Задатак 1. а)

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}dx}$$

1. начин - парцијална интеграција.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sqrt{1-x^2} \\ v(x) = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 \pm 1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са I добијамо

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

Коначно је

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

2. начин - смена $x = \sin t$. У овом случају имамо

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 tdt.$$

Интеграл са десне стране можемо решити уз помоћ тригонометријске формуле

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Дакле,

$$\int \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\Big(\int dt + \int \cos 2tdt\Big) = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big) + C = \frac{1}{2}\Big(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\Big) + C$$

Напомена. Добијене примитивне функције су заправо једнаке. Наиме користећи тригонометријске трансформације имамо

$$\frac{1}{2}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = x\cos(\arcsin x) \stackrel{*}{=} x\sqrt{1-x^2}.$$

Једнакост $*$ се може показати на следећи начин. Због једнакости $\sin^2(\arcsin x) + \cos^2(\arcsin x) = 1$, тј $x^2 + \cos^2(\arcsin x) = 1$, важи $|\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-x^2}$. Пошто функција косинус узима ненегативне вредности на интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, што је кодомен аркус-синусне функције, важи $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Задатак 1. б)

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx}$$

Овај задатака можемо решити као и претходни: парцијалном интеграцијом или сменом променљиве $x = a\sin t$. Ми ћемо га решити свођењем на претходни.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = |a| \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{a}, \\ dt = \frac{dx}{a} \end{array} \right\} = x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$\overset{a \geq 0}{=} a^2 \int \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}) + C.$$

Интеграли облика $\int \sin^n x \cos^m x dx$.

1. случај. Нека је бар један од n или m непаран број. На пример, нека је n непаран, тј. $n = 2k+1$. Тада уводимо смену $\cos x = t$ и важи

$$\int (\sin^2 x)^k \cos^m x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int (1-t^2)kt^m dt.$$

Слично, ако је m непаран, онда уводимо смену $\cos x = t$.

2. случај. Нека су n и m парни бројеви. Тада користимо тригонометријске формуле

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \ \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Тиме снижавамо степен косинуса у интегралу. Сада, ако степен буде непаран, опет радимо по првом случају, а ако буде паран, онда поново користимо тригонометријску трансформацију за квадрат косинуса. И тако поступак понављамо док не сведемо на табличне интеграле.

Пример 1. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int (1-t^2)t^4 dt = -\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$

Пример 2. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx.$

Сада, трећи интеграл $\int \cos^2 2x dx$ решавамо уз помоћ формуле $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$, а четврти интеграл $\int \cos^3 2x dx$ решавамо по првом случају.

Интеграли облика $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.

Ове интеграле решавамо уз помоћ тригонометријских формула

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Пример. $\int \sin 5x\cos 6x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 11x - \sin x)dx = \frac{1}{2}(-\frac{\cos 11x}{11} + \cos x) + C.$

Интеграција рационалних функција.

Нека су $p(x)$ и $q(x)$ полиноми над скупом реалних бројева. Опишимо кораке у решавању интеграла

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx.$$

Корак 1. Ако је степен полинома $p(x)$ већи или једнак степену полинома $q(x)$ онда нађемо количник ова два полинома као и остатак. Дакле, $p(x) = p_1(x)q(x) + r(x)$, где је остатак $r(x)$ полином степена мањег од полинома $p(x)$. Тада је

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int p_1(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Сада се проблем своди на количник два полинома где је степен доњег полинома већи од степена горњег полинома.

Корак 2. Полином $q(x)$ раставимо на чиниоце полинома облика $ax+b$ и ax^2+bx+c. (Сваки полином трећег степена има бар једну нулу, тако да је он растављив.) Можемо претпоставити да је $q(x)$ моничан полином, тј. коефицјент уз највећи степен је 1. Коначно добијамо

$$q(x) = (x+a_1)^{m_1}\cdots(x+a_k)^{m_k}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}.$$

Корак 3. Користећи факторизацију из претходног корака записујемо

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x+a_1} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x+a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k,1}}{x+a_k} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(x+a_k)^{m_k}}$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots$$

$$+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{B_{l,n_l}x+C_{l,n_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_1}}.$$

На пример, ако се фактор $(x-a)$ појављује 5 пута, тј. имамо $(x-a)^5$, онда у суми додајемо 5 сабирака, где је у имениоцу израз $(x-a)^k$, $k=1,\ldots,5$.

Корак 4. Сведемо разломке на десној страни на заједнички именилац. Затим изједначимо коефицјенте уз x^k са леве и десне стране, и тако за сваки степен променљиве x. Добијемо систем једначина где су непознате $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$. Овај систем има јединствено решење.

Корак 5. Проналаском константи из претходног корака интеграл $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ се своди на решавање интеграла на десној страни једнакости.

Пример 1. а) Решити $\int \frac{1}{1-x^2}dx$.

Ако је $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x}$, тада је $A_1 + A_2 = 1$ и $A_1 - A_2 = 0$. Дакле, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$. Следи

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Пример 1. б) Решити $\int \frac{x}{1-x^2}dx$.

Ако је $\frac{x}{1-x^2} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x}$, тада је $A_1 + A_2 = 0$ и $A_1 - A_2 = 1$. Дакле, $A_1 = \frac{1}{2}$ и $A_2 = -\frac{1}{2}$. Следи

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = -\frac{1}{2}\log\Big|(1+x)(1-x)\Big| + C.$$

Пример 2. Решити $\int \frac{x}{x^2+2x+1}dx$.

На основу разлагања $\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$ имамо $A_1 = 1$ и $A_2 = -1$. Следи

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1} = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx.$$

Оба интеграла се решавају сменом $x + 1 = t$.

Пример 3. Решити $\int \frac{x^5+x+1}{x^4+1}dx$.

Пошто је $x^5+x+1 = (x^4+1)x+1$, интеграл се своди на $\int \frac{x^5+x+1}{x^4+1}dx = \int xdx + \int \frac{1}{x^4+1}$. Даље је

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x).$$

Следи

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{B_1x + C_1}{x^2+1+\sqrt{2}x} + \frac{B_2x + C_2}{x^2+1-\sqrt{2}x}.$$

Свођењем на заједнички именилац и решавањем система једначина добијамо

$$B_1 = 1/2\sqrt{2}, B_2 = -1/2\sqrt{2}, C_1 = C_2 = 1/2.$$

Показаћемо још како се решава интеграл $\int \frac{1}{x^2+1+\sqrt{2}x}dx$, остале остављамо за вежбу.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} = 2\int \frac{1}{2(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1} = 2\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\\ &= \left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}x+1=t\\ \sqrt{2}dx=dt\end{array}\right\} = 2\int \frac{1}{t^2+1}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\arctan t + C\\ &= \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C.\end{aligned}$$

Интеграл облика $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Нека је $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, рационална функција. Интеграле овог облика можемо решавати увођењем смене
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Тада важи
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Пример 1. Решити $\int \frac{1}{\cos x}dx$.
Увођењем смене $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ добијамо
$$\int \frac{1}{\cos x}dx = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt \overset{*}{=} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \log\left|\frac{\cos x/2 + \sin x/2}{\cos x/2 - \sin x/2}\right| + C,$$

где $*$ важи на основу Примера 1. у претходном поднаслову. Користећи тригонометријске трансформације тражени интеграл постаје
$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C.$$

Пример 2. Решити $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.
Увођењем смене $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ добијамо
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{t}{1+t^2}dt.$$

Последњи интеграл се решава сменом $1 + t^2 = t$.

Интеграл облика $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$.

Ови интеграли се могу решити сменом
$$x = \frac{1}{\cos t},$$
при чему претпостављамо $t \in (0, \pi/2)$. Тада је
$$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t$$
и
$$dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Пример. Решити $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.
Уводимо смену $x = \frac{1}{\cos t}$ и добијамо
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{\cos t}dt.$$

Овај интеграл смо већ решили:
$$\int \frac{1}{\cos t}dt = \log\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + C.$$
Сада треба вратити смену $\cos t = 1/x$. Тада је $\sin t = \sqrt{1-1/x^2}$. (Због услова $t \in (0, \pi/2)$ синус је позитиван.) Следи
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left|x(1+\sqrt{1-1/x^2})\right| + C = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

Задатак 2. а)
$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}dx}$$

1. начин - парцијална интеграција (као у задатку 1.)

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2-1} \\ v(x) = x \end{array} \right\} = x\sqrt{x^2-1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2-1}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2 \pm 1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са I закључујемо
$$2I = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$
Пошто смо интеграл са десне стране израчунали у претходном примеру, добијамо
$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-1} - \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big) + C.$$

2. начин - смена $x = \frac{1}{\cos t}$. У том случају имамо
$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt.$$
Сада имамо интеграл рационалне функције где су промењиве sin и cos па га можемо решити увођењем смене
$$s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$
Тада следи
$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \int \frac{4s^2}{(1-s^2)^3}ds.$$
Добијени интеграл рационалне функције се решава у раније описаним корацима.

Задатак 2. б)
$$\boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx}$$

Задатак ћемо решити свођењем на претходни

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx = a\int\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}dx = \left\{\begin{array}{l} t=\frac{x}{a}, \\ dt=\frac{dx}{a}\end{array}\right\} = a^2\int\sqrt{t^2-1}dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log\Big|x+\sqrt{x^2-a^2}\Big|\Big) + C.$$

<u>**Интеграл облика $\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$.**</u>

Ови интеграли се могу решити сменом

$$x = \tan t,$$

при чему претпостављамо $t\in(0,\pi/2)$. Тада је

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos t}$$

и

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt.$$

Пример. Решити $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.
Уводимо смену $x=\tan t$ и добијамо

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{1}{\cos t}dt = \log\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + C$$

Сада искористимо $\frac{1}{\cos^2 t}=\tan^2 t+1$, па је $\frac{1}{\cos t}=\sqrt{x^2+1}$, при чему не узимамо корен са знаком минус испред, заро што је $\cos t>0$ на задатом интервалу $t\in(0,\pi/2)$. Следи

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

Задатак 3. а)

$$\boxed{\int\sqrt{x^2+1}dx}$$

1. начин - парцијална интеграција (као у задацима 1. и 2.)

$$\int\sqrt{x^2+1}dx = \left\{\begin{array}{l} u(x)=\sqrt{x^2+1} \\ v(x)=x\end{array}\right\} = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2\pm 1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Дакле, ако почетни интеграл означимо са I закључујемо

$$2I = x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Интеграл са десне стране смо израчунали у претходном примеру, па следи

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|) + C.$$

2. начин - смена $x = \tan t$. Добијамо

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{1}{\cos^3 t}dt.$$

Интеграл на десној страни се може решити увођењем смене

$$s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Тада следи

$$\int \frac{1}{\cos^3 t}dt = 2\int \frac{(1+s^2)^2}{(1-s^2)^3}ds.$$

Задатак 3. б)

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a^2}dx}$$

Задатак ћемо решити свођењем на претходни

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = a\int \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{a}, \\ dt = \frac{dx}{a} \end{array} \right\} = a^2 \int \sqrt{t^2+1}dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\Big) + C.$$

Интеграл облика $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$.

Овакве интеграле можемо решити сменом

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Тада је

$$x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

па се почетни интеграл своди на интеграл рационалне функције.

Пример. Решити $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Уводимо смену $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Тада је $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$ и $dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$ па имамо

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 4\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt.$$

Последњи интеграл је интеграл рационалне функције, па се решава на раније описан начин.