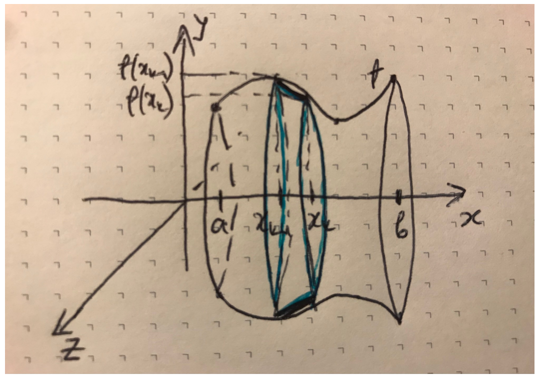


Површина омотача обртног тела.

Нека је дата непрекидн-диференцијабилна функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Посматрамо поново тело T које се добија ротацијом графика ове функције око x-осе. Хоћемо да израчунамо површину омотача овог тела.

Поделимо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова и подеоне тачке означимо са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Над сваким од интервала $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо зарубљену купу C_k која се добија ротацијом дужи d_k која спаја тачке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$ око x-осе. Што је n веће, тј. подела интервала $[a, b]$ финија, сума површина омотача зарубљених купа C_k ће бити ближа површини омотача датог тела T. Дакле, површину омотача тела T ћемо апроксимирати сумом површина омотача ових зарубљених купа.

Подсетимо се шта је површина омотача зарубљене купе K. Наиме, та површина је једнака разлици површина омотача купе K_1 и купе K_2, при чему је $K = K_1 \backslash K_2$. Нека је изводница зарубљене купе s, и изводница мале купе s_2. Тада је изводница велике купе $s_1 = s + s_2$. Ако је полупречник основе велике купе r_1 онда је површина омотача велике купе једнака површини кружног исечка дужине $2r_1\pi$ и полупречника s_1. Површина кружног исечка полупречника s_1 над углом θ једнака је $\frac{1}{2}\theta s_1^2$. Дужина лука $2r_1\pi$ одговара управо углу $\theta = 2\pi\frac{r_1}{s_1}$. Дакле

$$P_{om}(K_1) = \frac{1}{2} 2\pi \frac{r_1}{s_1} s_1^2 = r_1 s_1 \pi.$$

Слично, ако је изводница мале купе s_2 и полупречник основе r_2 онда је површина омотача мале купе једнака

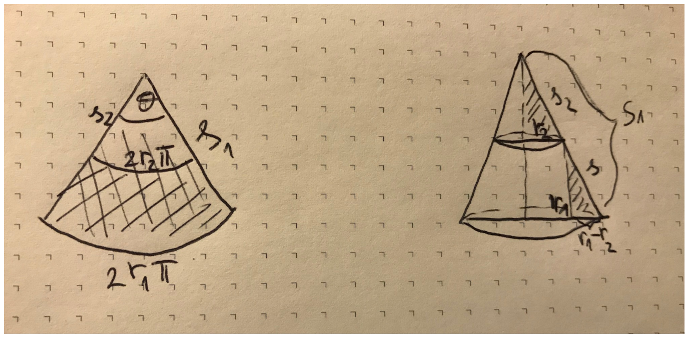
$$P_{om}(K_2) = r_2 s_2 \pi.$$

Следи,

$$P_{om}(K) = (r_1 s_1 - r_2 s_2)\pi.$$

Сада користимо $s_1 = s + s_2$ као и сличност троуглова означених на десној слици, на основу које следи $\frac{r_1 - r_2}{s} = \frac{r_2}{s_2}$. Дакле, $r_1 s_1 - r_2 s_2 = r_1 s + (r_1 - r_2) s_2 = r_1 s + r_2 s = (r_1 + r_2) s$. Следи,

$$P_{om}(K) = (r_1 + r_2) s \pi.$$



Код зарубљене купе K_k полупречници база су $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, а изводница је

$$s = \sqrt{(f(x_{k-1}) - f(x_k))^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2}} \stackrel{*}{=} \sqrt{(f'(c_k))^2 + 1}\frac{b-a}{n},$$

за неко $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$, при чему једнакост $*$ важи на основу Лагранжове теореме, што је објашњено код дужине криве.

Следи

$$P_{om}(K_k) = (f(x_k) + f(x_{k-1}))\sqrt{(f'(c_k))^2 + 1}\frac{(b-a)}{n}\pi.$$

$$\begin{aligned} P_{om}(K_k) &= (f(x_k) + f(x_{k-1}))\sqrt{(f'(c_k))^2 + 1}\frac{(b-a)}{n}\pi \\ &= 2f(d_k)\sqrt{(f'(c_k))^2 + 1}\frac{(b-a)}{n}\pi \end{aligned}$$

Сада површину омотача тела T апроксимирамо сумом површина омотача ових зарубљених купа. Следи

$$P_{om}(T) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2f(d_k)\sqrt{\Big((f'(c_k))^2 + 1}\frac{(b-a)}{n}\pi \stackrel{*}{=} \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx,$$

при чему $*$ важи на основу особине Кошијевог интеграла да лимес не зависи од избора изабраних тачака.

Напомена. Услов да је функција f непрекидно-диференцијабилна нам је неопходан да би подинтегрална функција Кошијевог интеграла била непрекидна.

Пример. Израчунати површину сфере полупречника R.

Сфера се добија ротацијом криве $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$ око x-осе. На основу претходне формуле следи

$$P(S) = \int_{-R}^{R} 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = 4\pi R^2.$$

Напомена. Природно је питање зашто површину омотача обртног тела не рачунало као апроксимацију сума површина омотача ваљака. Покушајмо да урадимо сада тако. Дакле површина омотача ваљка V_k над интервалом $[x_{k-1}, x_k]$ је $2r\pi H$, при чему је r полупречник основе, а H висина ваљка. У нашем случају је $r = f(x_k)$ и $H = x_k - x_{k-1}$. Следи

$$P(V_k) = 2f(x_k)\pi\frac{b-a}{n}.$$

Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2f(x_k)\pi\frac{b-a}{n} = \int_a^b 2\pi f(x)dx.$$

Да ова формула не даје тражену површину омотача видимо на следећем примеру.

Покушајмо овом формулом да израчунамо површину сфере. Добијамо

$$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}dx = 2\pi\frac{R^2\pi}{2} = R^2\pi^2,$$

што свакако није тражена површина сфере.

Пример. Израчунати површину омотача купе која се добија ротацијом криве $f(x) = 3x$ око x-осе, при чему је висина купе 3.

На основу формуле за површину омотача обртног тела имамо

$$P(K) = \int_0^3 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int_0^3 3x\sqrt{10}dx = 6\sqrt{10}\pi\frac{9}{2} = 27\sqrt{10}\pi.$$

Несвојствени интеграли.

Кошијев (одређени) интеграл смо дефинисали за непрекидну функцију $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, при чему је домен увек затворен и коначан интервал $[a,b]$. Сада желимо да дефинишемо интеграл за непрекидну функцију $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$, где је $\beta \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ тачка у којој функција f није дефинисана. Тачка β се назива сингуларитет функције f. Приметимо да за свако $a < b < \beta$, на интервалу $[a,b]$ имамо добро дефинисан Кошијев интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Дефиниција. Несвојствени интеграл непрекидне функције $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ је

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{b\to\beta_-}\int_a^b f(x)dx.$$

Наравно, ова дефиниција је коректна само у случају да лимес са десне стране постоји. У случају када је овај лимес коначан кажемо да несвојствени интеграл конвергира. У супротном кажемо да дивергира.

Слично се дефинише несвојствени интеграл функције $f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}$, при чему је $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ сингуларитет функције f. Наиме, за свако $\alpha < a < b$ имамо Кошијев интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Зато је

$$\int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{a \to \alpha+} \int_a^b f(x)dx.$$

Приметимо да су $\alpha = -\infty$ и $\beta = \infty$ такође могући сингуларитети.

Пример 1. Испитати за које $p \in \mathbb{R}$ конвергира несвојствени интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$. Важи

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a \to 0_+} \int_a^1 \frac{1}{x^p}dx \overset{\text{Њ-Л}}{=} \begin{cases} \lim_{a \to 0_+} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^1, & p \neq 1 \\ \lim_{a \to 0_+} \log x|_a^1, & p = 1 \end{cases}.$$

Пошто је $\lim_{a \to 0_+} \frac{1}{a^{p-1}} = \infty$, за $p > 1$ и $\lim_{a \to 0_+} \log a = -\infty$, закључујемо да овај лимес конвергира само у случају $p < 1$.

Пример 2. Испитати за које $p \in \mathbb{R}$ конвергира несвојствени интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$. Слични као малопре важи

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}dx \overset{\text{Њ-Л}}{=} \begin{cases} \lim_{b \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b, & p \neq 1 \\ \lim_{b \to \infty} \log x|_1^b, & p = 1 \end{cases}.$$

Пошто је $\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \infty$, за $p < 1$ и $\lim_{b \to \infty} \log b = \infty$, закључујемо да овај интеграл конвергира само за $p > 1$.

Став. (Линеарност несвојственог интеграла.) Ако су $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ и $g : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ две непрекидне функције и ако оба несвојствена интеграла $\int_a^\beta f(x)dx$ и $\int_a^\beta g(x)dx$ конвергирају, тада за сваке две константе $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ конвергира и интеграл $\int_a^\beta (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx$ и важи

$$\int_a^\beta (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^\beta f(x)dx + \lambda_2 \int_a^\beta g(x)dx.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
\int_a^\beta (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx &\overset{\text{деф}}{=} \lim_{b\to\beta_-} \int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx \\
&\overset{*1}{=} \lim_{b\to\beta_-} \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x))dx \\
&\overset{*2}{=} \lambda_1 \lim_{b\to\beta_-} \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \lim_{b\to\beta_-} \int_a^b g(x))dx \\
&= \lambda_1 \int_a^\beta f(x)dx + \lambda_2 \int_a^\beta g(x)dx,
\end{aligned}$$

при чему једнакост $*1$ важи на основу линеарности Кошијевог интеграла, а једнакост $*2$ важи на основу линеарности лимеса, под условом да оба интеграла $\int_a^\beta f(x)dx$ и $\int_a^\beta g(x)dx$ конвергирају. □

Став. Ако је $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ непрекидна функција тада за свако $c \in (a, \beta)$ важи

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

(Приметимо да је интеграл $\int_a^c f(x)dx$ Кошијев интеграл, дакле коначан.)

Доказ. На основу става са 3. часа о особинама Кошијевог интеграла, за свако $c \in (a, b)$ важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Преласком на лимес када b тежи β са леве стране следи тражена једнакост. □

Последица. Несвојствени интеграл $\int_a^\beta f(x)dx$ конвергира ако и само ако конвергира несвојствени интеграл $\int_c^\beta f(x)dx$, за произвољно $c \in (a, \beta)$.

Став. а) (Парцијална интеграција несвојственог интеграла.) Нека су $u, v : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне функције. Ако интеграл $\int_a^\beta u(x)v'(x)dx$ конвергира и ако је $\lim_{b\to\beta_-} u(b)v(b)$ коначан, тада и интеграл $\int_a^\beta u'(x)v(x)dx$ конвергира и важи

$$\int_a^\beta u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^\beta - \int_a^\beta u'(x)v(x)dx,$$

при чему је $u(x)v(x)\Big|_a^\beta = \lim_{b\to\beta_-} u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

б) (Смена променљиве несвојственог интеграла.) Нека је $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Нека је функција $\varphi : [c, \gamma) \to [a, \beta)$ непрекидно-диференцијабилна и бијекција таква да важи $\varphi(c) = a$ и $\lim_{t\to\gamma_+} \varphi(t) = \beta$. Тада је

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_c^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказ. а) На основу парцијалне интеграције Кошијевог интеграла за непрекидно диференцијабилне функције $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b < \beta$, следи

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ова једнакост важи за све $b \in \mathbb{R}$ такве да $b \in (a, \beta)$. Зато можемо прећи на лимес када b тежи β са леве стране, и добијамо тражену формулу парцијалне интеграције несвојственог интеграла.

б) На основу смене променљиве Кошијевог интеграла важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

при чему је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ непрекидно-диференцијабилна функција таква да важи $\varphi(c) = a$ и $\varphi(d) = b$. Наиме, оба интеграла су једнака $F(b) - F(a) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c))$. Преласком на лимес када b тежи β и када d тежи γ следи тражена једнакост.

Дефиниција. Несвојствени интеграл <u>са два сингуларитета</u> непрекидне функције $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ дефинишемо као збир два несвојтвена интеграла са једним сингуларитетом. Наиме

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx,$$

за произвољну тачку $c \in (\alpha, \beta)$. Овај несвојствени инеграл конвергира ако конвергирају оба интеграла на десној страни једнакости.

Пример. Испитати за које $p \in \mathbb{R}$ конвергира интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$.

Дати интеграл има два сингуларитета $x = 0$ и $x = \infty$. Зато је на основу дефиниције

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx.$$

На основу Примера 1. први интеграл конвергира за $p < 1$, а на основу Примера 2 други интеграл конвергира за $p > 1$. Дакле, интеграл на левој страни дивергира за свако $p \in \mathbb{R}$.

<u>Критеријуми конвергенције несвојственог интеграла.</u>

Став. (Кошијев критеријум конвергенције несвојственог интеграла). Несвојствени интеграл $\int_a^\beta f(x)dx$ конвергира ако и само ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $b_0 \in \mathbb{R}$ тако да је

$a < b_0 < \beta$ и тако да за све $b_0 < b_1, b_2 < \beta$ важи

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\Big| < \epsilon.$$

Доказ. На основу дефиниције конвергенције несвојственог интеграла, интеграл $\int_a^\beta f(x)dx$ конвергира ако и само ако постоји коначан лимес $\lim_{b\to\beta_-} F(b)$, при чему је $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Из Анализе 1 знамо да је тај лимес коначан ако и само ако важи Кошијев услов, тј ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $b_0 \in \mathbb{R}$ тако да је $a < b_0 < \beta$ и тако да за све $b_0 < b_1, b_2 < \beta$ важи

$$|F(b_1) - F(b_2)| < \epsilon.$$

Доказ следи из особине Кошијевог интеграла $\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx$. $\square$

Дефиниција. Кажемо да несвојствени интеграл $\int_a^\beta f(x)dx$ <u>апсолутно конвергира</u> ако конвергира интеграл $\int_a^\beta |f(x)|dx$.

Став. Ако несвојствени интеграл апсолутно конвергира, онда он конвергира.

Доказ. Доказ следи из основне интегралне неједнакости

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\Big| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx,$$

и Кошијевог критеријума. $\square$

Напомена. Обрнуто не мора да важи, из обичне конвергенције несвојственог интеграла не мора да следи и апсолутна конвергенција. У том случају, када несвојствени интеграл конвергира, али апсолутно дивергира, кажемо да тај интеграл <u>условно</u> конвергира. Пример такве конвергенције је интеграл $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Овај интеграл конвергира, али апсолутно дивергира, тј. интеграл $\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ дивергира. Погледати Пример 2. након првог поредбеног критеријума.

Став. (Први поредбени критеријум.) Нека су $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ и $g : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ непрекидне функције такве да је $0 \leq f(x) \leq g(x)$, за све $x \in [a,\beta)$. Ако $\int_a^\beta g(x)dx$ конвергира, тада и $\int_a^\beta f(x)dx$ конвергира.

Доказ. Доказ следи на основу неједнакости

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x)dx.$$

и Кошијевог критеријума. $\square$

Напомена. Претходни став се може доказати и на следећи начин. На основу монотоности одређеног интеграла важи

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

за свако $b \in (a, \beta.)$ Преласком на лимес када b тежи β са десне стране добијамо тражену неједнакост. Сада још треба објаснити зашто постоји лимес леве стране. Наиме, функција $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ је монотоно растућа зато што је f ненегативна, а и ограничена је бројем $\int_a^\beta g(x)dx < \infty$. Дакле, постоји $\lim_{b \to \beta_+} F(b)$ (и овај лимес је супремум).

Пример 1. Показати да интеграл $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ конвергира.

Пошто је $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ а интеграл $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ конвергира, онда и $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ конвергира. Дакле, почетни интеграл конвергира апсолутно, па онда конвергира и обично.