| < R$, па на основу претходног става следи $x \in D$.

3) Нека је $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ произвољна тачка. Треба показати $x \in D$. Пошто је $|x - x_0| < R$, а R је најмање горње ограничење скупа $\{|x - x_0| \mid x \in D\}$, следи да постоји $x_1 \in D$ тако да је $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. На основу претходног става, и цео интервал дужине $2|x_1 - x_0|$ са центром у x_0 мора припадати скупу D. Пошто тачка x припада том интервалу, онда припада и скупу D.

Нека је $x \in D$ произвољна тачка. Треба показати $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$. Ако претпоставимо супротно, $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ онда је $|x - x_0| > R$, што је у контрадикцији са дефиницијом полупречника R. Наиме, $x \in D$ а на основу дефинциије следи $R \geq |x - x_0|$, за све $x \in D$. $\square$

Напомена. Приметимо да се особина 3) претходног става може формулисати на следећи начин: ако је $|x - x_0| < R$ онда $x \in D$, а ако је $|x - x_0| > R$ онда $x \notin D$. Дакле, ако је $|x - x_0| = R$ онда претходни став не даје одговор. Тачан облик интервала D, тј да ли је отворен, полу-отворен или затворен, зависи од случаја до случаја. На пример:

у случају реда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ област конвергенције је $D = (-1, 1)$;

у случају реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, област конвергенције је $D = [-1, 1)$;

у случају реда$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, област конвергенције је $D = [-1, 1]$.

Теорема. (Коши-Адамарова формула) Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ је

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Доказ. Претпоставимо прво $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, \infty$. Нека је $x \in \mathbb{R}$ такво да важи

$$|x - x_0| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Тада је

$$|x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

па важи

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} > 1.$$

Дакле, општи члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ не тежи нули, па овај ред дивергира. Закључујемо, $x \notin D$. Еквивалентно, ако $x \in D$ онда је

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Преласком на супремум по свим $x \in D$ следи

$$R \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Сада треба показати да важи једнакост. Претпоставимо да је $R < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Тада постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да је $R < |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Из друге неједнакости следи

$$|x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

тј.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} < 1.$$

На основу Кошијевог кореног критеријума следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ конвергира, а пошто из апсолутне конвергенције следи и обична следи и да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ конвергира. Дакле, $x \in D$, па на основу дефиниције полупречника конвергенције следи

$$|x - x_0| \leq R,$$

што је у контрадикцији са претпоставком $R < |x - x_0|$. Закључујемо

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Остало је још да размотримо случајеве $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \infty$.

Ако је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ онда је, за свако $x \in \mathbb{R}$, и

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = 0.$$

Па на основу Кошијевог кореног критеријума ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ конвергира, па и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ конвергира. Дакле, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ конвергира. Дакле, $R = \infty$.

Слично, ако је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ онда за свако $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ важи

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \infty.$$

Следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ дивергира за све $x \neq x_0$, па је $R = 0$. □

Последица. Ако постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ онда је полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ једнак

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Доказ. Присетимо се формуле

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Дакле, ако постоји $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ онда је $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, па на основу Коши-Адамарове формуле важи да је полупречник конвергенције

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Тиме је доказ завршен. □

Напомена. Приметимо да смо у доказу Коши-Адамарове формуле показали да за све $x\in(x_0-R,x_0+R)$ степени ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ апсолутно конвергира.

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$. Пошто је $a_n=1$, на основу Коши-Адамарове формуле је $R=1$. Дакле, пошто је $x_0=0$ онда ред конвергира за све $x\in(-1,1)$. У границама интервала испитујемо посебно. Ако је $x=\pm1$, ред дивергира, пошто општи члан не тежи нули.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$, при чему је $a_n=n^2$, $x_0=0$. На основу Коши-Адамарове формуле следи $R=1$. У случају $x=\pm1$ општи члан не тежи нули, дакле област конвергенције је $D=(-1,1)$.

Пример 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, На основу Коши-Адамарове формуле следи $R=1$. У случају $x=1$ ред дивергира, а у случају $x=-1$ ред конвергира на основу Лајбницовог правила. Дакле област конвергенције је $D=[-1,1)$.

Пример 3. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)n}{n}x^n$. Област конвергенције је $D=(-1,1]$.

Пример 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$. Област конвергенције је $D=[-1,1]$.

Пример 4. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^22^n}x^n$. Област конвергенције је $D=[-2,2]$.

Равномерна конвергенција степених редови.

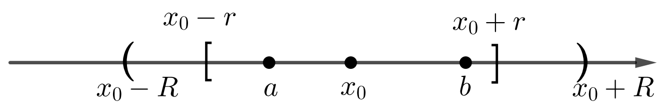
Подсетимо се дефиниције. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ равномерно конвергира ако низ његових парцијалних сума $s_n(x)$ конвергира равномерно. Неопходан услов равномерне конвергенције реда, је да функционални низ f_n равномерно конвергира ка нули.

На пример степени ред $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ конвергира тачка по тачка на интервалу $(-1,1)$, али не конвергира равномерно, зато што x^n не конвергира равномерно ка нули на $(-1,1)$. Међутим, ако уместо отвореног интервала $(-1,1)$ посматрамо било који затворени интервал $[a,b]\subset(-1,1)$ на њему овај степени ред равномерно конвергира. О томе нам говори наредни став.

Став. Степени ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу $[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)\subset D$, при чему је $R>0$ полупречник конвергенције.

Доказ. Тада постоји $0<r<R$ тако да је

$$[a,b]\subset[x_0-r,x_0+r]\subset(x_0-R,x_0+R)$$



(погледати слику). Тада за све $x \in [a, b]$ важи

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n||x - x_0|^n \leq |a_n|r^n.$$

Применимо Вајерштрасов критеријум за равномерну конвергенцију.

1) За све $x \in [a, b]$ и све $n \in \mathbb{N}$ важи $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n|r^n$.

2) Ред реалних бројева $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n$ конвергира. Наиме,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x_0 + r - x_0)|^n.$$

Пошто важи $x = x_0 + r \in (x_0 - R, x_0 + R)$ онда на основу претходне напомене следи да степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0 + r - x_0))^n$ апсолутно конвергира, тј. степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x_0 + r - x_0)|^n$ конвергира.

Дакле, испуњена су оба услова Вајерштрасовог критеријума, што значи да степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу $[a, b] \subset D$. $\square$

Због равномерне конвергенције сада можемо искористити теореме о замени места лимеса и реда, замени места интеграла и реда и диференцирању функционалног реда.

Теорема. Нека је дат степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ и нека је D његова област конвергенције и R полупречник конвергенције. Нека је $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ при чему је домен функције s управо скуп D. Тада важи

а) Функција s је непрекидна у свакој тачки $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

б) Функција s се може интегралити члан по члан на сваком затвореном интервалу $[a, b] \subset D$.

в) Функција s је диференцијабилна на интервалу $(x_0 - R, x_0 + R)$ и може се диференцирати члан по члан, тј.

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Доказ. а) Функција $a_n(x - x_0)^n$ је непрекидна, за свако $n \in \mathbb{N}$, па пошто ред $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ равномерно конвергира на интервалу $x \in [a, b] \subset D$ онда је и сума реда $s(x)$ непрекидна функција на $(x_0 - R, x_0 + R)$.

б) Функција $a_n(x - x_0)^n$ је Риман-интеграбилна, зато што је непрекидна, за свако $n \in \mathbb{N}$. Пошто ред $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ равномерно конвергира на интервалу

$[a,b] \subset D$ онда је и сума реда $s(x)$ Риман-интеграбилна функција на $[a,b]$ и важи

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n dx.$$

в) Нека је $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ произвољна тачка. Показаћемо да је сума реда диференцијабилна функција у околини тачке x. Приметимо да постоји интервал $[a,b]$ тако да је $x \in [a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. Проверићемо да ли су испуњени услови теореме о диференцирању функционалног реда.

1) У тачки $x = x_0$ степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ једнак је нули, дакле конвергира.

2) Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу $[a,b] \subset D$. То ћемо показати уз помоћ Коши-Адамарове формуле. Наиме,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

зато што је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Дакле, степени редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ имају исти полупречник конвергенције, па и степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ равномерно конвергира на сваком затвореном интервалу $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Дакле, на основу теореме о диференцирању степеног реда следи да у околини тачке $x \in (a,b) \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ степени ред можемо диференцирати члан по члан, тј.

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Тиме је доказ завршен. □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. На основу Коши-Адамарове формуле следи да је $R = \infty$. Дакле, домен конвергенције овог реда је $D = \mathbb{R}$. Следи да је сума реда непрекидна функција $f(x)$ и да је

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

при чему је $0! = 1$.