Функционални редови.

Као што смо појам низа реалних бројева уопштили на појам функционалног низа, исто ћемо урадити и за редове. Дакле, ако је $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, низ реалних бројева, њему можемо придружити ред реалних бројева $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција. Функционални ред је ред функција, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, тј.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Функционалном низу $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, придружујемо функционални низ парцијалних сума $s_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ дефинисан са

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= f_1(x), \\
s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\
&\ \vdots \\
s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).
\end{aligned}$$

Пример. Ред реалних бројева је функционални ред, при чему су функције $f_n(x) = f(n)$ константне, тј не зависе од $x \in X$. На пример, $f_n(x) = \frac{1}{n}$.

Пример. Примери функционалних редова су $\sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x + \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ и многи други.

Дефиниција. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира тачка по тачка на скупу X ако функционални низ његових парцијлних сума $s_n(x)$ конвергира тачка по тачка на скупу X. Дакле, конвергенција тачка по тачка на скупу X заправо значи конвергенцију реда у свакој тачки $x_0 \in X$.

Став. Ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира тачка по тачка на скупу X, тада функционални низ $f_n(x)$ конвергира тачка по тачка ка нули.

Доказ. Ако је $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ онда је и $\lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x)$ па је

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = s(x) - s(x) = 0,$$

за свако $x \in X$. Дакле, ако ред конвергира тачка по тачка онда општи члан конвергира тачка по тачка ка нули. $\square$

Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} x - \frac{1}{n}$ не конвергира ни за једно $x \in \mathbb{R}$, па самим тим не конвергира ни тачка по тачка. Наиме, општи члан овог реда је $f_n(x) = x - \frac{1}{n}$ и важи $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$. Дакле, неопходан услов да овај ред конвергира је да је $x = 0$. Међутим, и када је $x = 0$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Пример. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in [0, 1]$ дивергира за $x = 1$, зато што му тада општи члан не тежи нули. Овај ред конвергира тачка по тачка ка функцији

$s(x) = \frac{x}{1-x}$, за све $x \in [0, 1)$. Наиме, пошто је $s_n(x) = \frac{x - x^n}{1-x}$ следи да за свако $x \in [0, 1)$ важи $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{x}{1-x}$.

Сада уводимо јачи облик конвергенције функционалних редова, исто као код функционалних низова.

Дефиниција. Кажемо да функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира ако низ парцијалних сума $s_n(x)$ конвергира равномерно.

Став. Ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира равномерно тада функционални низ $f_n(x)$ конвергира равномерно ка нули.

Доказ. Ако $s_n(x)$ равномерно конвергира ка $s(x)$ онда и низ $s_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ равномерно конвергира ка функцији $s(x)$, па њихова разлика $f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ равномерно конвергира ка нули. Доказ следи из линеарности равномерног лимеса (погледати Став о линеарности са прошлог часа.) $\square$

Пример. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in [0, 1)$ не конвергира равномерно, зато што му општи члан не тежи равномерно ка нули.

Став. Ако функционални ред конвергира равномерно, онда он конвергира тачка по тачка.

Доказ. Ако функционални ред конвергира равномерно, то по дефиницији значи да функционални низ његових парцијалних сума конвергира равномерно. Из равномерне конвергенције функционалног низа следи конвергенција тачка по тачка. Па пошто онда функционални низ парцијалних сума конвергира тачка по тачка, то по дефиницији значи да функционални ред конвергира тачка по тачка. $\square$

Напомена. Обрнуто не мора да важи. Дакле, ако функционални ред конвергира тачка по тачка на X, онда он не мора да конвергира равномерно. Пример је ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in [0, 1)$.

Аналогно Кошијевом критеријуму за конвергенцију редова реалних бројева имамо и следеће ставове.

Став. (Кошијев критеријум конвергенције функционалних редова тачка по тачка) Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира тачка по тачка ако и само ако важи да за свако $x \in X$ и за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ важи

$$|f_m(x) + \cdots + f_{n+1}(x)| < \epsilon.$$

Доказ. Применимо Кошијев критеријум за конвергенцију функционалних низова тачка по тачка на низ парцијалних сума. (Тај Кошијев критеријум је предзадњи став 8. недеље.)

Став. (Кошијев критеријум равномерне конвергенције функционалних редова.) Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира равномерно ако и само ако важи да за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ и за све $x \in X$ важи

$$|f_m(x) + \cdots + f_{n+1}(x)| < \epsilon.$$

Доказ. Применимо Кошијев критеријум за равномерну конвергенцију функционалних низова на низ парцијалних сума. (Тај Кошијев критеријум је задњи став 8. недеље.)

Дефиниција. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ апсолутно конвергира тачка по тачка (равномерно) ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ конвергира тачка по тачка (равномерно).

Став. Ако функционални ред апсолутно конвергира тачка по тачка (или равномерно), тада тај функционални ред и конвергира тачка по тачка (или равномерна).

Доказ. Применимо Кошијев критеријум за конвергенцију тачка по тачка (или равномерну конвергенцију) функционалних низова.

Напомена. Обрнуто не мора да важи:
а) Функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n},\ x \in \mathbb{R}$$

конвергира тачка по тачка, али апсолутно дивергира тачка по тачка (тј $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ не конвергира тачка по тачка).
б) Функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n},\ x \in [0,1]$$

конвергира равномерно, али апсолутно дивергира равномерно (тј $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n},\ x \in [0,1]$ не конвергира равномерно).

*****Докажимо а) и б).

а) На основу Лајбницовог критеријума знамо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конвергира. Означимо ту суму са c. Тада је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = xc$. Дакле дати функционални ред конвергира ка функцији $s(x) = cx$.

Међутим, ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ не конвергира ни за једно $x \neq 0$.

б) Означимо низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ са s_n. Тада је низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$ једнак xs_n.

Да бисмо показали равномерну конвергенцију ка функцији $s(x) = cx$ треба показати

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |xs_n - xc| = 0.$$

Из дела под а) знамо $\lim_{n\to\infty} s_n = c$. Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |xs_n - xc| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x| \cdot |s_n - c| = 0.$$

Приметимо да је услов $x \in [0,1]$ важан за равномерну конвергенцију. Да имамо $x \to \infty$ онда тражени супремум не би тежио нули.

Са друге стране, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n},\ x \in [0,1]$ не конвергира равномерно зато што не конвергира ни тачка по тачка.

Став. (Вајерштрасов критеријум конвергенције функционалних редова) Нека је дати функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Ако

1) за све $x \in X$ и све $n \in \mathbb{N}$ важи $|f_n(x)| \leq c_n$, за неки низ реалних бројева c_n, $n \in \mathbb{N}$,

2) ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира.

Доказ. Користићемо претходни став. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. На основу 2) и Кошијевог критеријума конвергенције редова реалних бројева постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ важи

$$|c_m + \cdots + c_{n+1}| < \epsilon.$$

Сада користимо 1). Дакле, за дато $n_0 \in \mathbb{N}$ и за све $m > n \geq n_0$ и све $x \in X$ важи

$$|f_m(x) + \cdots + f_{n+1}(x)| < |f_m(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x)| < c_m + \cdots + c_{n+1} < \epsilon.$$

На основу Кошијевог критеријума равномерне конвергенције редова, следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира. $\square$

Напомена. Приметимо да смо доказали да заправо $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ апсолутно равномерно конвергира.

Пример. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 e^{-nx}}{3^n}$ равномерно конвергира за све $x \in [0, \infty)$, што можемо видети уз помоћ Вајерштрасовог критеријума:

1) $\left|\frac{n^3 e^{-nx}}{3^n}\right| < \frac{n^3}{3^n}$, за све $x \in [0, \infty)$ и све $n \in \mathbb{N}$,

2) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ конвергира, што се може видети уз помоћ Кошијевог кореног критеријума јер је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{3}$.

Пример. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n e^{-nx}}{n!}$ равномерно конвергира за све $x \in [0, \infty)$, што можемо видети уз помоћ Вајерштрасовог критеријума слично као у претходном примеру.

Теорема о замени места два лимеса. Нека је дат функционални низ $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања домена X функција f_n и нека важи:

1) низ f_n равномерно конвергира ка функцији $f : X \to \mathbb{R}$ и

2) за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = b_n$, где је b_n, $n \in \mathbb{N}$ низ реалних бројева.

Тада важи

- низ b_n, $n \in \mathbb{N}$, конвергира и

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Последња једнакост значи

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Доказ. - Из Анализе 1 знамо да низ реалних бројева конвергира ако и само ако је Кошијев. Докажимо да је низ b_n Кошијев. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Треба наћи $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ важи $|b_m - b_n| < \epsilon$. Пошто функционални низ f_n равномерно конвергира (услов 1)), тада, на основу Кошијевог критеријума равномерне конвергенције функционалних низова, следи да постоји неко $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m > n \geq n_0$ и све $x \in X$ важи $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Пошто неједнакост важи за све $x \in X$, онда она важи и када x тежи x_0. Преласком на лимес у последњој неједнакост добијамо да за дато n_0, за све $m > n \geq n_0$ и све $x \in X$ важи

$$|\lim_{x \to x_0} f_m(x) - \lim_{x \to x_0} f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

тј. $|b_m - b_n| < \epsilon$.

- Покажимо $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Пошто је b_n Кошијев низ, онда је он конвергентан, дакле постоји $b \in \mathbb{R}$ тако да је $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Дакле, треба показати да је $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Треба наћи $\delta > 0$ тако да за све $x \in X, x \neq x_0$ важи: ако је $0 < |x - x_0| < \delta$ онда је $|f(x) - b| < \epsilon$. Пошто ћемо користити три неједнакости, прелазимо на $\frac{\epsilon}{3}$.
• На основу једнакости $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ знамо да постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_1$ важи $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{3}$.
• На основу услова 1) знамо да постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_2$ и за све $x \in X$ важи $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.
Нека је $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.
• На основу услова 2) важи $\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = b_{n_0}$, тј, постоји $\delta > 0$ тако да за све $x \in X, x \neq x_0$ важи: ако је $0 < |x - x_0| < \delta$ онда је $|f_{n_0}(x) - b_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$.
На основу све три неједнакости као и неједнакости троугла закључујемо да за пронадјено $\delta > 0$ и за све $x \in X, x \neq x_0$ важи: ако је $0 < |x - x_0| < \delta$ онда је

$$|f(x) - b| < |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| + |b_{n_0} - b| < \epsilon.$$

Тиме је доказ завршен. □

Последица. Нека је дат низ непрекидних функција $f_n : X \to \mathbb{R}$. Ако низ f_n равномерно конвергира ка функцији $f : X \to \mathbb{R}$ онда је и f непрекидна функција.

Доказ. Треба показати да је $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, за произвољно $x_0 \in X$. (Ако је $x_0 \in X$ тачка у којој су функције f_n непрекидне, онда подразумевамо да је x_0 тачка нагомилавања скупа X, зато што дефиниција непрекидности функције у изолованој тачки нема смисла). Пошто су функције f_n непрекидне у x_0 онда важи $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ (тј $b_n = f_n(x_0)$). Дакле, испуњена су оба услова из теореме о замени места два лимеса, па следи

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Тиме је доказ завршен. □

Пример. Већ смо показивали да функционални низ $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ конвергира тачка по тачка ка функцији $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1), \end{cases}$ али не конвергира равномерно.

То смо показали преко дефиниције. Међутим, исто можемо закључити и на основу претходне последице, зато што су функције f_n непрекидне, а гранична функција f је прекидна.

Пример. Испитати равномерну конвергенцију низа $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Функције f_n су непрекидне, али $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (0,1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ је прекидна функција. Следи да f_n не конвергира равномерно ка f на скупу $[0,1]$.

Теорема о замени места лимеса и реда. Нека је дат функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где је $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ функционални низ, и нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања домена X. Нека важи:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира ка функцији $s : X \to \mathbb{R}$ и

2) за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = b_n$, где је b_n, $n \in \mathbb{N}$ низ реалних бројева.

Тада важи

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира и

-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{x\to x_0} s(x)$.

Последња једнакост значи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Доказ. Низ парцијалних сума $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ задовољава следеће:
1) s_n равномерно конвергира ка функцији $s(x)$, што следи из дефиниције равномерне конвергенције функционалног реда);
2) За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\lim_{x\to x_0} s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = b_1 + \cdots + b_n$.
Сада можемо да применимо теорему о два лимеса. Следи,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \\
&\overset{*1}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} s_n(x) \\
&\overset{*2}{=} \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{x\to x_0} s(x),
\end{aligned}$$

при чему $*1$ важи зато што лимес и коначна сума комутирају, а $*2$ важи на основу теореме о два лимеса. $\square$

Последица. Нека је дат функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где је $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ низ непрекидних функција. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира ка функцији $s : X \to \mathbb{R}$ онда је и s непрекидна функција.

Доказ. Треба показати да је $\lim_{x\to x_0} s(x) = s(x_0)$, за произвољно $x_0 \in X$. Пошто су функције f_n непрекидне у x_0 онда важи $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$. Пошто важи и равномерна конвергенција реда, испуњена су оба услова из теореме о замени места лимеса и реда, па следи

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = s(x_0).$$

Ова последица се може доказати и на други начин: пошто су функције f_n непрекидне, онда је и њихов коначан збир непрекидна функција. Дакле $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ је низ непрекидних функција. Пошто равномерно конвергира ка функцији $s(x)$, онда је на основу претходне последице и $s(x)$ непрекидна функција. □

Пример. Испитати непрекидност функције $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^6 x}{n^4}$.
Свака од функција $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^4}$ је непрекидна. Ред равномерно конвергира на основу Вајерштрасовог критеријума: пошто је $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ конвергира, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^4}$ равномерно конвергира. На основу последице следи да је s непрекидна функција.

Теорема о замени места лимеса и интеграла. Нека је дат низ Риман-интеграбилних функција $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако низ f_n равномерно конвергира ка функцији $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ тада је и f Риман-интеграбилна функција и важи
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.
Последња једнакост значи

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Теорема о замени места суме и интеграла. Нека је дат низ Риман-интеграбилних функција $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира ка функцији $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ тада је и s Риман-интеграбилна функција и важи
$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.
Последња једнакост значи

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказ. Посматрамо низ парцијалних сума $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Тада s_n равномерно конвергира ка функцији $s(x)$ и свака функција s_n је Риман-интеграбилна, као коначна сума Риман-интеграбилних функција. Дакле, можемо применити теорему о замени места лимеса и интеграла. Следи да је s Риман-интеграбилна функција и

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n dx \overset{\mathrm{T}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Пример. Испитати да ли се ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{n^2}$, $x \in [0,1]$ може интегралити члан по члан (тј. да ли ред и интеграл комутирају).

Пошто је свака функција $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{n^2}$ интеграбилна (зато што је непрекидна), треба још проверити равномерну конвергенцију. Користимо Вајерштрасов критеријум: $|f_n(x)| \leq \frac{\operatorname{arctg} 1}{n^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{n^2}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира. Следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{n^2}$ равномерно конвергира, па на основу претходне теореме можемо интегралити члан по члан.