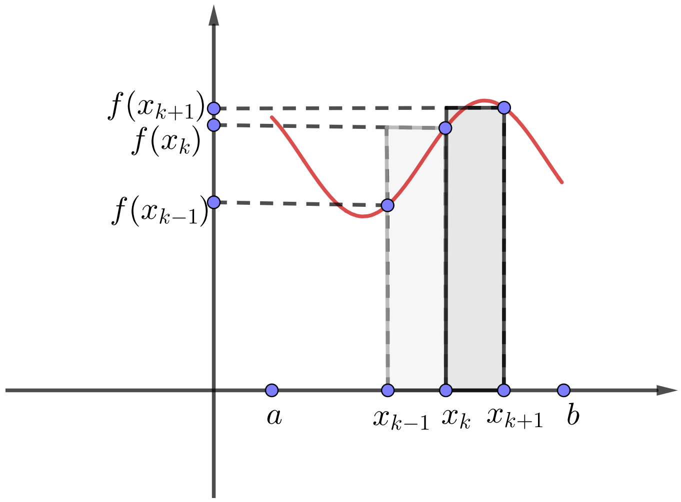


Одређен интеграл. Кошијев интеграл.

Нека је дата функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ непрекидна. Поделимо интервал $[a,b]$ на n интервала једнаких дужина $\frac{b-a}{n}$. Означимо тачке интервала са x_k, $k = 0, \ldots, n$, при чему је $x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b$. Сада над сваким интервалом $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, посматрамо правоугаоник Π_k коме је друга страница дужине $f(x_k)$. Површина овог правоугаоника је $P(\Pi_k) = f(x_k)\frac{b-a}{n}$. Укупан збир површина свих правоугаоника је $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$. Приметимо да што је n веће, тј. подела интервала ситнија, ова сума је ближа површини између графика функције и x-осе. Дакле, ове суме апроксимирају површину између графика и x-осе. Када n тежи ка бесконачно, та сума постаје управо површина испод графика. Ово запажање ће нам помоћи да дефинишемо Кошијев интеграл.

Кошијев интеграл се дефинише за сваку непрекидну функцију $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ на ограниченом интервалу $[a,b]$. Поново поделимо интервал $[a,b]$ на n интервала једнаких дужина $\frac{b-a}{n}$. Означимо тачке интервала са x_k, $k = 0, \ldots, n$, при чему је $x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b$. Посматрамо низ

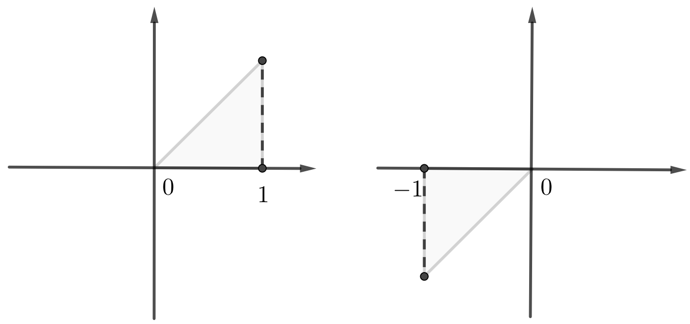
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}.$$

Став. Низ S_n је конвергентан.

Дакле, низ S_n има коначан лимес, и тај лимес ће бити наш одређени интеграл.

Дефиниција. Кошијев интеграл непрекидне функције $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ је

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}.$$



Ознака Кошијевог интеграла је

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Дакле

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n}.}$$

Као што смо горе описали, Кошијев интеграл ненегативне функције на интервалу је управо површина испод графика. Слично, интеграл негативне функције на интервалу је једнак површини од x-осе до графика али са знаком минус.

Пошто је Кошијев интеграл дефинисан као лимес конвергентног низа значи да је увек коначан.

Пример. Решити $\int_0^1 xdx$ и $\int_{-1}^0 xdx$.

Решимо први интеграл. Подинтегрална функција је ненегативна, па је овај интеграл једнак површини испод графика, видимо да је то управо површина правоуглог и једнакостраничног троугла, чија је катета дужине 1 (погледати слику). Дакле

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Овај пример ћемо решити и по дефиницији преко лимеса. Дакле,

$$\int_0^1 xdx \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2},$$

при чему једнакост $*$ важи зато што су тачке интервала $c_k = \frac{k}{n}$.

Слично важи и $\int_{-1}^0 xdx = -\frac{1}{2}$.

Став. Нека је $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ произвољна тачка. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx.$$

Дакле, овај став показује да Кошијев интеграл не зависи од избора тачака из интервала у којима узимамо вредност функције. Ту особину ћемо често користити.

Дефиниција. Уводимо и следеће дефиниције

$$\int_a^a f(x)dx \overset{\text{деф}}{=} 0$$

и

$$\int_b^a f(x)dx \overset{\text{деф}}{=} -\int_a^b f(x)dx.$$

Приметимо да је дефиниција интеграла у тачки у сагласности са дефиницијом Кошијевог интеграла на интервалу, зато што је површина дужи наравно нула.

Став. За свако $c \in (a, b)$ важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Дакле, интеграл можемо изделити на делове и радити посебно.

Пример. Израчунати $\int_{-1}^{1} |x|dx$.
Користимо $|x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \end{cases}$, па је $\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Став. (Линеарност Кошијевог интеграла.) Ако су $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ две непрекидне функције, тада важи

$$\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)dx,$$

за сваке две константе $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Доказ.

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx &\overset{\text{деф}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1 f(x_k) + \lambda_2 g(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} + \lim_{n\to\infty} \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

При чему $*$ важи на основу Става о коначности Кошијевог интеграла. Дакле, немамо облик $\infty - \infty$ па важи да је лимес збира једнак збиру лимеса. $\square$

Последица. Ако је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in [a, b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Доказ. Приметимо прво да за сваку ненегативну функцију $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ на основу дефиниције Кошијевог интеграла важи $\int_a^b h(x)dx \geq 0$. Нека је $h(x) = g(x) - f(x)$. Тада је $h(x) \geq 0$. Због линеарности интеграла важи

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b h(x)dx \geq 0.$$

Дакле, $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$, што је и требало показати. $\square$

Став. (Основна интегрална неједнакост.) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Доказ. С обзиром да је $f(x) \leq |f(x)|$ и $-f(x) \leq |f(x)|$, за све $x \in [a, b]$, на основу претходне последице следи да је

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad \int_a^b (-f(x))dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Дакле,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

што је еквивалентно траженој неједнакости. $\square$

Став. Нека је f непрекидна и ненегативна функција на интервалу $[a, b]$ и нека је $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тада је $f(x) = 0$ за све $x \in [a, b]$.

Доказ. Претпоставимо супротно. Постоји $x_0 \in [a, b]$ тако да је $f(x_0) = A > 0$. Из непрекидности функције f следи да (за $\epsilon = \frac{A}{2}$) постоји $\delta > 0$ тако да за све $x \in [a, b]$

такве да је $|x - x_0| < \delta$ важи $|f(x) - f(x_0)| < \frac{A}{2}$. Дакле, за све $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) \in (f(x_0) - \frac{A}{2}, f(x_0) + \frac{A}{2}) = (\frac{A}{2}, \frac{3A}{2})$. Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \frac{A}{2}2\delta > 0.$$

Дакле, закључујемо да је почетни интеграл позитиван, што је контрадикција у односу на претпоставку да је интеграл једнак нули. □

Напомена. Услов да је функција f ненегативна у претходном ставу је битан. На пример, функција $f(x) = x$ на интервалу $[-1, 1]$ мења знак, и важи

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

где прва једнакост важи на основу става да се интеграл може раздвојити на два, а друга једнакост је израчуната у примеру након дефиниције Кошијевог интеграла. Подинтегрална функција није једнака нули, али њен интеграл јесте нула.

Теорема. (Прва теорема о средњој вредности интеграла.) Нека су $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне функције и нека је $g(x) \geq 0$ за све $x \in [a, b]$. Тада постоји $\xi \in [a, b]$ тако да важи

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказ. Претпоставимо прво да је $\int_a^b g(x)dx = 0$. Пошто је $g(x) \geq 0$ за све $x \in [a, b]$ тада је она основу претходног става $g(x) = 0$ за све $x \in [a, b]$. Тиме следи тражено тврђење, при чему ξ може бити било која тачка на интервалу $[a, b]$.

Претпоставимо сада да је $\int_a^b g(x)dx > 0$. На основу Вајерштрасове теореме, непрекидна функција на затвореном интервалу достиже свој максимум и минимум. Нека је M максимум, а m минимум функције f. Тада је $m \leq f(x) \leq M)$ за све $x \in [a, b]$. Пошто је g ненегативна функција, следи

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

за све $x \in [a, b]$. Преласком на интеграл, следи

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx,$$

тј.

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Дељењем ових неједнакости са $\int_a^b g(x)dx$ добијамо

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

На основу теореме о међувредности непрекидних функција на интервалу, следи да функција узима све вредности између минимума и максимума. То значи да постоји неко $\xi \in [a, b]$ тако да је

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Тиме је доказ завршен. □

Дефиниција. Средња вредност непрекидне функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ је вредност

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

На основу Прве теореме о средњој вредности интеграла, средња вредност функције се достиже. Наиме, применом теореме за функцију $g(x) = 1$, добијамо тачку ξ.

Веза неодређеног и Кошијевог интеграла

Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција.

Став. Функција $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ је непрекидна.

Доказ. Треба показати $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$ што је еквивалентно томе да за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $x \in [a, b]$ за које важи $|x - x_0| < \delta$ важи и $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Пошто је функција f непрекидна, онда је она ограничена на затвореном интервалу $[a, b]$. Дакле, постоји $M > 0$ тако да је $|f(t)| < M$, за све $t \in [a, b]$. Нека је

$$\delta = \frac{\epsilon}{M}.$$

Тада је

$$|F(x) - F(x_0)| = \Big|\int_x^{x_0} f(t)dt\Big| \overset{*}{\leq} \int_x^{x_0} |f(t)|dt \leq M|x - x_0| < \epsilon,$$

где је $*$ основна интегрална неједнакост. Тиме је доказ завршен. □

Теорема. (Основна теорема интегралног рачуна.) Функција $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ је диференцијабилна и важи

$$F'(x) = f(x).$$

Доказ. На основу дефиниције извода треба показати

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Приметимо да је

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi),$$

за неко $\xi \in [x, x + h]$, где последња једнакост важи на основу Прве теореме о средњој вредности, примењеној на функцију $g(x) = 1$. Дакле

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi).$$

Пошто је функција f непрекидна и $\xi \in [x, x+h]$, преласком на лимес када $h \to 0$ следи $\xi \to x$ као и $f(\xi) \to f(x)$. Дакле, следи

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Тиме је доказ завршен. □

Теорема. (Њутн-Лајбницова формула.) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ њена примитивна функција Тада важи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ. Поделимо интервал $[a,b]$ на n једнаких делова и означимо тачке интервала са x_k, $k = 0, \ldots, n$ при чему је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. На основу Лагранжеве теореме о средњој вредности на сваком интервалу $[x_{k-1}, x_k]$ постоји тачка ξ_k тако да је

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Тада је

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots + F(x_1) - F(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Преласком на лимес, на основу дефиниције Кошијевог интеграла и на основу става да овај интеграл не зависи од избора тачака на интервалима поделе, добијамо

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Тиме је доказ завршен. □

Пример. $\int_0^\pi \cos x dx = \sin\pi - \sin 0 = 0.$