Теорема. (Њутн-Лајбницова формула.) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ њена примитивна функција Тада важи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Користимо и ознаку $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Последица 1. (Парцијална интеграција одређеног интеграла.) Нека су $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне функције. Тада важи

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказ. Функција $u(x)v(x)$ је примитивна за функцију $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, па применом Њутн-Лајбницове формуле следу

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Сада на основу линеарности одређеног интеграла следи тражена формула. □

Последица 2. (Смена променљиве одређеног интеграла.)

Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Нека је функција $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ непрекидно-диференцијабилна таква да важи $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Ако је $F(x)$ примитивна за функција $f(x)$ онда је и $F(\varphi(t))$ примитивна за функцију $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Применом Њутн-Лајбницове формуле на обе функције добијамо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Користећи $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ следи тражена формула. □

Пример 1. Нека је $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ непарна функција. Дакле, за свако $x \in [-a,a]$ важи $f(-x) = -f(x)$. Тада је

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt.$$

Па следи

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Пример 2. Нека је $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ парна функција. Дакле, за свако $x \in [-a,a]$ важи $f(-x) = f(x)$. Тада је

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Дакле,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Пример 3. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^7 + 2^7 + \cdots + n^7}{n^8}.$$

Овај лимес је заправо интеграл функције $f(x) = x^7$ на интервалу $[0,1]$. Дакле

$$\int_{0}^{1} x^7 dx = \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(Студент нека провери резултат применом Штолцове теореме.)

Примена одређеног интеграла. Површина равне фигуре.

Нека су $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне функције такве да је $f(x) \geq g(x)$ за све $x \in [a,b]$. Посматрамо област која се налази између ова два графика, дакле

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\Big\}.$$

Тада је

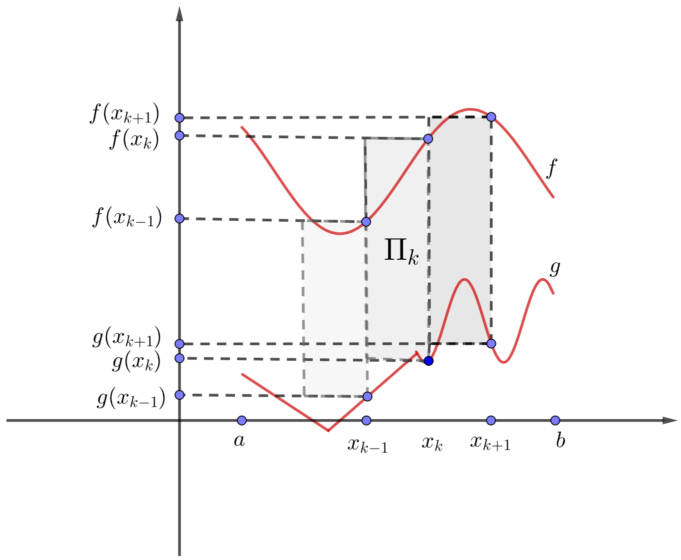
$$P(D) = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx.$$

Доказ. Поделимо интервал $[a,b]$ на n једнаких делова и подеоне тачке означимо са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Дакле, дужина сваког интервала је $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Над сваким интервалом $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо правоугаоник Π_k коме је друга страница дужине $f(x_k) - g(x_k)$. Што је n веће, тј. подела интервала $[a,b]$ финија, укупна површина свих правоугаоника Π_k, $k = 1, \ldots, n$, је ближа површини области D. Дакле, површину дате области D апроксимирамо сумом површина правоугаоника Π_k. Пошто је $P(\Pi_k) = (f(x_k) - g(x_k))\frac{b-a}{n}$ следи

$$P(D) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - g(x_k))\frac{b-a}{n} = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

Пример 1. Израчунати површину круга полупречника R.



Једначина задатог круга K је $x^2+y^2 \leq R^2$. Дакле, ако желимо да круг изразимо на исти начин као облик D добијамо

$$K = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; -R \leq x \leq R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\Big\}.$$

Дакле,

$$P(K) = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx \stackrel{*}{=} 4\frac{1}{2}(x\sqrt{R^2-x^2}+R^2 \arcsin\frac{x}{R})\Big|_0^R = R^2\pi,$$

при чему $*$ важи на основу Задатка 1. б) са 2. часа.

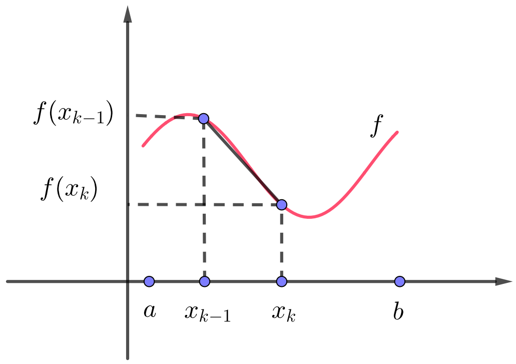
Пример 2. Израчунати површину елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, за произвољне $a, b > 0$.
Слично као у претходном примеру имамо

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; -a \leq x \leq a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\Big\}.$$

Дакле,

$$P(E) = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \stackrel{*}{=} 2\frac{b}{a}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 \arcsin\frac{x}{a})\Big|_0^a = ab\pi,$$

при чему $*$ важи на основу Задатка 1. б) са 2. часа.



Дужина криве.

Нека је дата непрекидно-диференцијабилна функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Посматрамо криву γ која је график ове функције и хоћемо да израчунамо њену дужину.

Поделимо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова и подеоне тачке означимо са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Над сваким од интервала $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо дуж d_k која спаја тачке графика $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$. Што је n веће, тј. подела интервала $[a, b]$ финија, сума дужина ових дужи ће бити ближа дужини дате криве γ. Дакле, дужину криве γ ћемо апроксимирати сумом дужина ових дужи.

Приметимо да је дуж d_k хипотенуза правоуглог троугла чије су катете дужине $\frac{b-a}{n}$ и $|f(x_{k-1}) - f(x_k)|$. Следи да је дужина дужи d_k једнака

$$l(d_k) = \sqrt{(f(x_{k-1}) - f(x_k))^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2}} \stackrel{*}{=} \sqrt{(f'(c_k))^2 + 1}\frac{(b-a)}{n},$$

при чему једнакост $*$ важи на основу Лагранжове теореме о средњој вредности. Наиме

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

за неко $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$.

Следи

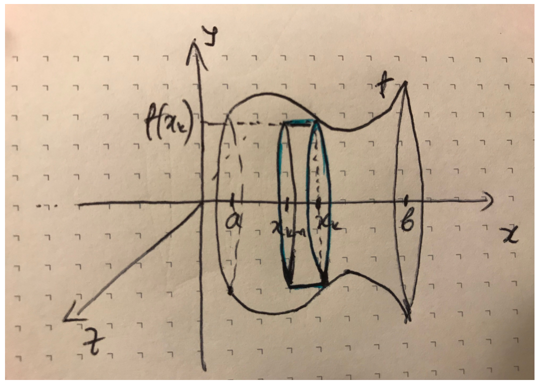
$$l(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(c_k)^2 + 1\right)}\frac{b-a}{n} \stackrel{*}{=} \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1}dx.$$

Напомена. Услов да је функција f непрекидно-диференцијабилна нам је неопходан да би подинтегрална функција Кошијевог интеграла била непрекидна.

Пример. Израчунати обим кружнице полупречника R.

Пошто се кружница задаје једначином $x^2 + y^2 = R^2$ онда је њен обим једнак 2 обима горње полукрижнице. Горња полукружница се задаје функцијом $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. На основу претходне формуле важи

$$o(K) = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4R\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 2R\pi.$$



Запремина обртног тела.

Нека је дата непрекидна функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Посматрамо тело T које се добија ротацијом графика ове функције око x-осе. Хоћемо да израчунамо запремину овог тела уз помоћ Кошијевог интеграла.

Као и до сада, поделимо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова и подеоне тачке означимо са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Над сваким од интервала $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо ваљак V_k који се добија ротацијом дужи $y = f(x_k)$ око x-осе. Што је n веће, тј. подела интервала $[a, b]$ финија, сума запремина ваљака ће бити ближа запремини датог тела T. Дакле, запремину тела T ћемо апроксимирати сумом запремина ових ваљака.

Запремина ваљка V_k је једнака производу површине базе и висине. Приметимо да је висина ваљка V_k управо једнака дужини интервала $[x_{k-1}, x_k]$, тј $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Даље, база ваљка V_k је круг полупречника $f(x_k)$, па је површина базе $f^2(x_k)\pi$. Дакле,

$$V(V_k) = f^2(x_k)\pi\frac{b-a}{n}.$$

Следи

$$V(T) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)\pi\frac{b-a}{n} \stackrel{*}{=} \int_a^b \pi f^2(x)dx,$$

при чему једнакост $*$ важи на основу дефиниције Кошијевог интеграла.

Пример 1. Израчунати запремину сфере полупречника R.

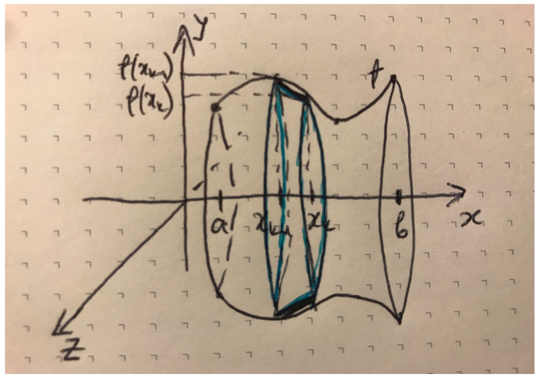
Сфера S полупречника R је тело које настаје ротацијом криве $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, око x-осе. Дакле, на основу претходне формуле важи

$$V(S) = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

Пример 2. а) Израчунати запремину купе висине h и полупречника основе r.

Ова купа K настаје ротацијом криве $f(x) = -\frac{r}{h}x + r$, $0 \leq x \leq h$, око x-осе. Дакле, на основу претходне формуле следи

$$V(K) = \pi\int_0^h (-\frac{r}{h}x + r)^2dx = \pi(\frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} - 2\frac{r^2}{h}\frac{h^2}{2} + r^2h) = \pi\frac{r^2h}{3}$$



Пример 2. **б)** Израчунати запремину зарубљене купе висине h и полупречника основе r_1 и r_2.

Ова купа настаје ротацијом криве $f(x) = \frac{r_2 - r_1}{h}x + r_1$, $0 \le x \le h$, око x-осе. Следи

$$V(K) = \pi \int_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{h}x + r_1\right)^2 dx = \pi h \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{3}.$$

Напомена. Приметимо, да ако бисмо запремину обртног тела апроксимирали запреминама зарубљених купа уместо ваљака, добили би исти резултат. Поделом интервала $[a, b]$ на n једнаких делова као и до сада, и над сваким од интервала $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо зарубљену купу висине $h = \frac{b-a}{n}$ и полупречника база $r_1 = f(x_k)$ и $r_2 = f(x_{k-1})$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \frac{f^2(x_k) + f(x_k)f(x_{k-1}) + f^2(x_{k-1})}{3} \frac{b-a}{n} \stackrel{*}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \frac{3f^2(x_k)}{3} \frac{b-a}{n} = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Једнакост $*$ важи, зато што дати лимес не зависи од избора тачке $f(\xi)$ на интервалу $[x_{k-1}, x_k]$.

Површина омотача обртног тела.

Нека је дата непрекидн-диференцијабилна функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Посматрамо поново тело T које се добија ротацијом графика ове функције око x-осе. Хоћемо да израчунамо површину омотача овог тела.

Поделимо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова и подеоне тачке означимо са $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Над сваким од интервала $[x_{k-1}, x_k]$ посматрамо зарубљену купу C_k која се добија ротацијом дужи d_k која спаја тачке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$ око x-осе. Што је n веће, тј. подела интервала $[a, b]$ финија, сума површина омотача зарубљених купа C_k ће бити ближа површини омотача датог тела T. Дакле, површину омотача тела T ћемо апроксимирати сумом површина омотача ових зарубљених купа.