Неодређени интеграл и примитивна функција

Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Дефиниција. Примитивна функција функције f је диференцијабилна функција $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ таква да важи

$$\boxed{F' = f.}$$

Примери. 1) $f(x) = 2$. Тражимо функцију чији је извод функција f. На пример, $F(x) = 2x$, али и $F(x) = 2x + 5$ и тако даље.

2) $f(x) = x$. Тада је $F(x) = x^2/2 + C$, за сваку константу $C \in \mathbb{R}$.

3) $f(x) = x^2$. Тада је $F(x) = x^3/3 + C$, за сваку константу $C \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = e^x$. Тада је $F(x) = e^x + C$, за сваку константу $C \in \mathbb{R}$.

Став. а) Ако је $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ примитивна функција функције $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, онда је и $F + c$ такође примитивна, за сваку константу $C \in \mathbb{R}$.
б) Нека су F_1 и F_2 примитивне функције функције f. Тада је $F_1 - F_2 = C$. Дакле, сваке две примитивне функције функције f се разликују за константу.

Доказ. а) $(F(x) + C)' = F'(x) = f$. Дакле, на основу дефиниције примитивне функције, и функција $F + C$ јесте примитивна за f.
б) $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f - f = 0$. На основу теореме Лагранжа о средњој вредности (која важи само на интервалима) следи да је функција $F_1 - F_2$ константна. $\square$

Напомена. Претходни став важи само на интервалима. На пример, нека је

$$F_1(x) = x^2 \text{ и } F_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 0), \\ x^2 + 1, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

Очигледно важи $F_1' = F_2'$ на $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Дакле и F_1 и F_2 су примитивне функције за функцију $f(x) = 2x$ на $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Ипак, не важи $F_1 - F_2 = C$ на $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Разлог је тај што F_2 није примитивна за f на целом интервалу $(-1, 1)$ него на скупу $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Функција F_2 је прекидна у нули, па самим тим није диференцијабилна, што је неопходан услов дефиниције примитивне функције. Са друге стране, сетимо се да Лагранжева теорема о средњој вредности такође важи само на интервалима. Дакле, доказ претходног става под б) не пролази у случају неповезаног скупа (као што је $(-1, 0) \cup (0, 1)$.)

Дефиниција. Скуп свих примитивних функција функције $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ се назива неодређени интеграл функције f. Ознака скупа примитивних функција је

$$\int f(x)dx.$$

Ако је F једна примитивна функција функције f онда на основу претходног става важи

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

Ознака C се односи на било коју константу $C \in \mathbb{R}$ и то више нећемо наглашавати.

Напомена. Приметимо да важи $(\int f(x)dx)' = f(x)$. Наиме, диференцирањем једнакости $\int f(x)dx = F(x) + C$ добијамо $(\int f(x)dx)' = F'(x) = f(x)$.

Неодређен интеграл неких елементарних функција

1) $\int x^a dx = x^{a+1}/(a+1) + C$, за свако $a \neq -1$.

2) $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C, \quad x > 0$.

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

4) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

5) $\int e^x dx = ex + C$.

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$, при чему је $a > 0, a \neq 1$.

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$.

8) $\int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$.

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin + C$.

10) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos + C$.

11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.

12) $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = arcctg\ x + C$.

Овде је $C \in \mathbb{R}$ било која реална константа.

Напомена. Студенту се препоручује да провери сваку од претходних једнакости. Дакле, извод десне стране једнакости треба да буде подинтегрална функција на левој страни једнакости. На пример, пошто је $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x,}$ следи $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$.

Став. (Линеарност неодређеног интеграла.) Ако су $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ две функције које имају примитивне функције, тада важи

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int f(x)dx + \lambda_2 \int g(x)dx,$$

за сваке две константе $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Доказ. Нека је $\int f(x)dx = F(x)+c$ и $\int g(x)dx = G(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$. На основу правила диференцирања следи

$$(\lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x))' = \lambda_1 F'(x) + \lambda_2 G'(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x).$$

Дакле, функција $\lambda_1 F + \lambda_2 G$ је примитивна за функцију $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ што значи $\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + c = \lambda_1 \int f(x)dx + \lambda_2 \int g(x)dx$. $\square$

Приметимо да у последњој једнакости са десне стране више не пишемо $+c$. То је зато што неодређени интеграл по дефиницији представља скуп свих примитивних функција.

Напомена. На основу линеарности интеграла 10) следи $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos + C$. Упоредимо сада 9) и 10). Закључујемо да су обе функције $\arcsin x$ и $-\arccos x$ примитивне за функцију $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервалу $(-1,1)$. Међутим, на основу става о примитивним функцијама знамо да се сваке две примитивне функције на интервалу разликују за константу. То у овом случају није очигледно. Ипак, присетимо се тригонометријске формуле $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. Дакле, примитивне функције $\arcsin x$ и $-\arccos x$ се разликују за константу $\frac{\pi}{2}$.

Парцијална интеграција

Нека су $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције. Тада важи

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доказ. На основу Лајбницове формуле за диференцирање производа важи

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Дакле, функција $u(x)v(x)$ је примитивна за функцију $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. На основу дефиниције неодређеног интеграла следи $\int (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = u(x)v(x) + C$. На основу линеарности неодређеног интеграла следи $\int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) + C$. Ову једнакост можемо записати и као

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Приметимо да су са обе стране једнакости скупови примитивних функција, па не треба записивати $+C$. $\square$

Пример 1.

$$\int \log x dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \log x \\ v(x) = x \end{array} \right\} = x\log x - \int \frac{1}{x} x dx = x\log x - x + C.$$

Пример 2. а)

$$\int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ v = \sin x \end{array} \right\} =$$

$$e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$e^x \sin x - \Big(-e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx \Big).$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са $I = \int e^x \cos x dx$, закључујемо

$$I = e^x(\sin x + \cos x) - I,$$

тј.

$$2I = e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

У последњој једнакости морамо додати $+c$ са десне стране, да би и даље важила једнакост скупова функција. Коначно је

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Пример 2. б) $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

Пример 3. Покушајмо да решимо интеграл $\int \frac{1}{x} dx$ парцијалном интеграцијом. Нека је $u(x) = \frac{1}{x}$ и $v'(x) = 1$. Тада је $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ и $v(x) = x$. Следи

$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} x - \int \frac{-1}{x^2} x dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx.$$

Дакле, парцијална интеграција нам не даје решење. Напоменимо да се у претходној једнакости не може извршити скраћивање, тј одузимањем датог интеграла се не може добити $0 = 1$. Наиме, једнакост $\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$ представља једнакост фамилија примитивних функција. Одузимањем интеграла $\int \frac{1}{x} dx$ са леве и десне стране добија се заправо једнакост $C = C$.

Смена промењиве

Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и нека је функција $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ диференцијабилна. Тада је

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Доказ. Означимо смену са

$$t = \varphi(x).$$

Нека је F примитивна функција функције f. Дакле, $\int f(t)dt = F(t) + C$. Користимо правило за извод сложене функције

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Дакле, функција $F \circ \varphi$ је примитивна за функцију $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ па на основу дефиниције неодређеног интеграла важи $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$. Следи дата формула. $\square$

Напомена. Пошто је функција F примитивна за функцију f, онда је

$$\int f(t) dt = F(t) + C.$$

Са друге стране, на основу претходног става важи

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Дакле, увођењем смене

$$\varphi(x) = t$$

и поређењем једнакости закључујемо

$$\boxed{dt = \varphi'(x)dx.}$$

У општем случају, ако уводимо смену

$$\varphi(x) = \psi(t),$$

онда важи следећа једнакост диференцијала

$$\boxed{\psi'(t)dt = \varphi'(x)dx.}$$

Пример 1. $\int \frac{1}{x+3}dx = \left\{ \begin{array}{l} x+3=t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + c = \log|x+3| + C.$

Пример 2. $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2xdx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log|t| + c = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C.$

Пример 3. $\int \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \operatorname{arctg} x \\ v(x) = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C.$