

1. Нека је (X, \mathfrak{M}, μ) простор са мером. Кажемо да је скуп $E \subseteq X$ *локално мерљив* ако $E \cap A \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ такве да је $\mu(A) < +\infty$. Дефинишимо

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ је локално мерљив}\}.$$

- а) [7] Доказати да је $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ -алгебра.

Простор са мером (X, \mathfrak{M}, μ) називамо *засићеним* ако важи $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$. Меру μ на мерљивом простору (X, \mathfrak{M}, μ) зовемо *σ -коначна* ако је $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$.

- б) [4] Ако је μ σ -коначна, доказати да је (X, \mathfrak{M}, μ) засићен.

Дефинишимо функцију $\bar{\mu} : \overline{\mathfrak{M}} \rightarrow [0, +\infty]$ као

$$\bar{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ако } E \in \mathfrak{M}, \\ +\infty, & \text{ако } E \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{M}. \end{cases}$$

- в) [7] Доказати да је $\bar{\mu}$ мера на $(X, \overline{\mathfrak{M}})$.
- г) [4] Ако је мера μ комплетна на простору са мером (X, \mathfrak{M}, μ) , доказати да је и мера $\bar{\mu}$ такође комплетна на простору са мером $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \bar{\mu})$.
- д) [4] Доказати да је $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \bar{\mu})$ засићен простор са мером. У литератури се он назива *засићење* простора са мером (X, \mathfrak{M}, μ) .
2. а) [15] Дефинисати Лебегову σ алгебру и Лебегову меру.
- б) [6] Навести три σ -алгебре које су садржане у Лебеговој σ алгебри.
- в) [4] Објаснити да ли су карактеристична функција Канторовог скупа и Канторова сингуларна функција Лебег мерљиве.
3. а) [15] Доказати Левијев став.
- б) [10] Израчунати $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx$.
4. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f_n(x) = \chi_{[n^\alpha, 2n^\alpha]}(x),$$

где је α реалан број. У зависности од параметра α , испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- а) [8] μ -скоро свуда;
б) [8] у простору $L^1(\mathbb{R}, \mu)$;
в) [8] по мери μ ,

где је μ Лебегова мера на \mathbb{R} .

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

1. а) Узмимо произвољан скуп $E \in \mathfrak{M}$. Тада наравно за сваки $A \in \mathfrak{M}$, па и конкретно за A који је коначне мере важи $A \cap E \in \mathfrak{M}$ јер је \mathfrak{M} σ -алгебра. Одатле следи да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$. Докажимо сада да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ -алгебра. Прво, $\emptyset \in \overline{\mathfrak{M}}$ јер $\emptyset \cap A = \emptyset \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ па тим и за све A коначне мере. Мало је сложенији посао доказати да ако $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, онда и $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$. Узмимо произвољан скуп $A \in \mathfrak{M}$ коначне мере. Треба доказати да $E^c \cap A \in \mathfrak{M}$. Приметимо да важи следећи низ једнакости

$$E^c \cap A = \emptyset \cup (E^c \cap A) = (A^c \cap A) \cup (E^c \cap A) = (A^c \cup E^c) \cap A = (A \cap E)^c \cap A.$$

Последњи скуп припада \mathfrak{M} јер по услову да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ следи да $A \cap E \in \mathfrak{M}$, па и $(A \cap E)^c \in \mathfrak{M}$ (јер је \mathfrak{M} σ -алгебра), а онда применимо само да пресек два скупа из σ -алгебре остаје у σ -алгебри. На крају, претпоставимо да $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и нека је $A \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп коначне мере. Тада је $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \cap A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n \cap A)$, а последња унија припада \mathfrak{M} јер сваки $E_n \cap A \in \mathfrak{M}$ и \mathfrak{M} је σ -алгебра. Тиме смо доказали да и $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$, а самим тим и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ једна σ -алгебра.

- б) Један смер знамо из а), па треба показати да је и $\overline{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Узмимо произвољан $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ и нека је $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$E = E \cap X = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E \cap E_n),$$

а последња унија је у \mathfrak{M} јер је сваки $E \cap E_n \in \mathfrak{M}$ из претпоставке да је мера сваког E_n коначна. Тиме смо доказали да је $E \in \mathfrak{M}$, па важи да је $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$.

- в) Најпре, $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ ($\emptyset \in \mathfrak{M}$ и μ је мера). Преостало је да докажемо да важи $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_n)$. Ако су сви $E_n \in \mathfrak{M}$, ово следи по дефиницији мере $\bar{\mu}$ која се поклапа са μ на \mathfrak{M} . Ако постоји E_j који се не налази у \mathfrak{M} , онда је $\bar{\mu}(E_j) = +\infty$. Ако $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \notin \mathfrak{M}$, онда је и $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$, па важи $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_n)$. Остаје да проверимо случај када постоји $E_j \notin \mathfrak{M}$, а да важи $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathfrak{M}$. У том случају је десна страна поново $+\infty$ (јер је $\bar{\mu}(E_j) = +\infty$). Ако би важило да је $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) < +\infty$, тада би по дефиницији $\overline{\mathfrak{M}}$ имали да $E_j = E_j \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \in \mathfrak{M}$, што је супротно претпоставци. Дакле, важи да је $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$ па су и овде лева и десна страна једнаке.
- г) Узмимо произвољан скуп $F \in \overline{\mathfrak{M}}$ такав да је $\bar{\mu}(F) = 0$ и $E \subseteq F$. Из чињенице да је $\bar{\mu}(F) = 0$ закључујемо да је $\mu(F) = \bar{\mu}(F) = 0$. Како је μ комплетна, то $E \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ па смо показали и да је $\bar{\mu}$ комплетна.
- д) Узмимо произвољан скуп $E \subseteq X$ такав да је $E \cap A \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $A \in \overline{\mathfrak{M}}$ такве да је $\bar{\mu}(A) < +\infty$. Треба доказати да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, тј. да за произвољно $B \in \mathfrak{M}$ за које је $\mu(B) < +\infty$ важи да $E \cap B \in \mathfrak{M}$. Како је $B \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$, то је $\bar{\mu}(B) = \mu(B) < +\infty$, па по претпоставци знамо да $E \cap B \in \overline{\mathfrak{M}}$. Даље, како је $\mu(B) < +\infty$, то је $(E \cap B) \cap B \in \mathfrak{M}$ (ово је из дефиниције $\overline{\mathfrak{M}}$). Но, $(E \cap B) \cap B = E \cap B$, па смо показали да $E \cap B \in \mathfrak{M}$, што је и био циљ.

2. а) Нека је $\mathcal{J} = \{[a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ полуалгебра полузатворених интервала и $m : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ мера на њој дефинисана са $m([a, b]) = b - a$. Продужимо ову меру на минималну алгебру \mathcal{A} која

садржи \mathcal{J} . Сваки елемент из алгебре \mathcal{A} је облика $\bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k)$, за произвољне $-\infty \leq a_k \leq b_k < a_{k+1} \leq \infty$ и дефинишемо меру $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ са $m\left(\bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$. Сада продужимо меру m до спољне мере m^* на партитивном скупу од \mathbb{R} . Уз помоћ m^* и алгебре \mathcal{A} дефинишемо Каратеородијеву σ -алгебру \mathfrak{M}_L коју називамо Лебегова σ -алгебра. (Она садржи алгебру \mathcal{A} .) Рестрикција спољне мере m^* на \mathfrak{M}_L се назива Лебегова мера. (Погледати 4. недељу на е-настави.)

б) $\mathfrak{M}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ је минимална σ -алгебра над \mathbb{R} и сигурно је садржана у свакој σ -алгебри над \mathbb{R} , па је садржана и у Лебеговој. $\mathfrak{M}_2 = \{\emptyset, (-\infty, 1), [1, \infty), \mathbb{R}\}$ је σ -алгебра над \mathbb{R} и важи $\mathfrak{M}_2 \subset \mathcal{J} \subset \mathfrak{M}_L$. Нека је \mathfrak{M}_3 Борелова σ -алгебра. Она је садржана у Лебеговој, зато што је то минимална σ -алгебра над полуалгебром \mathcal{J} .

в) Канторов скуп K је Борел мерљив, па и Лебег мерљив. Дакле, $K \in \mathfrak{M}_L$ па је функција χ_K Борел мерљива и Лебег мерљива. Канторова сингуларна функција је непрекидна па је Борел мерљива па и Лебег мерљива. (Погледати 6. недељу на е-настави.)

3. а) Став 3.25. у књизи. (9. недеља на е-настави.)

б) Да бисмо применили Левијев став треба показати да $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ конвергира, при чему је $f_n(x) = \frac{\cos nx}{ne^{nx}}$. Важи $|f_n| \leq \frac{1}{ne^{nx}}$ ($|\cos(nx)| \leq 1$) па је на основу првог поредбеног критеријума за несвојствене интеграле $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{ne^{nx}} dx$. У интегралу са десне стране уводимо смену $nx = t$ па је $\int_0^{+\infty} \frac{1}{ne^{nx}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 e^t} dt = \frac{1}{n^2}$. Пошто $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира (ова сума је $\frac{\pi^2}{6}$) онда и $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ конвергира.

Изрчунајмо тражени интеграл. На основу Левијевог става важи $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Интеграл на десној страни ћемо решити уз помоћ смене $nx = t$ и парцијалне интеграције.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = \sin t \end{array} \right\} = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \sin t e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = -\cos t \end{array} \right\} = \frac{1}{n^2} (1 - I),$$

при чему је $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t} dt$. Дакле $I = 1 - I$ тј. $I = 1/2$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx = \frac{1}{2n^2}$. Следи

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Урадићемо прво случај $\alpha = 0$. Тада је $f_n(x) = \chi_{[1,2]}(x)$, дакле константан низ. Константан низ конвергира ка истој тој константи за сваку дефиницију конвергенције а), б) и в).

Нека је $\alpha > 0$.

а) Важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Дакле f_n конвергира ка функцији $f = 0$ свуда, па и μ -скоро свуда.

б) Прво приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о конвергенцији у L^1 норми. Пошто важи $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| dx = n^\alpha \rightarrow \infty$ следи да низ f_n не конвергира у L^1 норми.

в) Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Скуп свих $x \in \mathbb{R}$ где је $|f_n(x) - 0| > \epsilon$ је или празан (ако је $\epsilon \geq 1$) или $[n^\alpha, 2n^\alpha]$ ако је $\epsilon < 1$. Дакле, тај скуп је највише мере n^α . Пошто је $\alpha > 0$ онда је лимес низа мера ∞ , па не важи конвергенција по мери.

Нека је на крају $\alpha < 0$.

а) Најпре је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ (тачка по тачка). Дакле f_n конвергира μ -скоро свуда ка функцији $f \equiv 0$, јер се $\chi_{\{0\}}(x)$ и нула функција разликују само у једној тачки (у $x = 0$) што је скуп Лебегове мере 0.

б) Опет приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о о конвергенцији у L^1 норми. Једини кандидат јесте функција $f \equiv 0$, па треба израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = n^\alpha \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па $f_n \rightarrow 0$ у L^1 норми.

в) Из конвергенције у L^1 норми следи конвергенција у мери, па закључујемо да $f_n \rightarrow 0$ по мери μ .