

UNM zadaci za praktikum

INTERPOLACIJA I DIFERENCIRANJE

1.

Neka je funkcija f zadana tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *novatablica.m* u kom se prethodna tablica proširuje do nove dodavanjem čvorova $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, i = 1, \dots, n-1$, i računanjem vrednosti funkcije f u njima korišćenjem formule: $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) = \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}, i = 1, \dots, n-1$.
- Napisati M-fajl *Lagr1.m* sa funkcijom $L = \text{Lagr1}(x)$ koja za uneti argument x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu pomoću Lagranžovog interpolacionog polinoma L , korišćenjem svih vrednosti iz tablice.

2.

Neka je funkcija f zadana eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom $[X, Y] = \text{tablica}(a, b, n)$ koja tabelira zadatu funkciju f na intervalu $[a, b]$ sa n čvorova.
- Napisati M-fajl *Lagr1b.m* sa funkcijom $[L, y] = \text{Lagr1b}(x, a, b, n)$ koji formira i vraća koeficijente Lagranžovog interpolacionog polinoma L formiranog koristeći sve vrednosti iz tablice, kao i vrednost formiranog polinoma u tački x .
- Uporediti grafike funkcije f i formiranog interpolacionog polinoma.

3.

Neka je funkcija f zadana tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $F = [f_1, \dots, f_n]$ za tu tablično zadatu funkciju.

- Napisati M-fajl *tablicaCheck.m* sa funkcijom *tablicaCheck()* koja vrši proveru da li je tablica u komandnom fajlu *tablica.m* ekvidistantna i da li je niz X zadat u strogo rastućem poretku. Ukoliko su oba uslova ispunjena funkcija vraća vrednost 1, u suprotnom vraća vrednost 0 i u oba slučaja ispisuje odgovarajuću poruku.
- Napisati M-fajl *polozaj.m* sa funkcijom *polozaj(x)* koja za uneti argument x vraća vrednost 1 ukoliko je $x < x_2$, 2 ukoliko je $x > x_{n-1}$ i 0 inace.
- Napisati M-fajl *Njutn.m* sa funkcijom *Njutn(x)* koja ukoliko su svi uslovi ispunjeni, vraća približnu vrednost funkcije f u tački x izračunatu korišćenjem I (II) Njutnovog interpolacionog polinoma, ako je vrednost funkcije *polozaj* u tački x jednaka 1 (2), odnosno izdaje odgovarajuću poruku ukoliko je *polozaj(x) = 0*.

4.

Neka je funkcija f zadana tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, \dots, y_n]$ za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *tablicaCheck.m* sa funkcijom *tablicaCheck()* koja vrši proveru da li je niz X zadat u strogo rastućem poretku i da li je niz Y monoton. Ukoliko su oba uslova ispunjena funkcija vraća vrednost 1, u suprotnom vraća vrednost 0. Ukoliko neki od uslova nije ispunjen, funkcija ispisuje odgovarajuću poruku.
- Napisati M-fajl *vredfunk.m* sa funkcijom *vredfunk(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost funkcije f u toj tački izračunatu pomoću Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama konstruisanog korišćenjem svih vrednosti iz tablice.

5.

Neka su u komandnom fajlu *podaci.m* dati funkcija f i vektor X koji sadrži samo celobrojne vrednosti.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom $[X1, Y1] = \text{tablica}()$ koja formira tablicu gde se vektor $X1$ sastoji samo od parnih vrednosti vektora X , a vektor $Y1$ su vrednosti eksplicitno zadate funkcije f u čvorovima vektora $X1$ zaokruženi na 3 decimale.
- Napisati M-fajl *inverz.m* sa funkcijom *inverz(y)* koja za zadatu vrednost y inverznom interpolacijom približno određuje x za koje je $f(x) = y$.
(*Tablica neće biti ekvidistantna, pa koristimo Lagranzov interpolacioni polinom)

6.

Neka je funkcija f zadana eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *tablica.m* sa funkcijom $[X, Y] = \text{tablica}(a, b, n)$ koja formira ekvidistantnu tabelu funkcije f na segmentu $[a, b]$ sa n čvorova.
- Napisati M-fajl *promenaZnaka.m* sa funkcijom $[c, d] = \text{promenaZnaka}(a, b, n)$ koja na osnovu nizova X i Y dobijenih pozivanjem funkcije *tablica(a, b, n)* pronalazi i kao rezultat vraća prvi interval $[x_i, x_{i+1}]$ u kome funkcija menja znak ($c = x_i, d = x_{i+1}$). Pretpostavlja se da takav interval postoji.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom *nula(a, b, n)* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje nulu funkcije f na intervalu $[c, d]$, koristeći II Njutnov interpolacioni polinom zaključno sa konačnim razlikama reda 3. Kriterijum zaustavljanja iterativnog niza: $|q_i - q_{i-1}| \leq 10^{-4}, i = 2, \dots$

7.

Neka je funkcija f zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, \dots, y_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica ne mora biti ekvidistantna.

- Napisati M-fajl *izvod.m* sa funkcijom $[X, Y, Yi] = izvod()$ u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica prvog izvoda funkcije f u tačkama x_2, \dots, x_{n-1} korišćenjem sledeće formule: $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$, gde je $Yi = [f'(x_2), \dots, f'(x_{n-1})]$.
- Napisati M-fajl *vredizvod.m* sa funkcijom *vredizvod(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost prvog izvoda funkcije f izračunatu korišćenjem Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama konstrusanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *izvod.m*.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje i vraća jednu nulu prvog izvoda funkcije f korišćenjem Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama (pretpostavka je da je prvi izvod monotona funkcija).

8.

Neka je funkcija f zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, \dots, y_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna (sa korakom h).

- Napisati M-fajl *drugiizvod.m* sa funkcijom $[X, Y, Y2i] = drugiizvod()$ u kom se na osnovu prethodne tablice formira tablica drugog izvoda funkcije f u tačkama x_2, \dots, x_{n-1} korišćenjem sledeće formule: $f''(x) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$, gde je $Y2i = [f''(x_2), \dots, f''(x_{n-1})]$.
- Napisati M-fajl *vred2izvod.m* sa funkcijom *vred2izvod(x)* koja za uneti argument x vraća približnu vrednost drugog izvoda funkcije f izračunatu korišćenjem I Njutnovog interpolacionog polinoma konstrusanog na osnovu svih vrednosti iz tablice iz fajla *drugiizvod.m*.
- Napisati M-fajl *nula.m* sa funkcijom *nula()* koja metodom inverzne interpolacije približno određuje nulu drugog izvoda funkcije f (pretpostavka je da je drugi izvod monotona funkcija) koristeći I Njutnov interpolacioni polinom zaključno sa konačnim razlikama reda 3. Kriterijum zaustavljanja iterativnog niza: $|q_i - q_{i-1}| \leq 10^{-4}, i = 2, \dots$

9.

Neka je funkcija f zadata tablično M-fajlom *tablica.m* koji generiše dva niza $X = [x_1, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, \dots, y_n]$ (od kojih je prvi strogo rastući) za tu tablično zadatu funkciju. Tablica mora biti ekvidistantna (sa korakom h).

- Napisati M-fajl *izvod1.m* sa funkcijom *izvod1(x)* koja računa vrednost prvog izvoda tabelirane funkcije u tački x koristeći diferenciranje I Njutnovog interpolacionog polinoma zaključno sa konačnim razlikama reda 4.
- Napisati M-fajl *izvod2.m* sa funkcijom *izvod2(x)* koja računa vrednost drugog izvoda tabelirane funkcije u tački x koristeći diferenciranje I Njutnovog interpolacionog polinoma zaključno sa konačnim razlikama reda 4.

INTEGRACIJA

10.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *trapez.m* sa funkcijom $I = \text{trapez}(a, b)$ koja približno računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije f (granice integracije su a i b) korišćenjem uopštene Trapezne kvadraturene formule sa $n = 9$ čvorova.
- Napisati M-fajl *simps.m* sa funkcijom $I = \text{simps}(a, b)$ koja približno računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije f (granice integracije su a i b) korišćenjem uopštene Simpsonove kvadraturene formule sa $n = 9$ čvorova.
- Napisati M-fajl *vredfunk.m* sa funkcijom $[X, Y] = \text{vredfunk}(k, p)$ koja približno izračunava vrednost funkcije $I(x) = \int_1^x f(t)dt$, kada se x kreće od 2 do $k \in N, k \geq 2$ sa korakom 1. Ukoliko je $p = 1$ integrale računati koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturnu formulu (sa $n = 9$ čvorova), a u slučaju kada je $p = 2$ uopštenu Trapeznu kvadraturnu formulu (sa $n = 9$ čvorova). Funkcija vraća dva niza: X sa vrednostima x_i i Y sa izračunatim vrednostima funkcije $I(x)$ u tačkama x_i .

11.

Neka je funkcija f zadata eksplicitno komadnim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *integralt.m* sa funkcijom $[I, \text{briter}] = \text{integralt}(a, b, \text{tol})$ koja sa tačnošću tol računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije f (granice integracije su a i b) korišćenjem uopštene Trapezne kvadraturene formule. Funkcija vraća vrednost integrala i broj iteracija.
- Napisati M-fajl *integrals.m* sa funkcijom $[I, \text{briter}] = \text{integrals}(a, b, \text{tol})$ koja sa tačnošću tol računa i vraća vrednost određenog integrala funkcije f (granice integracije su a i b) korišćenjem uopštene Simpsonove kvadraturene formule. Funkcija vraća vrednost integrala i broj iteracija.
- Napisati M-fajl *grafik.m* sa funkcijom $\text{grafik}(a, b)$ koja prikazuje grafik zavisnosti brzine konvergencije Simpsonove kvadraturene formule (plavo) i Trapezne kvadraturene formule (crveno), za različite tolerancije ($\text{tol} = 10^{-1}, \dots, 10^{-6}$).

12.

Neka je funkcija f (koja ne mora biti (samo) pozitivna) zadata eksplicitno funkcijskim M-fajlom *funkcija.m*.

- Napisati M-fajl *Runge.m* sa funkcijom $\text{Runge}(S1, S2)$ koja vraća vrednost Rungeove ocene greške uopštene Simpsonove kvadraturene formule, ako su $S1$ i $S2$ njene vrednosti od kojih je jedna izračunata sa dvostruko manjim korakom u odnosu na drugu.
- Napisati M-fajl *zapremina.m* sa funkcijom $\text{zapremina}(a, b, \text{tol})$ koja koristeći uopštenu Simpsonovu kvadraturnu formulu vraća zapreminu tela nastalog obrtanjem figure ograničene pravama $y = 0, x = a, x = b$ i funkcijom f oko ose Ox izračunatu sa tačnošću tol . (Za ocenu tačnosti koristiti funkciju Runge.)

13.

(kolokvijum 2011.)

- Formirati M-fajl *integral.m* sa funkcijom $integral(f, a, b)$ koja računa i vraća vrednost $\int_a^b f(x)dx$. Dozvoljeno je korišćenje ugrađene MATLAB funkcije za izračunavanje integrala.
- Formirati M-fajl *sistem.m* sa funkcijom $sistem(d, t, n)$ koja formira sistem linearnih jednačina koji se dobija prilikom nalaženja koeficijenata kvadraturene formule oblika

$$\int_0^d t(x)f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f\left(\frac{i * d}{n}\right)$$

koja treba da je tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Funkcija treba da vraća matricu sistema i vektor desne strane.

- Formirati M-fajl *koeficijenti.m* sa funkcijom $koeficijenti(d, t, n)$ koja određuje koeficijente A_i gore napisane kvadraturene formule. Dozvoljeno je korišćenje operatora \ za rešavanje sistema. (* Nakon sistema linearnih jednačina, zadatak se može rešavati i nekom od metoda za sisteme linearnih jednačina: LU, iterativna,...).

14.

- Napisati M-fajl *legendre_poly.m* sa funkcijom $L = legendre_poly(n, a, b)$ koja formira i vraća niz SVIH Ležandrovih polinoma do stepena n na intervalu $[a, b]$. Nacrtati grafik svih formiranih Ležandrovih polinoma.
- Napisati M-fajl *Cebisev_poly.m* sa funkcijom $C = Cebisev_poly(n, a, b)$ koja formira i vraća niz SVIH Čebiševljevih polinoma do stepena n na intervalu $[a, b]$. Nacrtati grafik svih formiranih Čebiševljevih polinoma.
- Napisati M-fajl *integrali.m* sa funkcijom $integrali(f, a, b)$ koja korišćenjem ugrađene MATLAB funkcije *quad()* računa i štampa vrednosti sledećih integrala:

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(x) \cdot \sin(x)dx, \quad \int_a^b f(x) \cdot L_5(x)dx, \quad \int_a^b L_5(x) \cdot L_3(x)dx,$$

gde je $L_i(x)$ Ležandrov polinom stepena i . Prosleđena funkcija f može biti složena funkcija.

15.

(kolokvijum 2012.)

- Napisati M-fajl *legendre.m* sa funkcijom $L = legendre(n)$ koja kao rezultat vraća Ležandrov polinom L stepena n na intervalu $[1, 1]$.
- Napisati M-fajl *polinom.m* sa funkcijom $P = polinom(n, m)$ koja kao rezultat vraća polinom P dobijen preko formule:

$$P(x) = (1 - x^2) \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

gde je $L_n(x)$ Ležandrov polinom stepena n za $-1 \leq x \leq 1$.

- Napisati M-fajl *integral.m* sa funkcijom $I = integral(n, m, tol)$ koja sa tačnošću tol približno određuje i kao rezultat vraća vrednost integrala $\int_{-1}^1 P(x)e^x dx$. Integral računati korišćenjem uopštene Simpsonove formule. Polinom $P(x)$ je polinom dobijen pod (2).

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

16.