Став. (Кошијев корени критеријум.) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима.

1) Ако је

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

2) Ако је

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Доказ. 1) Ако је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ то значи да је највећа тачка нагомилавања низа $\sqrt[n]{a_n}$ мања од 1, па су и све друге тачке нагомилавања низа $\sqrt[n]{a_n}$ такође мање од 1. Следи да постоји неко $q \in (0,1)$ тако да је $\sqrt[n]{a_n} < q$ за све $n \in \mathbb{N}$, осим највише за њих коначно много. Дакле, важи $a_n < q^n$, за све $n \geq n_0$. Сада можемо да применимо први поредбени критеријум. Прво $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ конвергира за $q \in (0,1)$ тада и $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ конвергира за $q \in (0,1)$, па на основу првог поредбеног критеријума и ред $\sum_{n\geq n_0} a_n$ конвергира. Коначно, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Ако је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ то значи да постоји подниз низа a_n који конвергира неком броју $r > 1$. Дакле, бесконачно много чланова низа a_n се налази у свакој ϵ-околини броја $r > 1$. То значи да овај подниз сигурно не тежи ка нули, па самим ти ни цео низ a_n не тежи ка нули. Дакле ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. $\square$

Напомена. Ако је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ онда Кошијев критеријум не даје одговор. Као пример могу послужити исти редови као у напомени код Даламберовог критеријума. Ако је $a_n = \frac{1}{n}$ онда је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ а ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Међутим, ако је $a_n = \frac{1}{n^2}$ и онда је $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ али ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Пример. Испитати да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ конвергира.

Пошто је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}} = \frac{1}{5}$, следи на основу Кошијевог кореног критеријума да ред конвергира.

Пример. Испитати да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ конвергира.

Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e^2}$$

и $\frac{1}{e^2} < 1$ следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ конвергира.

Напомена. Из анализе 1 је позната неједнакост

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

То значи да је Кошијев корени критеријум јачи од Даламберовог. Дакле, ако можемо да применимо Даламберов критеријум, онда сигурно можемо и Кошијев корени критерујум. Да, обрнуто не важи следи из наредног примера.

Пример. Нека је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дат на следећи начин

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n}, a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}, \;\; n = 1, \ldots \infty.$$

Тада је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}\Big)^n = \infty$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0.$$

Дакле, Даламберов критеријум не даје одговор. С друге стране важи

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

па ред конвергира на основу Кошијевог кореног критеријума.

• Овај лимес супериор се проверава на следећи начин. Имамо два подниза низа a_n, то су $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ и $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$. Тада и низ $\sqrt[n]{a_n}$ има два подниза, и то су

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2n}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3^{\frac{n}{2n-1}}}.$$

Први подниз је константан па је и његова тачка нагомилавања та константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$. За други подниз важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{\frac{n}{2n-1}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Дакле, имамо две тачке нагомилавања низа $\sqrt[n]{a_n}$ и то су $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Већа је $\frac{1}{\sqrt{2}}$ па је то уједно и лимес супериор низа $\sqrt[n]{a_n}$.

Редови са произвољним члановима.

Став. (Лајбницов критеријум) Нека је $a_n \geq 0$ опадајући низ реалних бројева који конвергира ка нули. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ конвергира.

Доказ. Посматрамо низ парних парцијалних сума s_{2n}.Тада је

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Дакле, овај низ је опадајући. Пошто је ограничен одоздо са $-a_1$ следи да је и конвергентан, тј

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A.$$

Сада посматрамо низ непарних парцијалних сума s_{2n+1}. Пошто је

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1},$$

преласком на лимес добијамо

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = A.$$

Дакле, следи да низ парцијалних сума s_n конвергира. □

Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума.

Дефиниција. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се назива алтернирајући ред ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n a_{n+1} < 0$. На пример, ред облика $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ је алтернирајући ред.

Слично као код несвојственог интеграла уводимо апсолутну и условну конвергенцију реда.

Дефиниција. Кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Став. Ако ред апсолутно конвергира, онда он конвергира.

Доказ. Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан онда на основу Кошијевог критеријума, за свако $\epsilon > 0$ постоји n_0 тако да за све $m > n \geq n_0$ важи

$$|a_m| + |a_{m-1}| + \cdots |a_{n+1}| < \epsilon.$$

Сада, на основу неједнакости троугла важи

$$|a_m + a_{m-1} + \cdots a_{n+1}| \leq |a_m| + |a_{m-1}| + \cdots |a_{n+1}| \epsilon.$$

Па конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можемо доказати уз помоћ Кошијевог критеријума. □

Напомена. Обрнуто не мора да важи, из обичне конвергенције реда не мора да следи и апсолутна конвергенција. У том случају, када ред конвергира, али апсолутно дивергира, кажемо да тај ред условно конвергира. Пример такве конвергенције је ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

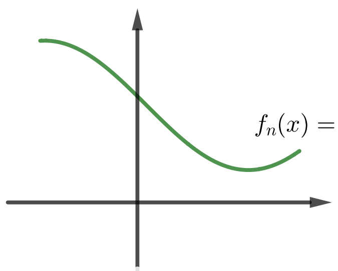
Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{2^n}{n!}$ конвергира апсолутно, па и обично.

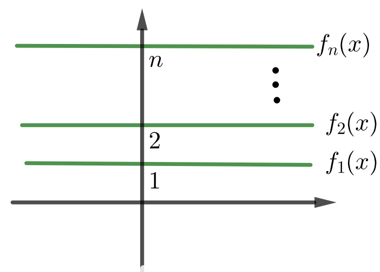
Функционални низови.

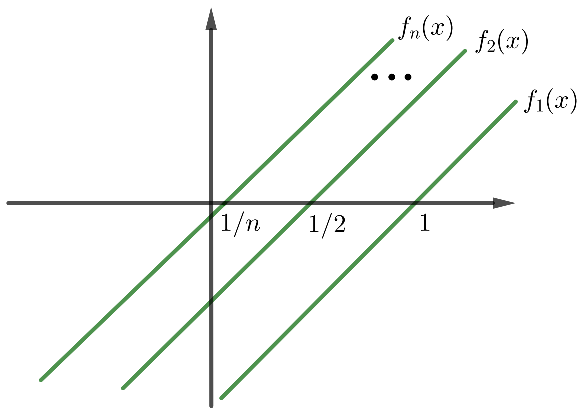
До сада смо се сусрели са низовима реалних бројева a_n, $n \in \mathbb{N}$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи да је a_n реалан број. Сада ћемо уопштити овај појам, на низове функција.

Дефиниција. Функционални низ је низ функција, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Домен низа функција је скуп $X \subset \mathbb{R}$. За свако $x \in X$ низ $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, је низ реалних бројева.

Пример 1. Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ произвољна функција. Тада је $f_n(x) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, константан низ. Дакле, сви чланови низа су међусобно једнаки. (Погледати слику лево.)







Пример 2. $f_n(x) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Овај функционални низ је заправо низ реалних бројева. Свака функција је константа. (Погледати слику десно.)

Пример 3. У претходна два примера функције низа или не зависе од n или не зависе од x. Функције низа углавном зависе од оба параметра. Такав је пример $f_n(x) = x - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

У наставку ћемо се бавити конвергенцијом функционалних низова.

Дефиниција. Функционални низ f_n, $n \in \mathbb{N}$, конвергира у тачки x_0 ка вредности $c \in \mathbb{R}$ ако важи

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c.$$

Дакле, ово је лимес реалних бројева, па се њиме нећемо много бавити.

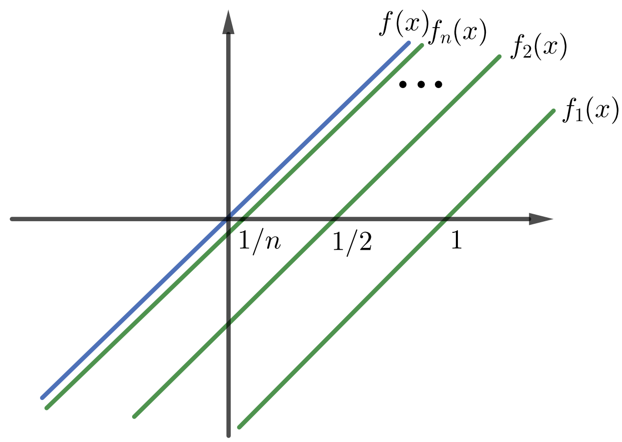
Дефиниција. Функционални низ f_n, $n \in \mathbb{N}$, конвергира тачка по тачка ка функцији f ако за свако $x \in X$ важи

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Дакле, за свако фиксирано $x \in X$ имамо лимес низа реалних бројева. Еквивалентно, за свако $x \in X$ и за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ (које зависи од x и од ϵ) тако да за све $n \geq n_0$ важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Конвергенције тачка по тачка заправо значи конвергенција у свакој тачки $x \in X$.



Пример 1. Константан функционални низ $f_n(x) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, конвергира тачка по тачка функцији f.

Пример 2. Функционални низ $f_n(x) = n$ не конвергира тачка по тачка ни једној функцији зато што је $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$.

Пример 3. Функционални низ $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ конвергира тачка по тачка функцији $f(x) = x$. Наиме, за произвољно $x \in X$ и за произвољно $\epsilon > 0$ можемо узети $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Тада за све $n \geq n_0$ важи, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Приметимо, да можемо узети једно исто n_0 за све $x \in X$.

Пример 4. Функционални низ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисан са $f_n(x) = x^n$ конвергира тачка по тачка ка функцији $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$

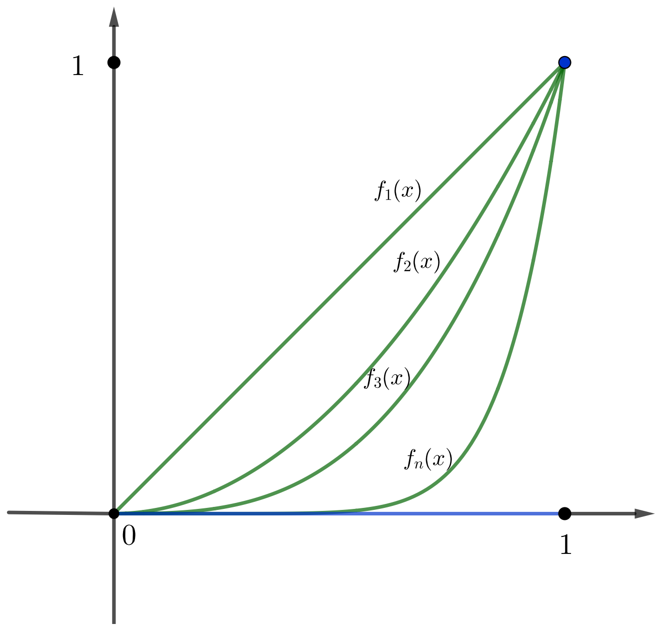
Пример 5. Функционални низ $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x > 0$, конвергира ка функцији $f(x) = \pi/2$.

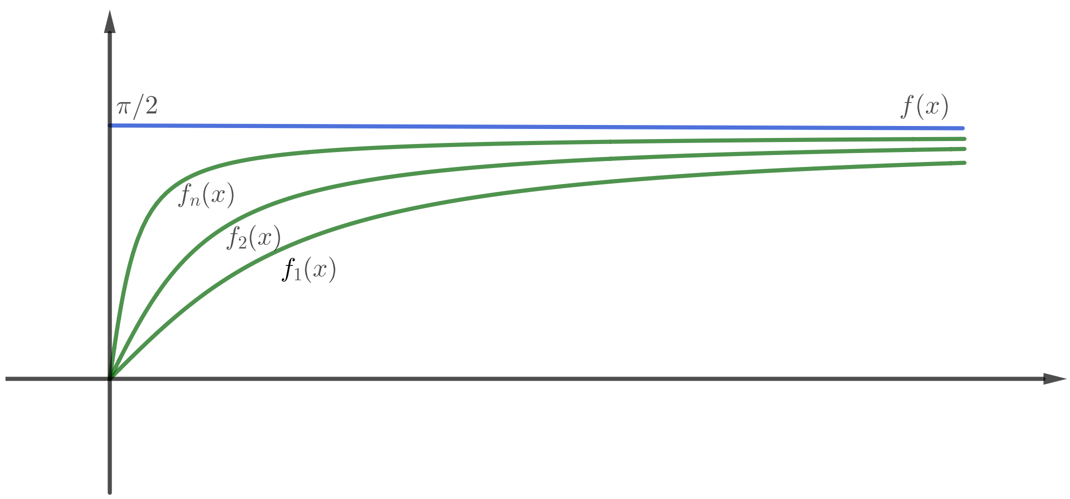
Дефиниција. Функционални низ f_n, $n \in \mathbb{N}$, равномерно конвергира ка функцији f ако за свако ϵ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ (које зависи од ϵ) тако да за све $n \geq n_0$ и за све $x \in X$ важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Став. Ако функционални низ конвергира равномерно, онда он конвергира и тачка по тачка.

Доказ. Следи директно из дефиниције. Код равномерне конвергенције за свако $\epsilon > 0$ постоји n_0 које зависи само од тог ϵ. То једно n_0 се може искористити код конвергенције тачка по тачка за свако $x \in X$. $\square$





Напомена. Обрнито не мора да важи. Ако функционални низ конвергира тачка по тачка, он не мора да конвергира равномерно. Пример таквог низа је $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисан са $f_n(x) = x^n$, као и $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x > 0$.

Став. Функционални низ f_n конвергира равномерно ка функцији f ако и само ако важи

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Доказ. По дефиницији лимеса низа реалних бројева једнакост $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0$ значи да за свако $\epsilon>0$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ тако да за све $n\geq n_0$ важи

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon.$$

Пошто је $|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, за све $x\in X$ следи управо дефиниција равномерне конвергенције. □

Пример 1. Константан функционални низ $f_n(x)=f(x)$, $n\in\mathbb{N}$, конвергира равномерно ка функцији f.

Пример 2. Функционални низ $f_n(x)=n$ не конвергира равномерно ни ка једној функцији, зато што не конвергира тачка по тачка.

Пример 3. Функционални низ $f_n(x)=x+\frac{1}{n}$ конвергира равномерно функцији $f(x)=x$. Када смо показивали да овај функционални низ конвергира тачка по тачка, објаснили смо да избор n_0 не зависи од $x\in X$.

Пример 4. Функционални низ $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ дефинисан са $f_n(x)=x^n$ не конвергира равномерно ка функцији $f(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x\in[0,1).\end{cases}$ Покажимо то уз помоћ последњег става. Пошто је

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\geq\sup_{x\in[0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1)}|x^n|=1,$$

за свако $n\in\mathbb{N}$, преласком на лимес резултат остаје 1. Дакле, не важи $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0$ па функционални ред f_n не конвергира равномерно ка функцији f.

Пример 5. Функционални низ $f_n(x)=\operatorname{arctg}nx$, $x>0$, не конвергира равномерно ка функцији $f(x)=\pi/2$. Наиме,

$$\sup_{x>0}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x>0}|\operatorname{arctg}nx-\pi/2|\geq\sup_{x=\frac{1}{n^2},n\in\mathbb{N}}|\operatorname{arctg}nx-\pi/2|=\pi/2.$$

за свако $n\in\mathbb{N}$. Дакле, преласком на лимес када $n\to\infty$, резултат остаје $\pi/2$, па функционални низ f_n не конвергира равномерно.

Став. (Линеарност равномерног лимеса) Ако функционални низови f_n и g_n равномерно конвергирају ка функцијама f и g, онда функционални низ f_n+g_n равномерно конвергира ка функцији $f+g$ и за сваку константу λ низ λf_n равномерно конвергира ка λf.

Доказ. Из неједнакост

$$|f_n+g_n-(f+g)|\leq|f_n-f|+|g_n-g|$$

следи

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))|\leq\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|+\sup_{x\in X}|g_n(x)-g(x)|.$$

Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Пошто је $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ онда постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_1$ важи

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$$

и слично због $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |g_n(x) - g(x)| = 0$ постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_2$ важи

$$\sup_{x\in X} |g_n(x) - g(x)| < \epsilon/2.$$

Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за све $n \geq n_0$ важи

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in X} |g_n(x) - g(x)| < \epsilon/ + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Доказ за равномерну конвергенцију низа λf_n је сличан.

Тиме је доказ завршен. $\square$

Домаћи. а) Показати да функционални низ $f_n(x) = \frac{x}{n}$ конвергира тачка по тачка ка функцији $f(x) = 0$, али не конвергира равномерно.

б) Показати да функционални низ $f_n(x) = \frac{\cos x}{n}$ конвергира тачка по тачка ка функцији $f(x) = 0$ и конвергира равномерно.

Став. (Кошијев критеријум конвергенције функционалних низова тачка по тачка) Функционални низ $f_n : X \to \mathbb{R}$ конвергира тачка по тачка на X ако и само ако важи да за свако $x \in X$ и за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ (које зависи и од x и од ϵ) тако да за све $m > n \geq n_0$ важи

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Став. (Кошијев критеријум равномерне конвергенције функционалних низова) Функционални низ f_n конвергира равномерно ако и само ако важи да за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ (које зависи од ϵ, али не зависи од x) тако да за све $m > n \geq n_0$ и за све $x \in X$ важи

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$