Риманов интеграл.

До сада смо дефинисали Кошијев одређени интеграл функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ која је обавезно непрекидна. Међутим, одређени интеграл се може дефинисати и за општију класу функција. Уопштење Кошијевог интеграла је Риманов интеграл.

Поново посматрамо функцију $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, али овај пут без претпоставке да је непрекидна. Поделимо интервал $[a, b]$ на n интервала и означино подеоне тачке са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Овај пут не постављамо услов да су сви интервали једнаких дужина. Дакле, подела интервала $[a, b]$ на n интервала није јединствена. Означимо скуп свих подела интервала $[a, b]$ са $\mathcal{P}([a, b])$. Ако са P означимо једну поделу и са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ подеоне тачке, онда је дијаметар поделе P, у ознаци $\lambda(P)$, дужина најдужег интервала $[x_i, x_{i+1}]$. Прецизније,

$$\lambda(P) = \max\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Истакнуте тачке поделе P су тачке $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при чему важи $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Поделу P са истакнутим тачкама $\xi_1, \ldots, \xi_n$ означавамо са (P, ξ).

Интегрална сума функције f за поделу P са истакнутим тачкама $\xi_1, \ldots, \xi_n$ је

$$\Sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Дакле, интегрална сума је збир површина правоугаоника, слично као што смо имали код дефинисања Кошијевог интеграла.

Дефиниција. Функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ је Риман интеграбилна на интервалу $[a, b]$ ако постоји реалан број $I \in \mathbb{R}$ такав да за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваку поделу (P, ξ) важи ако је $\lambda(P) < \delta$ тада је

$$\left|\Sigma(f, P, \xi) - I\right| < \epsilon.$$

Број I називамо Римановим интегралом функције f и пишемо ознаку

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

За функцију f кажемо да је Риман-интеграбилна ако постоји њен Риманов интеграл.

Теорема. Свака функција са највише коначно много тачака прекида на затвореном интервалу је Риман-интеграбилна, и тада су њен Кошијев и Риманов интеграл једнаки. Специјално, свака непрекидна функција на затвореном интегралу је и Риман интеграбилна.

Пример. Нађимо Риманов интеграл константне функције $f(x) = c$ на затвореном интервалу $[a, b]$.

Приметимо да је

$$\Sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Дакле, интегрална сума уопште не зависи од параметра поделе. То значи да је $I = c(b-a)$, што се може лако проверити за произвољно ϵ и за произвољно δ.

Теорема. Свака монотона функција на затвореном интервалу је Риман-интеграбилна, и њен Кошијев и Риманов интеграл су једнаки.

Теорема. Ако је функција Риман-интеграбилна на интервалу $[a,b]$ тада је она ограничена.

Напомена. Обрнуто не мора да важи, ограничена функција на затвореном интервалу не мора бити Риман-интеграбилна. Такав је пример Дирихлеова функција $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ова функција је прекидна у свакој тачки свог домена. На сваком произвољном затвореном интервалу $[a,b]$ ова функција није Риман-интеграбилна.

Доказ следи из важне теореме да је функција Риман-интеграбилна ако и само ако је њен скуп тачака прекида Лебегове мере нула.

Редови

Посматрамо низ реалних бројева a_n, $n \in \mathbb{N}$. Бавићемо се питањем да ли је могуће сабрати све чланове овог низа. Посматрамо још један низ s_n, $n \in \mathbb{N}$, низ парцијалних сума низа a_n. Наиме,

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Дефиниција. Ред реалних бројева је уређен пар (a_n, s_n) низа a_n и низа његових парцијалних сума s_n. Ознака реда је

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Приметимо да је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$. Због тога уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција. Ред конвергира ако постоји лимес његових парцијалних сума и ако је тај лимес коначан. У супротном кажемо да ред дивергира. Дакле, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

конвергира ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

и ако је овај лимес коначан. Тај лимес називамо сумом реда.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

Пример. Одредимо за које $q \in \mathbb{R}$ конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

Пошто је

$$s_n = q + q^2 + \cdots + q^n,$$

тада је $s_{n+1} = s_n + q^{n+1}$ као и $qs_n = s_{n+1} - q$. Дакле $qs_n = s_n + q^{n+1} - q$, па следи

$$s_n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

Сада треба да нађемо лимес овог низа када n тежи бесконачно. Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1, \\ \text{не постоји}, & q \geq -1. \end{cases}$$

Следи да дати ред конвергира само у случају $|q| < 1$. Ако је $|q| < 1$ важи

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

Став. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира тада његов општи члан a_n тежи нули, кад $n \to \infty$.

Доказ. Ако ред конвергира онда је $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Пошто је $a_n = s_n - s_{n-1}$ преласком на лимес следи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ дивергира, зато што му општи члан не тежи нули.

Напомена. Обрнуто не мора да важи. Ако општи члан реда тежи нула, не мора да значи да ред конвергира. Погледати пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ након Кошијевог критеријума конвергенције.

Став. (Линеарност редова.) Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају онда за свако $\lambda \in \mathbb{R}$ и свако $\mu \in \mathbb{R}$ конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} ab_n.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n) &\overset{\text{деф}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)\\ &\overset{*1}{=} \lim_{n\to\infty}\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k+\mu\sum_{k=1}^{n}b_k\\ &\overset{*2}{=} \lambda\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\mu\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k\\ &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\sum_{n=1}^{\infty}ab_n,\end{aligned}$$

при чему једнакост $*1$ важи због линеарности коначне суме, а једнакост $*2$ важи због линеарности лимеса. Тиме је доказ завршен. $\square$

Став.* Ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира ако и само ако ред $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ конвергира, за произвољно $n_0\in\mathbb{N}$.

Доказ. Пошто је

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n,$$

а прва сума на десној страни је коначна сума бројева, дакле коначан број, следи да је сума $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ коначна ако и само ако је и сума $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ коначна. $\square$

Став. (Кошијев критеријум конвергенције.) Ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира ако за свако $\epsilon>0$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ тако да за свако $n>m\geq n_0$ важи

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n|<\epsilon.$$

Доказ. Доказ следи из Кошијевог критеријума конвергенције низова. Низ s_n конвергира ако и само ако за свако $\epsilon>0$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ тако да за свако $m>n\geq n_0$ важи

$$|s_m-s_n|<\epsilon.$$

Пошто је $s_m-s_n=a_{n+1}+\cdots+a_m$ следи тврђење. $\square$

Пример. Покажимо да хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, уз помоћ Кошијевог критеријума. Нека је $\epsilon=\frac{1}{2}$. Показаћемо да за свако $n_0\in\mathbb{N}$ постоје $m>n\geq n_0$ тако да је

$$|s_m-s_n|>\epsilon.$$

Нека је n_0 произвољно. Тада важи за $m=2n$ да је

$$s_m-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Покажимо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, уз помоћ Кошијевог критеријума. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да важи $n_0\epsilon > 1$. Овакво n_0 сигурно постоји на основу Архимедове аксиоме. Тада за све $m > n \geq n_0$ важи

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \cdots + \frac{1}{m^2} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon. \end{aligned}$$

Редови са позитивним члановима.

Став. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ конвергира ако и само ако је низ његових парцијалних сума ограничен.

Доказ. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира онда на основу дефиниције важи да је низ парцијалних сума $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ конвергентан. Сваки конвергентан низ је ограничен, па је тиме и s_n ограничен. С друге стране, ако треба да покажемо да ред конвергира, покажимо да је монотон. Користимо то што је $a_n \geq 0$, за све $n \in \mathbb{N}$, па значи да је $s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$. Дакле, s_n је монотоно растући низ. Ако је низ s_n и ограничен онда је он на основу теореме из Анализе 1 конвергентан. То по дефиницији конвергенције реда значи да дати ред конвергира. □

Пример. Показати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира.

Приметимо да је $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Дакле, низ парцијалних сума није ограничен низ, па не конвергира.

Став. (Први поредбени критеријум.) Ако је $0 \leq a_n \leq b_n$ и ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказ. Доказ следи на основу неједнакости

$$a_{m+1} + \cdots + a_n < b_{m+1} + \cdots + b_n < \epsilon$$

и Кошијевог критеријума. □

Пример. Показати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ конвергира.

Доказ следи на основу неједнакости $\frac{1}{n(n+3)} < \frac{1}{n^2}$ и првог поредбеног критеријума.

Пример. Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p = 2$ и дивергира за $p = 1$, онда на основу првог поредбеног критеријума следи да овај ред конвергира за све $p > 2$ и дивергира за све $p < 1$. Конвергенцију у случају $1 < p < 2$ ћемо показати уз помоћ интегралног критеријума.

Став. (Други поредбени критеријум) Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ редови са ненегативним члановима и нека је

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Тада важи:

1) Ако $0 < c < \infty$ тада или обе суме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају, или обе дивергирају.

2) Ако је $c = 0$ и ако сума $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда конвергира и сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

3) Ако је $c = \infty$ и ако сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира онда и сума $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира.

Доказ. 1) Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_0$ важи $c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon$. Дакле,

$$(c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n, \ \ n \geq n_0.$$

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда, на основу Става* конвергира и ред $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Тада на основу прве неједнакости $(c-\epsilon)b_n < a_n$, за све $n \geq n_0$ и првог поредбеног критеријума конвергира и ред $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Даље, на основу истог става конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

С друге стране, ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира,онда на основу друге неједнакости $a_n < (c+\epsilon)b_n$ и првог поредбеног критеријума конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Ако је $c = 0$ онда искористимо другу неједнакост $a_n < \epsilon b_n$ и први поредбени критеријум.

3) Ако је $c = \infty$ онда за произвољно $M > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_0$ важи $\frac{a_n}{b_n} > M$. Дакле $a_n > Mb_n$, за све $n \geq n_0$ па поново искористимо први поредбени критеријум. $\square$

Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$ дивергира зато што је

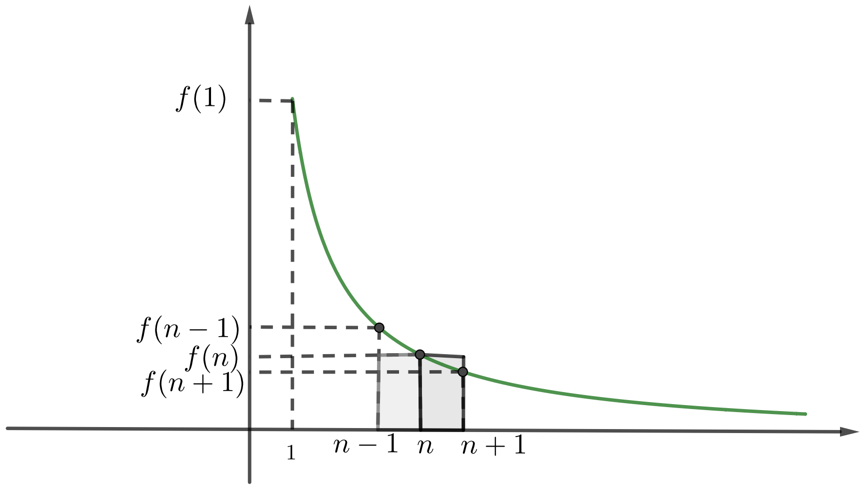
$$\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n},$$

када $n \to \infty$ а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Став. (Интегрални критеријум конвергенцје реда.) Нека је дата непрекидна и монотоно опадајућа функција $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Тада несвојствени интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ конвергира ако и само ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира.

Доказ. Пошто је f монотоно опадајућа функција, онда важи

$$f(x) \leq f(n), \ \ x \in [n, n+1],$$



за све $n \geq 1$. На основу првог поредбеног критеријума за несвојствене интеграле следи

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n).$$

Слично је

$$f(n) \leq f(x), \quad x \in [n-1, n],$$

за све $n \geq 2$, па важи

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx.$$

Дакле,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx.$$

Сада сумирањем за све $n \geq 1$ и $n \leq M$, за неко $M > 0$ добијамо

$$\int_1^{M+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{M} f(n) \leq f(1) + \int_1^{M} f(x)dx.$$

Преласком на лимес када $M \to \infty$ следи тражено тврђење. $\square$

Пример. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвергира ако и само ако је $p > 1$. Овај резултати следи из конвергенције несвојственог интеграла $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, ако и само ако је $p > 1$.

Задатак. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \Big)$$

конвергира за свако $\alpha \geq 0$.

Ако је $\alpha = 0$тада имамо нула ред који конвергира ка нули. Даље, приметимо да је

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha}}{n^{\alpha}(n-1)^{\alpha}} \sim \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}} = \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ конвергира за све $\alpha > 0$, онда тада конвергира и почетни ред.

Став. (Даламберов критеријум.) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима.
1) Ако је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.
2) Ако је

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Доказ. 1) Ако је $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то значи да је највећа тачка нагомилавања низа мања од 1, па су све тачке нагомилавања мање од 1. Следи да постоји $q \in (0,1)$ тако да важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, за све $n \in \mathbb{N}$ осим за њих коначно много. Дакле, за све $n \geq n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Множењем ових неједнакости добијамо

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < q^{n-n_0}.$$

Следи,

$$a_n < q^{n-n_0} = \frac{q^n}{q^{n_0}}.$$

Сада конвергенција реда $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ следи на основу првог поредбеног критеријума и конвергенције реда $\frac{1}{q^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} q^{n-n_0}$.

2) Ако је $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ значи да су све тачке нагомилавања веће од 1, па за све $n \in \mathbb{N}$, осим за њих коначно много важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ тј $a_{n+1} > a_n$. То значи да је низ a_n растући низ ненегативних бројева, па самим тим не може да конвергира нули. Дакле, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. $\square$

Напомена. Ако је $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ онда Даламберов критеријум не даје одговор. На пример ако је $a_n = \frac{1}{n}$ онда је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ а ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Међутим, ако је $a_n = \frac{1}{n^2}$ и онда је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ али ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Пример. Испитати да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ конвергира.
Пошто је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ следи да ред конвергира.

Пример. Испитати да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ конвергира.
Пошто је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$ следи да ред конвергира.