Matematički fakultet

Teorija igara – vežbe

Marija Ivanović
Beograd, 2020

Sadržaj

Uvod

Svaku igru definišu sledeći elementi:

- **Igrači.** Igrači mogu biti pojedinci, država, kompanija, bilo ko ko ima neki interes od igre. Igrači donose odluke od kojih zavisi dalji tok igre.
- **Potezi igrača** (strategije, moguće odluke igrača). Primera radi, igrači mogu da ulože svoj novac, mogu da odluče da se povuku iz igre, da prodaju deonice, glasaju ili da donesu neku drugu odluku.
- **Isplata**. Isplata predstavlja doprinos igre igračima. Igrači dobijaju naknadu za odgovarajuće poteze.

Postoje dve standardne forme igre:

- **Normalna forma** (matrična igra, strategijska igra). Kod igara u normalnoj formi igrači najčešće biraju svoje poteze istovremeno.
- **Ekstenzivna forma** (uključije redosled poteza). Kod igara sa ekstenzivnom formom igrači najčešće donose svoje odluke naizmenično (poput šaha). Potezi igrača mogu da se prate tako da svaki igrač zna da li je, odnosno koji je potez prethodio njegovom potezu.

Konačna igra sa n igrača u normalnoj formi se definiše kao $< N, A, u >$ gde je

- $N = \{1,2, \dots, n\}$ skup svih igrača. Svaki igrač je predstavljen kao element skupa N.
- Potez igrača $i \in N$ se označava sa A_i, $a = (a_1, \dots, a_n) \in A = A_1 \times \cdots \times A_n$.
- Funkcija isplate igrača i se označava sa $u_i: A_i \to \mathbb{R}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Igra sa 2 igrača se najčešće zadaje matrično tako da prvi igrač bira strategije koje su zapisane kao vrsta a drugi igrač strategije koje su zapisane kao kolona matrice. Polja matrice sadrže podatke o isplatama igrača. Isplate su predstavljene kao uređeni par vrednosti u sledećem formatu:

$$(isplata\ za\ prvog\ igrača, isplata\ za\ drugog\ igrača).$$

Igre kod kojih su zapisane isplate za oba igrača nazivaju se **bimatrične igre.** Kao što se iz matrice niže može videti, ako se prvi igrač odluči za strategiju A, a drugi za strategiju C, tada prvi dobija 1, a drugi 2. Slično, ako se prvi odluči za A, a drugi za D, prvi će dobiti 5 a drugi 6.

		Potezi drugog igrača	
		C	D
Potezi prvog igrača	A	(1,2)	(5,6)
	B	(3,4)	(7,8)

Inače, ako su kao elementi matrice zapisane samo isplate jednog igrača, onda je neophodno da se isplate svakog igrača posebno navedu:

- Isplate prvog igrača

		Potezi drugog igrača	
		C	D
Potezi prvog igrača	A	1	5
	B	3	7

- Isplate drugog igrača

		Potezi drugog igrača	
		C	D
Potezi prvog igrača	A	2	6
	B	4	8

U deljm tekstu podrazumeva se da vrste predstavljaju poteze prvog igrača a kolone drugog, tako da će vrsta „Potezi pvog igrača" i kolona matrice „Potezi drugog igrača" biti izostavljene.

U slučajevima kada u igri učestvuje veliki broj igrača, matrični zapis je skoro nemoguć. U tom slučaju isplata igrača se zapisuje pomoću odgovarajuće funkcije. Takva funkcija mora da obuhvati isplate koje zavise od svih mogućih poteza igrača.

Igrači mogu međusobno da sarađuju ili da budu suprotstavljeni. U zavisnosti u kakvom međusobnom odnosu se oni nalaze, izbor strategija može biti drugačiji.

Teorija igara se bavi proučavanjem uticaja strategija (poteza igrača) na konačni ishod nekog događaja (u daljem tekstu igre), tj. kako najbolje izabrana strategija jednog učesnika događaja (u daljem tekstu igrača) utiče na drugog i obrnuto. Određivanje nezavisnosti između strategija može biti izuzetno složeno budući da je potrebno da učesnici biraju svoje strategije i reaguju na izbor drugih učesnika.

1. Igre u normalnoj formi

1.1 Dilema zatvorenika i stroga dominacija

Dilema zatvorenika jedna je od najstarijih i najproučavanijih problema u teoriji igara. Ovaj problem ima jednostavno rešenje i stoga se često koristi kao uvod u teoriju igara.

Problem 1 (dilema zatvorenika)
Dva lopova su odlučila da opljačkaju prodavnicu elekronskih uređaja. U momentu kada su otvorili zadnja vrata prodavnice, policija ih je uhapsila. Policija pretpostavlja da su nameravali da provale i opljačkaju prodavnicu ali bez dovoljno dokaza ne može da ih optuži. Stoga policija pokušava da izvuče priznanje. Policija smešta lopove u različite prostorije radi ispitivanja. Pregovarač nudi sledeći dogovor:

Optužićemo Vas za upad na tuđ posed, što je u proseku mesec dana zatvora. Znamo da ste planirali da opljačkate prodavnicu, ali u ovom momentu nemamo dovoljno dokaza. Potrebno nam je Vaše priznanje. Ukoliko sarađujete, odbacićemo optužbe za upadanje na tuđ posed, a saučesnik će biti osuđen na maksimalnu kaznu, odnosno 12 meseci zatvora. Isti dogovor ponudićemo i saučesniku. Ako oboje priznate, nećemo moći da vas oslobodimo optužbe i moraćemo da vas pošaljemo u zatvor na 8 meseci za prekršaj koji ste načinili. Ako oboje ćutite, bićete optuženi na mesec dana zatvora zbog štete koju ste načinili.

Ukoliko su lopovi sebični, a za cilj imaju isključivo minimizaciju sopstvene kaze, da li treba da prihvate ponudu koju im je pregovarač ponudio?

Rešenje:
Na osnovu podataka koje je pregovarač izneo, možemo da napravimo matricu mogućih ishoda. Oba lopova imaju dva izbora (dve strategije): *priznati* i *ne priznati prekršaj*. U zavisnosti od izabrane strategije, vreme služenja kazne priikazano je u matrici niže:

Prvi\Drugi	Ne priznaje	Priznaje
Ne priznaje	(-1,-1)	(-12,0)
Priznaje	(0,-12)	(-8,-8)

Strategije prvog igrača su predstavljene vrstama, dok su strategije drugog igrača prikazane kao kolone matrice. Isplate prvog igrača prikazane su kao prva vrednost uređenog para, dok su isplate drugog igrača prikazane kao druga. U nastavku će prvi igrač biti označen kao muškarac a drugi kao žena. Dakle, ako muškarac ne prizna, a žena prizna pokušaj pljačke, muškarac će biti optužen na 12 meseci zatvora a žena na 0 (gornji desni ugao matrice).
Koju strategiju će igrači izabrati?

Igrač 1 (muškarac):

- Pretpostavlja da će žena ćutati. Razmatramo samo vreme služenja kazne muškarca (pošto je muškarcu bitno samo njegovo vreme služenja kazne, možemo da obrišemo potencijalno vreme služenja kazne žene):

Prvi\Drugi	Ne priznaje
Ne priznaje	(-1,)
Priznaje	(0,)

  Budući da se bira između mesec dana kazne i 0 meseci kazne, jasno je da će muškarac izabrati da prizna krivicu.
- Pretpostavlja da će žena priznati krivicu. Matrica isplate je sledećeg oblika

Prvi\Drugi	Priznaje
Ne priznaje	(-12,)
Priznaje	(-8,)

  Ženino priznavanje krivice nateraće muškaraca da i on prizna svoju krivicu (8 meseci zatvora je manje od 12).

Najzad možemo da zaključimo, muškarcu se u oba slučaja više isplati priznavanje krivice. Na sličan način možemo da razmotrimo situaciju u kojoj se nalazi žena.

Igrač 2 (žena):

- Žena pretpostavlja da će muškarac ćutati (iako znamo da neće). Njena situacija se može prikazati na sledeći način

Prvi\Drugi	Ne priznaje	Priznaje
Ne priznaje	(,-1)	(, 0)

  Vidimo da se ženi više isplati priznavanje krivice jer bi u tom slučaju bila oslobođena zatvora.

- Žena pretpostavlja će muškarac priznati krivicu. Matrica isplate za ženu je sledeća:

Prvi\Drugi	Ne priznaje	Priznaje
Priznaje	(,-12)	(, -8)

Lako se može zaključiti da se i u ovoj situaciji ženi više isplati priznavanje krivice.

Najzad, možemo da zaključimo da će oboje priznati krivicu i završiti u zatvoru na 8 meseci. Da li su mogli bolje da prođu, da su se pre same pljačke dogovorili da ćute u slučaju da budu uhvaćeni?

Prvi\Drugi	Ne priznaje	Priznaje
Ne priznaje	(-1,-1)	(,)
Priznaje	(,)	(-8,-8)

Ako pažljivije pogledamo matricu ishoda, videćemo da bi situacija u kojoj oboje ćute omogućila samo mesec dana zatvora. Zašto je skoro nemoguće da se lopovi izvuku sa samo mesec dana kazne? Za svakog pojedinačno, najviše se isplati da drugi ćuti i da samo on(ona) prizna krivicu. Stoga je situacija u kojoj oboje ćute suštinski nestabilna.

Problem 2

Posmatrajmo istu igru ali sa drugačijom matricom isplate. Na primer, dve sukobljene države razmišljaju o tome da li da započnu međusobni rat. Vojna tehnologija obe države biće presudna u konačnom ishodu. Takođe, država koja prva napadne, imaće veliku prednost u nastavku rata. Tačnije, prednost koju država ima ako prva napadne je toliko velika da svaka država želi da napadne prva. Međutim, budući da rat odnosi veliki broj ljudskih žrtava a i materijalnih troškova, možda će se obe države ipak odlučiti da do napada ne dođe. Posmatrajmo sledeću matricu isplate:

	Brani se	Napada prva
Brani se	(3, 3)	(1, 4)
Napada prva	(4, 1)	(2, 2)

Na osnovu matrice isplate, možemo da primetimo da i jednoj i drugoj državi više odgovara da napadne prva a da se druga samo brani (ako je jedna napala prva, druga ne može da napadne prva, zar ne?). Sledeći najbolji ishod je ukoliko se održi mir između ovih država (brani se, brani se). Nakon toga, sledeća najbolja strategija je da obe države istovremeno proglase rat. Za svaku državu najnepovoljnija pozicija je da se brani nakon što je napadnuta.

Igra ne treba dodatno da se rešava, budući da je upravo rešena. Najbolje strategije oba igrača su <Brani se, Brani se>. Prednost napada u ovoj igri dovodi obe države u istu situaciju kao i lopove u dilemi zatvorenika.

Problem 3

Svaka država se susreće sa situacijom u kojoj treba da odluči da li i koliko treba da se ulaže u vojnu tehnologiju. Proizvodnja oružja je skupa ali omogućava određenu sigurnost u slučaju napada. Neka su mogući ishodi prikazani sledećom matricom isplate:

	Ne proizvodi	Proizvodi
Ne proizvodi	(3, 3)	(1, 4)
Proizvodi	(4, 1)	(2, 2)

Ako pogledamo matricu isplate videćemo da se državama najviše isplati da proizvode oružje u momentima kada njihovi protivnici to ne rade, što znači da će umesto ishoda <ne proizvodi, ne prozvodi> obe države da se odluče za ishod <proizvodi, proizvodi>. Na ovaj način, države održavaju istu vojnu snagu u odnosu na protivnika (u oba slučaja), ali ne troše novac ulaganjem u proizvodnju oružja u oba slučaja. Najgori mogući scenario za državu je da ne proizvodi oružje dok to radi njihov protivnik. Ponovo je jasno da će se obe države odlučiti za proizvodnju oružja.

Problem 4

Posmatrajmo situaciju u kojoj država bira da li da oporezuje uvoznu robu i na taj način zaštiti domaće proizvođače iako će dodatno oporezivanje povećati cene prozivoda. Država može da naplati porez na robu druge zemlje ili da se odluči da ta roba ostane bez poreza. Najbolji rezultat za svaku zemlju je da oporezuje uvoz, a da druga država iz koje se ta roba izvozi ne oporezuje svoj izvoz. To domaćim industrijama omogućuje prednost kod kuće i konkurentnost u inostranstvu, a zemlji prihod od poreza. Sledeći najbolji ishod je slobodna trgovina, jer omogućava najniže cene za sve pojedine zemlje. Uzajamne tarife sledeći su najbolji ishod, jer svakoj državi daju prednost kod kuće, ali ne i u inostranstvu. Najgori mogući ishod je da država ne oporezuje robu koju druga država oporezuje, jer u tom slučaju domaća industrija nema šanse protiv stranih rivala. Neka su odluke o tome da li će jedna država oporezivati uvoz susedne države ili ne, dati matricom isplate

	Ne oporezuje	Oporezuje
Ne oporezuje	(3, 3)	(1, 4)
Oporezuje	(4, 1)	(2, 2)

Jasno nam je da je ovaj problem samo druga verzija dileme zatvorenika i da se svakoj državi najviše isplati da oporezuje robu koja se uvozi ako je nije oporezovala država koja je izvozi. Takođe, ako druga država oporezuje robu koju izvozi, oporezivanje se najviše isplati i državi koja tu robu uvozi. Dakle, oporezivanje strogo dominira situaciju u kojoj država ne oporezuje robu.

Problem 5

Kao poslednju primenu dileme zatvorenika uzećemo primer marketinga. Da li država treba da zabrani reklamiranje određenih proizoda? Ako reklame navode kupce da kupe određeni proizvod a ne "određeni proizvod određene marke", onda je odgovor sigurno pozitivan. Međutim, ako jedna strana reklamira svoj proizvod a druga ne, firma koja reklamira svoj proizod će značajno smanjiti prodaju istog tog proizvoda druge marke. Ako se obe firme jednako reklamiraju, prodaja se svodi na onaj isti procenat kao kada ne postoji reklamiranje, samo što moraju da se plate reklame.

	Reklamiranje	Bez reklama
Reklamiranje	(3, 3)	(1, 4)
Bez reklama	(4, 1)	(2, 2)

Dakle, ako jedna firma reklamira svoj proizvod, i druga će. Jedini rezultat koji su obe reklame postigle su veći troškovi izazvani troškovima reklamiranja.

*** 1970 godine Richard Nixon je uveo zakon kojim se zabranjuje reklamiranje cigara na televiziji. Fabrike duvana su zapravo profitirale zahvaljujući ovom zakonu zato što su morale zajedno da deluju u cilju promovisanja svojih proizvoda. Drugim rečima, zakon ih je naterao da iz dominantne strategije <reklamiranje, reklamiranje>, čija je isplata (2,2), pređu na ravnotežnu strategiju <bez reklama, bez reklama>, čija je isplata (3,3).

*** Opisani modeli nam omogućuju da vidimo kako se isti model može primeniti na više razlčitih situacija. Primenili smo ga na zatvorenike, rat, proizvodnju oružja, oporezivanje i reklamiranje. Nezavisno od primene, svaki od opisanih problema se poslužio mehanizmom rešavanja opisanim u dilemi zatvorenika, što znači da nam teorija igara omogućava da ujedinimo više različitih problema u jedan jedinstveni okvir.

Problem 6

Posmatrajmo turnir u kome svaku igru igraju dva igrača koja mogu da biraju između strategija "igraj" i "predaj". U zavisnosti od ishoda svake pojedinačne igre, igrači će se drugačije kotirati na glavnoj tabeli. Matrica isplate data je u nastavku

Prvi\Drugi	Igraj	Predaj
Igraj	(0, 0)	(-1, 1)
Predaj	(1, -1)	(0, 0)

Povučeni prethodnim primerima, pokušaćemo da nađemo rešenje koje će nam omogućiti bolji ishod. Pri tom, budući da su ciljevi igrača sukobljeni, cilj svakog igrača je da on lično bolje prođe a da njegov protivnik prođe što je moguće gore. Primetimo prvo da situacije u kojima oba igrača igraju ili oba predaju igru nema napretka. Slično kao i kod dileme zatvorenika, tražićemo strogo dominantne strategije. Pretpostavimo da drugi igrač bira opciju da "igra", tada su isplate prvog igrača sledeće:

Prvi\Drugi	Igraj
Igraj	(0,)
Predaj	(1,)

Ako prvi odgovori na napad, dobija 0, ako preda dobija 1. Pošto je 1 veće od 0, očekujemo da će predati igru. Slično, ako posmatramo situaciju u kojoj se drugi odluči da preda meč, onda će i prvi želeti da izabere istu strategiju. Dakle, "predaj" je strategija za koju će se prvi odlučiti nezavisno od igre drugog.

Posmatrajmo sada situaciju u kojoj prvi odluči da "igra":

Prvi\Drugi	Igraj	Predaj
Igraj	(, 0)	(, 1)

Slično kao i kod drugog igrača, bolja strategija za prvog je da drugi preda meč. Do sličnog zaključka će doći i u situaciji kada se prvi odluči da preda. Dakle, iako je za oba igrača bolje da osvoje po koji poen, igra je osmišljena tako da će se oba igrača odlučiti za izbor strategije “predaj”.

Stroga dominacija kod asimetričnih igara

Problem 7
Posmatrajmo igru čija je matrica isplate zapisana na sledeći način

	Levo	Desno
Gore	(9, -2)	(3, 0)
Predaj	(8, 5)	(-1, 6)

Kod ove igre igrači imaju različite ishode u zavisnosti od poteza koji biraju, ali ako analiziramo igru slično postupku rešavanja dileme zatvorenika, videćemo da će dominantna strategija biti <gore,desno>.

Zaključak
Stroga dominacija ima značajnu ulogu u teoriji igara. Iako je sam koncept određivanja stroge dominacije relativno jednostavan, sama primena može biti složena. Igra može da sadrži dosta informacija i kada je zadata samo preko matrične forme. Da bi se uspešno odredila dominantna strategija, potrebno je da se fokusiramo na svakog igrača pojedinačno. Najzad:

1. Teorija igara predstavlja matematički metod koji omogućava da pretpostavke dovode do zaključka.
2. Iznosi koje će igrači dobiti u matricama sa isplatama predstavljaju njihove prioritete u skladu sa poznatim pretpostavkama.
3. Strategija *x strogo dominira strategiju y* ukoliko ima veću isplatu od y bez obzira na na potez drugih igrača.
4. Igranje strogo dominantnih strategija je iracionalno igranje jer druga strategija često ima bolji ishod.

1.2 Eliminacija strogo dominantnih strategija postupkom iteracije

Prednosti pri korišćenju teorije igara posebno se sastoji u analiziranju optimalnog delovanja kompanija kada te kompanije ne raspolažu sa svim informacijama. Ako je broj kompanija veliki, jedna nema preteranog uticaja na celokupni marketing. Medjutim, ako postoje samo dve konkrurentne kompanije, njihovi individualni potezi imaju veliki uzajamni ticaj.

Problem 8
Pretpostavimo da u jednom manjem gradu postoje samo dva kluba (klub1 i klub2). Oba kluba su odlučila da narednog petka organizuju žurku sa tematikom *salse* ili *disko* večeri. Klub1 je u blagoj prednosti u odnosu na Klub2 zato što se nalazi u centru grada, dok je Klub2 od centra udaljen nekoliko kilometara. Dakle, ako Klub2 napravi veče sa istom tematikom kao Klub1, očekuje se da mu niko neće doći. U tom istom malom gradu postoji tri tipa gostiju: 60% njih su strastveni ljubitelji salse koji izlaze samo ako je salsa veče, 20% njih su strastveni ljubitelji disko muzike koji izlaze isključivo na mesta koja puštaju disko, dok preostalih 20% gostiju preferira disko muziku ali će izaći i ako je salsa jedina opcija. Ukoliko oba kluba žele da maksimiziju broj svojih gostiju sledećeg petka, matrica isplate će imati sledeći oblik:

Klub1\Klub2	Salsa	Disko
Salsa	(80, 0)	(60,40)
Disko	(40,60)	(40, 0)

Lako se može zaključiti da je Klub2 u dilemi da li da priredi salsa ili disko veče. Ako se odluči da priredi isto veče kao Klub1, ostaće bez gostiju. Dakle, najveći cilj Kluba2 je da uspešno predvidi odluku Kluba1 i da priredi drugačije veče od njega. Dakle, Klub2 nema strogo dominantnu strategiju. Da li Klub2 treba da se odustane i pokuša da pogodi predvidi strategiju Kluba1 bez velikog razmišljanja? Naravno da ne! Ako Klub2 otkrije kakvo veče planira da organizuje Klub1, tada Klub2 tačno zna koju temu da izabere za sebe. Stoga ćemo probati da otkrijemo za koju temu će se odlučiti Klub1. Prvo ćemo pretpostaviti da Klub1 misli da će se Klub2 odlučiti za salsa veče. Kako će klub1 odreagovati na to:

Klub1\Klub2	Salsa
Salsa	(80,)
Disko	(40,)

Ako Klub1 izabere salsu, imaće 80% gostiju. Ako se odluči za disko, imaće samo 40% gostiju. Dakle, Klub1 će prirediti salsa veče ako misli da će iistu temu izabrati i Klub2. Šta se dešava ako Klub1 misli da će Klub2 izabrati disko veče?

Klub1\Klub2	Disko
Salsa	(60,)
Disko	(40,)

Ako Klub1 izabere salsa veče, imaće 60% gostiju, odnosno 40% ako se odluči za disko veče. Dakle, nezavisno od teme koju je izabrao Klub2, Klub1 će izabrati salsu. Imajući sada na umu da će Klub1 prirediti salsa veče, Klub2 će izabrati disko temu, jer samo na taj način može sebi da obezbedi 40% gostiju.

Problem 9

Posmatrajmo sada igru sa tri moguće strategije za dva igrača. U matrici isplate brojevi predstavljaju iznos koji će igrači dobiti (ili izgubiti) u dinarima.

Prvi\Drugi	Levo	Centar	Desno
Gore	(13, 3)	(1, 4)	(7, 3)
Sredina	(4, 1)	(3, 3)	(6, 2)
Dole	(-1, 9)	(2, 8)	(8,-1)

Pretpostavimo da igrači žele da maksimizuju svoju dobit. Budući da su nam sve isplate prikazane, imamo igru sa potpunim informacijama, pa možemo da zaključimo kako će koji igrač igrati. Kod prethodne igre jedan igrač nije imao strogo dominantnu strategiju, da li je takav slučaj i sa ovom igrom?

Pretpostavimo da prvi misli da će drugi igrati *levo*:

Prvi\Drugi	Levo
Gore	(13,)
Sredina	(4,)
Dole	(-1,)

Prvi će se u tom slučaju odlučiti za *gore* koja mu omogućava isplatu u iznosu od 13 din. Međutim, šta se dešava ako se drugi odluči za *centar*?

Prvi\Drugi	Centar
Gore	(1,)
Sredina	(3,)
Dole	(2,)

U ovom slučaju se prvi odlučuje za *sredinu* koja će mu doneti 3din. Najzad, šta se dešava ako drugi odigra *desno*?

Prvi\Drugi	Desno
Gore	(7,)
Sredina	(6,)
Dole	(8,)

Ako se drugi igrač odluči za strategiju *desno*, prvi igrač će izabrati *dole* koja će mu doneti 8 dinara. Dakle, u zavisnosti od tri različite strategije drugog igrača, strategija prvog će se takođe menjati. Kako će u tom slučaju prvi da donese odluku koja je najbolja za njega?

Da li će se čista dominantna strategija (pod **čistom strategijom** podrazumevamo da se igrač odlučio samo za tu jednu strategiju) može odrediti ako čitav postupak posmatramo iz ugla drugog igrača?

Pretpostavimo da prvi želi da odigra strategiju *gore.* Koju strategiju će birati drugi?

Prvi\Drugi	Levo	Centar	Desno
Gore	(, 3)	(, 4)	(, 3)

Drugi će se odlučiti za strategiju *centar.* Slično, ako prvi izabre strategiju *sredina*, drugi će birati strategiju *centar.*

Prvi\Drugi	Levo	Centar	Desno
Sredina	(, 1)	(, 3)	(, 2)

Međutim, ako prvi izabere strategiju *dole*, drugi će birati strategiju *levo*.

Prvi\Drugi	Levo	Centar	Desno
Dole	(, 9)	(, 8)	(,-1)

Dakle, ni na ovaj način ne možemo da odredimo strogo dominantnu strategiju ni za jednog igrača.

Da li se ova igra uopšte može rešiti tako da se dobije strogo dominantna strategija?

*****

Posmatrajmo ponovo problem dileme zatvorenika. Ako su oba igrača dovoljno pametna, treba da razmisle o tome šta drugi neće uraditi i u skladu sa tim izaberu svoju strategiju. Na primer, već smo zaključili da strategija u kojoj muškarac priznaje krivicu dominira strategiju u kojoj ćuti: ako žena ćuti, muškarac će želeti da prizna; ako žena prizna krivicu, muškarac će takođe želeti da prizna krivicu. Dakle, muškarac nikada sebe neće dovesti u situaciju da ćuti.

Posmatrajmo sada čitav problem iz ugla žene. Ona zna da je muškarac dovoljno pametan da primeti da će priznavanje krivice strogo dominirati situaciju u kojoj se krivica ne priznaje, i stoga ona može da zanemari strategiju u kojoj muškarac *ne priznaje* krivicu i deluje kao da za njega postoji samo strategija u kojoj on priznaje krivicu. Dakle, za ženu se čitava igra svodi na sledeću matricu isplate:

	Ne priznaje	Priznaje
Priznaje	(0,-12)	(-8, -8)

Ponovo je očigledno da će i žena birati da prizna krivicu jer će takvim postupkom kaznu od 12 meseci smanjiti na 8. Dakle, uz pretpostavku da muškarac igra inteligentno, iz ugla žene se igra smanjuje na matricu dimenzije 1x2 čime joj se proces određivanja strogo dominantne strategije znatno smanjuje.

*****

Da bismo rešili problem 9, posmatraćemo strategije *centar* i *desno* kao jedine dve moguće strategije drugog igrača. Budući da nas ne intresuje ishod prvog igrača, isplate za prvog igrača neće biti zapisane. Šta se može zaključiti kod matrice isplate?

	Centar	Desno
Gore	(, 4)	(, 3)
Sredina	(, 3)	(, 2)
Dole	(, 8)	(,-1)

Može da se primeti da strategija *centar* strogo dominira strategiju *desno*, tačnije možemo da zaključimo da drugi igrač nikada neće izabrati strategiju *desno.* Imajući ovaj podatak na umu, umesto polazne matrice, sada se može zaključiti da će matrica isplate imati sledeći oblik:

	Levo	Centar
Gore	(13, 3)	(1, 4)
Sredina	(4, 1)	(3, 3)
Dole	(-1, 9)	(2, 8)

Da li se matrica isplate može dodatno smanjiti? Posmatrajmo situaciju kada se prvi igrač dvoumi između svojih strategija *sredina* i *dole*. Ponovo, kako prvog igrača ne zanima isplata drugog igrača, matrica će sadržati samo podatke koji se tiču njegovih njega:

	Levo	Centar
Sredina	(4,)	(3,)
Dole	(-1,)	(2,)

Slično kao što smo došli do zaključka kod drugog igrača, možemo da primetimo da prvi igrač neće birati strategiju *dole* zato što nju strogo dominira strategija *sredina* (4 > -1, 3>2). Dakle, polazna matrica se sa 3x3 svodi na matricu 2x2.

	Levo	Centar
Gore	(13, 3)	(1, 4)
Sredina	(4, 1)	(3, 3)

Da li se sada ovaj problem može rešiti? Da, prvo se može primetiti da drugi igrač neće birati strategiju *levo* zato što je strategija *centar* strogo dominira (4>3, 3>1). Može da se precrta kolona koja označava strategiu *centar.* Sada je matrica isplate dimenzije 2x1. Ako posmatramo strategiju prvog igrača, videćemo strategija *sredina* strogo dominira strategiju *gore* (3>1) čime dobijamo konačno rešenje igre: Prvi igrač će birati strategiju *sredina* a drugi strategiju *centar* što omogućava da oba igrača dobiju po 3 din.

Problem 10 (borba za prevlast u duopolu)

U slučajevima kada samo jedna kompanija proizvodi određeni proizvod, kažemo da ta kompanija ima monopol nad tim proizvodom. Ako identičan proizvod mogu da naprave tačno dve različite kompanije, tada se takvo okruženje naziva duopolom. Budući da je tržište isto za obe kompanije, obim proizvodnje jedne kompanije direktno utiče na obim proizvodnje i krajnji profit druge kompanije. Pretpostavimo da dve kompanije, Fabrika1 i Fabrika2, mogu da proizvedu određeni proizvod i da troškovi proizvodnje koštaju 1din po prozvodu. Budući da je tržište za ovaj proizvod jedno i da nema potrebe da se napravi više proizvoda nego što tržište želi da kupi, reći ćemo da količina proizvoda koji se plasira na tržište diktira njegovu cenu. Neka je, na primer, tržište zasićeno ako ima 6 ili više ovih proizvoda i neka se cena (P) pojedinačnog proizvoda računa po sledećoj formuli $P = (12 - 2 \cdot Q)din$, gde je Q - kumulativna količina proizvoda na tržištu s tim da je cena proizvoda 0 din ako ih na tržištu ima 6 ili više. Na primer, ako je jedna fabrika napravila 3 proizvoda a druga 0, to znači da na tržištu ukupno imamo $Q = 3 + 0$ proizvoda i da je cena pojedinačnog proizvoda $P = (12 - 2 \cdot 3) = 6\ din$. Kako je prva fabrika potrošila 3 dinara na proizvodnju ova tri proizvoda, njihova ukupna zarada iznosiće 15 din. Druga fabrika neće imati prihoda a ni troškova, što znači da će njihova zarada biti 0 din. Slično, ako se obe fabrike odluče za to da naprave po 5 proizvoda, na tržištu će biti plasirano $Q = 5 + 5 = 10$ proizvoda. Cena pojedinačnog proizvoda biće jednaka nuli jer niko neće želeti da ga kupi, što znači da će obe fabrike morati da plate troškove proizvodnje koji iznose 5din (tj. njihov profit će biti -5din). Slično, neka je prva fabrika napravila 2 a druga 3 proizvoda, tada će cena tog proizvoda na tržištu biti $P = (12 - 2 \cdot 5) = 2\ din$, čime je profit prve fabrike $2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$ din a profit druge fabrike $3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3$ din. Uz pretpostavku da se i ostale kombinacije proizvodnje mogu lako izračunati u nastavku je data matrica isplate za obe fabrike:

	Nula	Jedan	Dva	Tri	Četiri	Pet
Nula	(0,0)	(0,9)	(0,14)	(0,15)	(0,12)	(0,5)
Jedan	(9,0)	(7,7)	(5,10)	(3,9)	(1,4)	(-1,-5)
Dva	(14,0)	(10,5)	(6,6)	(2,3)	(-2,-4)	(-2,-5)
Tri	(15,0)	(9,3)	(3,2)	(-3,-3)	(-3,-4)	(-3,-5)
Četiri	(12,0)	(4,1)	(-4,-2)	(-4,-3)	(-4,-4)	(-4,-5)
Pet	(5,0)	(-5,-1)	(-5,-2)	(-5,-3)	(-5,-4)	(-5,-5)

Rešenje:

Da bi rešili ovaj problem primenićemo isti princip koji smo koristili u prethodnom zadatku (u svakoj iteraciji elimisaćemo strategiju koja je strogo dominirana od strane neke druge strategije). Na primer, posmatrajmo strategije *tri* i *pet* prvog igrača:

	Nula	Jedan	Dva	Tri	Četiri	Pet
Tri	(15,)	(9,)	(3,)	(-3,)	(-3,)	(-3,)
Pet	(5,)	(-5,)	(-5,)	(-5,)	(-5,)	(-5,)

Nezavisno od poteza Fabrike2, lako se može zaključiti da strategija *tri* Fabrike1 dominira strategiju *pet* (15>5, 9>-5, 3>-5, -3>-5, -3>-5, -3>-5). Budući da obe fabrike imaju simetrične kapacitete i prodaju iste proizvode, do sličnog zaključka možemo doći i kod Fabrike2. Dakle, mogu se eliminisati kolona i vrsta koje odgovaraju strategijama *pet*:

	Nula	Jedan	Dva	Tri	Četiri
Nula	(0,0)	(0,9)	(0,14)	(0,15)	(0,12)
Jedan	(9,0)	(7,7)	(5,10)	(3,9)	(1,4)
Dva	(14,0)	(10,5)	(6,6)	(2,3)	(-2,-4)
Tri	(15,0)	(9,3)	(3,2)	(-3,-3)	(-3,-4)
Četiri	(12,0)	(4,1)	(-4,-2)	(-4,-3)	(-4,-4)

U narednoj iteraciji poredimo strategije *tri* i *četiri*:

	Nula	Jedan	Dva	Tri	Četiri
Tri	(15,)	(9,)	(3,)	(-3,)	(-3,)
Četiri	(12,)	(4,)	(-4,)	(-4,)	(-4,)

Primetićemo da strategija *tri* dominira strategiju *četiri*. Do sličnog zaključka došli bismo i da smo posmatrali kolone koje odgovaraju ovim strategijama. Na ovaj način smanjili smo dimenziju matrice isplate za još jedan:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	(0,0)	(0,9)	(0,14)	(0,15)
Jedan	(9,0)	(7,7)	(5,10)	(3,9)
Dva	(14,0)	(10,5)	(6,6)	(2,3)
Tri	(15,0)	(9,3)	(3,2)	(-3,-3)

Dalje možemo da primetimo da je strategije *nula* dominirana strategijom *jedan*:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	(0,)	(0,)	(0,)	(0,)
Jedan	(9,)	(7,)	(5,)	(3,)

Brisanjem prve vrste i prve kolone dobija se sledeća matrica isplate:

	Jedan	Dva	Tri
Jedan	(7,7)	(5,10)	(3,9)
Dva	(10,5)	(6,6)	(2,3)
Tri	(9,3)	(3,2)	(-3,-3)

U narednoj iteraciji se može primetiti da strategija *dva* dominira strategiju *tri* (matrica levo), dobija se matrica dimenzije 2x2 (matrica desno)

	Jedan	Dva	Tri
Dva	(10,)	(6,)	(2,)
Tri	(9,)	(3,)	(-3,)

	Jedan	Dva
Jedan	(7,7)	(5,10)
Dva	(10,5)	(6,6)

Ponovo se lako može zaključiti da strategija *dva* dominira strategiju *jedan* (u oba slučaja), što znači da će se obe fabrike odlučiti za proizvodnju po jednog proizvoda. Ovakav izbor strategije doneće svakoj fabrici po 6 dinara.

*** Primetimo da, ako jedna od fabrika odluči da prekine dogovor o proizvodnji tačno dva proizvoda i proizvede 1, svoj profit će povećati na 10 din. Međutim, ako se obe fabrike odluče da povećaju proizvodnju, završiće sa negativnim profitom.

Da li je bitan redosled po kome se dominantne strategije eliminišu? Da li će različit redosled eliminisanja strategija dovesti do istog konačnog ishoda?

- Kod igara sa simetričnim matricama isplate, redosled strategija koje se eliminišu je irelevantan (rešiti dilemu zatvorenika).
- Da li je redosled po kome se eliminišu strategije bitan kod igara sa asimetričnim matricama isplate? Ne (videti primer 11)!

Problem 11

Posmatrajmo problem sa sledećom matricom isplate:

	Levo	Desno
Gore	(-1, 1)	(4, 2)
Sredina	(0, 2)	(3, 3)
Dole	(-2,-2)	(2,-1)

Rešenje:

Strategija *sredina* strogo dominira strategiju *dole*:

	Levo	Desno
Gore	(-1, 1)	(4, 2)
Sredina	(0, 2)	(3, 3)

Strategija *desno* strogo dominira strategiju *levo:*

	Desno
Gore	(4, 2)
Sredina	(3, 3)

Najzad, strategija *gore* strogo dominira strategiju *sredina* čime se dobija da je konačni ishod igre <gore,desno> sa isplatom (4,2).

Vratimo se na početnu matricu. Umesto da prvo posmatramo strategije prvog igrača, posmatraćemo strategije drugog igrača:

	Levo	Desno
Gore	(, 1)	(, 2)
Sredina	(, 2)	(, 3)
Dole	(,-2)	(,-1)

Lako se može zaključiti da *desno* dominira strategiju *levo*. Brisanjem prve kolone, dobija se da kompletan ishod igre direktno zavisi od izbora prvog igrača:

	Desno
Gore	(4,)
Sredina	(3,)
Dole	(2,)

Prvi igrač će izabrati strategiju *gore* budući da mu ona donosi prihod 4 (a druge dve strategije prihod 3, odnosno 2). Dakle, konačni ishod igre je strategija <gore,desno> koja igračima donosi ishode 4 i 2.

*** Prilikom izbora dominantnih strategija posebno treba da obrati pažnja na postupak drugog igrača.

Problem 12

Rešiti igru sa sledećom matricom isplate:

	Levo	Desno
Gore	(0, 1)	(-4, 2)
Sredina	(0, 3)	(3, 3)
Dole	(-2, 2)	(3,-1)

Rešenje:

Ako posmatramo samo strategije *gore* i *sredina* možemo doći do zaključka da strategija *sredina* strogo dominira strategiju *gore*. Međutim, ovo nije sasvim tačno. Ako se drugi igrač odluči da igra strategiju *desno*, tada strategija *sredina* zaista dominira strategiju *gore* jer je $3 > -4$. Međutim, ako se drugi igrač odluči za strategiju *levo*, prvi igrač nema strogo dominantnu strategiju (ishod obe strategije za njega je 0). Stroga dominacija zahteva da strategija *sredina* uvek bude bolja od strategije *gore* (jednako dobre strategije se ne računaju).

U ovakvim slučajevima kažemo da strategija *sredina* **slabo dominira** strategiju *gore.*

Strategija x slabo dominira strategiju y ako se njenim izborom dobije rešenje koje nije gore od rešenja koje se dobija izborom strategije y, s tim da postoji makar jedan izbor strategije koji će omogućiti da izbor strategije x ostvari veću dobit u odnosu na izbor strategije y.

Posmatrajmo strategije *sredina* i *dole* prvog igrača:

	Levo	Desno
Sredina	(0, 3)	(3, 3)
Dole	(-2,2)	(3,-1)

Kod drugog igrača izbor strategije *levo* slabo dominira izbor strategije *desno*

	Levo	Desno
Sredina	(, 3)	(, 3)
Dole	(,2)	(,-1)

što nas dovodi do toga da će izbor prvog igrača zavisiti od sledeće matrice isplate:

	Levo
Sredina	(0, 3)
Dole	(-2,2)

Prvi igrač će birati strategiju *sredina* budući da ona strogo dominira strategiju *dole.* Najzad, izborom strategija <sredina, levo> igrači će postići isplate 0 i 3.

Posmatrajmo ponovo početnu matricu isplate.

Ako ponovo uzmemo u obzir strategije prvog igrača, primetićemo da strategija *sredina* slabo dominira i strategiju *dole.* Eliminacijom poslednje vrste, matrica isplate dobija sledeći oblik:

	Levo	Desno
Gore	(0, 1)	(-4, 2)
Sredina	(0, 3)	(3, 3)

Dalje strategija *desno* slabo dominira strategiju *levo:*

	Levo	Desno
Gore	(, 1)	(, 2)
Sredina	(, 3)	(, 3)

Eliminacijom prve kolone, matrica isplate se svodi na matricu dimenzije 2x1:

	Desno
Gore	(-4, 2)
Sredina	(3, 3)

Najzad, prvi igrač će birati strategiju *sredina* koja strogo dominira strategiju *gore*. Dakle, strategije igrača su <sredina,desno> sa isplatama 3 i 3.

Možemo da zaključimo da **različiti pristup u izboru slabo dominantne strategije može da dovede do različitih konačnih isplata igrača**. Dakle, potrebna je posebna opreznost kod izbora slabodominantnih strategija budući da ne postoji jasno pravilo koji pristup je koretan, odnosno dokaz da su oba pristupa korektna. Međutim, i za ovakve situacije postoji rešenje.

1.3 Optimalni izbor strategija, čista Nešova ravnotežna strategija

Problem 13

Dvojica lovaca odlaze u obližnje lovište. Poznato je da je lovište prepuno zečeva i da se u njemu nalazi tačno jedan jelen. Zečevi se lako mogu uloviti, dok je za lov na jelena za lovce neophodno da se udruže. Bez ikakve međusobne komunikacije, lovci nezavisno biraju da li će loviti zečeve ili jelena. Ako se obojica odluče za zečeve, uloviće po polovinu od ukupnog broja zečeva. Ako se jedan od njih odluči da lovi jelena, a drugi zečeve, lovac na jelena će otići kući bez ulova, dok će lovac na zečeve uloviti sve zečeve. Najzad ako obojica love jelena, onda će deo ulova svakog lovca biti veći nego da su ulovili sve zečeve. Opisana igra prikazana je sledećom matricom isplate:

	Jelen	Zečevi
Jelen	(3, 3)	(0, 2)
Zečevi	(2, 0)	(1, 1)

Rešenje:

Intuitivno je jasno da će oba lovca krenuti u lov na jelene, odnosno da će strategija <jelen, jelen> biti dominantna za oba igrača. Međutim, potpuno je moguće da će igrači završiti sa drugačijim izborom. Pristupićemo rešavanju problema slično kao što smo to radili u prethodnim zadacima. Prvo ćemo pretpostaviti da je prvom lovcu poznato da će drugi ići u lov na jelena:

	Jelen
Jelen	(3,)
Zečevi	(2,)

Budući da je $3 > 2$, očekuje se da će se i prvi odlučiti za lov na jelena. Dalje ćemo pretpostaviti da je prvom poznato da će drugi ići u lov na zečeve:

	Zečevi
Jelen	(0,)
Zečevi	(1,)

Sada je jasno da će se i prvi lovac odlučiti za lov na zečeve (*zečevi* dominiraju *jelena,* $1 > 0$). Dakle, prvi nema strogu (niti slabu) dominantnu strategiju. Zapravo, optimalna strategija prvog direktno zavisi od poteza drugog. Ako se drugi odluči da lovi jelena, onda će i prvi. Ako se drugi odluči da lovi zečeve, to isto će uraditi i prvi.

Primetićemo da je igra simetrična i da ćemo do sličnog zaključka doći ako posmatramo strategije drugog igrača. Kako se u tom slučaju rešavaju igre kod kojih ne postoji dominantna strategija?

Nešov ekvilibrijum predstavlja skup strategija (po jedna za svakog igrača) definisanih tako da ni jedan igrač, imajući u vidu izbor strategija ostalih igrača, neće postići bolji rezultat za sebe ako promeni svoj izbor.

Primera radi, kod ovog zadatka Nešova ravnotežna tačka je $<jelen, jelen>$. Da li će neko od lovaca hteti da se odluči za neku drugu strategiju? Naravno da neće. Ako razmotrimo strategiju prvog lovca kada se drugi lovac odluči da ide u lov na jelene, jasno je da će i prvi ići u lov na jelene. Ako razmotrimo strategiju drugog lovca kada se prvi odluči da ide u lov na jelene, potpuno je jasno da će se i drugi lovac odlučiti da ide u lov na jelene. Dakle, $<jelen, jelen>$ je Nešov ekvilibrijum (ravnotežna tačka). Ovakav izbor dodatno nazivamo **čistim Nešovim ekvilibrijumom** (**čistom ravnotežnom tačkom**) zato što se oba lovca odlučuju za determinističke strategije.

Da li je $<jelen, jelen>$ jedini Nešov ekvilibrijum? Lako se može videte da $<jelen, zečevi>$ i $<zečevi, jelen>$ ne mogu da budu Nešovi ekvilibrijumi. Međutim, $<zečevi, zečevi>$ mogu. Zaista, ako se drugi lovac odluči za zečeve, prvi lovac će takođe izabrati zečeve ($1 > 0$, *zečevi* dominiraju *jelena*). Takođe, ako se prvi lovac odluči da lovi zečeve, drugi lovac će se odlučiti za isto (ponovo je $1 > 0$). Dakle, ni jedan lovac neće želeti da promeni svoju strategiju ako se jedan od njih odluči za lov na zečeve.

**** Za razliku od dileme zatvorenika, kod ovog zadatka se može primetiti da oba igrača žele da usaglase svoju strategiju sa izborom drugog igrača (kod dileme zatvorenika su želeli da rade suprotno u nekim momentima). Drugim rečima, izbor strategije svakog igrača predstavlja najbolji odgovor na izbor strategije drugog igrača. Takođe, ovde smo videli da Nešov ekvilibrijum ne mora uvek da bude efikasan (postojala su dva ekvilibrijuma sa različitim ishodima). Ali oba ekvilibrijuma su stabilna, jer ni jedan učesnik igre ne želi da promeni svoju strategiju budući da će takvim potezom nauditi sebi. Ako još jednom sagledamo izbore lovaca, iako oba lovca žele da završe sa $<jelen, jelen>$, potpuno je moguće da izaberu opciju $<zečevi, zečevi>$.

Dodatno možemo da razmotrimo situaciju u kojoj na ulazu u lovište stoji znak “Danas je odličan dan za lov na zečeve”. Da li će u tom slučaju lovci želeti da love zečeve ili će nastaviti sa svojom prvobitnom idejom?

Nešov ekvilibrijum razmatra samo individualne devijacije. Dakle, dovoljno je da se proveri da li će bilo ko od igrača profitirati menjanjem samo svoje strategije.

**** Ako se vratimo na dilemu zatvorenika i posmatramo strategije igrača iz drugog ugla, ishod igre može da se promeni. Primera radi, ako igrači žele da minimizuju vreme provedeno u zatvoru, lako će završiti sa strategijom <priznaje, priznaje>. Međutim, ako igrači žele da izaberu strategiju koja je optimalna za oboje, konačni ishod se može promeniti:

Pretpostavimo da su igrači (lopovi) dobri prijatelji koji će radije ćutati nego što bi priznali planirani prekršaj (ako znaju da će se tako ponašati i drugi igrač). U tom slučaju oba igrača će birati opciju da *ne priznaju*, što ih dovodi do ishoda <ne priznaje, ne priznaje>, što je manje kumulativnog vremena provedenog u zatvoru u poređenju sa strategijama <priznaje, ne priznaje>, <priznaje, priznaje> i <ne priznaje, priznaje>. Zamislite da je matrica isplate sledećeg oblika (iste isplate kao kod prethodnog zadatka):

	Ne priznaje	Priznaje
Ne priznaje	(3, 3)	(0, 2)
Priznaje	(2, 0)	(1, 1)

Slično kao i u prethodnom zadatku, postoje dva Nešova ekvilibrijuma <ne priznaje, ne priznaje> i <priznaje, priznaje>. Kada igrači imaju strog dogovor pre početka igre, jasno da će strategija pregovarača propasti, odnosno da će <ne priznaje, ne priznaje> biti stabilna Nešova tačka.

Dakle, ako je cilj pregovarača da natera lopove da priznaju krivicu u toj nameri će uspeti jedino ako lopovi nemaju prethodni dogovor koga se čvrsto drže. Ono što je interesantno jeste da ista igra može imati različit ishod u zavisnosti od ličnih ciljeva samih učesnika igre.

Problem 14

Dva generala raspolažu sa po tri vojne jedinice koje mogu da pošalju u bitku. Svaki od generala može da bira koliko jedinica želi da pošalje u bitku, odnosno može da izabere da ih ne pošalje. Strana koja ima više vojnih jedinica dobija bitku. Bitka se nastavlja u slučaju da je poslat jednak broj vojnih jedinica od strane generala. Pobeda donosi 1 poen, poraz -1. Ako se neka strana povuče ili se makar jedna odluči da ne učestvuje u bitci, obe strane dobijaju po 0 poena. Na osnovu svih mogućih kombinacija, matrica isplate se može zapisati na sledeći način:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Jedan	(0,0)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)
Dva	(0,0)	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Tri	(0,0)	(1,-1)	(1,-1)	(0,0)

Rešenje:

Kod problema sa lovcima Nešov ekvilibrijum smo tražili tako što smo ispitali sve mogućnost. To je bilo lako jer smo imali samo 4 različite kombinacije. Međutim, kod ovog zadatka imamo 16 različitih ishoda. Ispitivanje svih ishoda zahteva dosta vremena. Zato ćemo promeniti pristup.

Najbolji odgovor predstavlja optimalnu strategiju određenog igrača u odnosu na strategije za koje su se odlučili svi ostali igrači. Dakle, ako se general 2 odluči da pošalje 0 svojih trupa u bitku, koja strategija generala 1 će biti najbolji odgovor na tu strategiju?

	Nula
Nula	(0,)
Jedan	(0,)
Dva	(0,)
Tri	(0,)

Kao što se iz dela matrice isplate može videti, strategija generala 1 nije bitna budući da je za svaki izbor njegove strategije, maksimalni dobitak koji može ostvariti jednaku 0. Dakle, svaka strategija generala 1 je najbolji odgovor na strategiju *nula* generala 2. Najbolji odgovor ćemo označavati sa '*' ubuduće:

	Nula
Nula	(0*,)
Jedan	(0*,)
Dva	(0*,)
Tri	(0*,)

Označimo najbolji odgovor generala 1 na strategije *jedan* i *dva* drugog generala:

	Jedan
Nula	(0,)
Jedan	(0,)
Dva	(1*,)
Tri	(1*,)

	Dva
Nula	(0,)
Jedan	(-1,)
Dva	(0,)
Tri	(1*,)

Dakle, general 1 gubi bitku ako pošalje jednu svoju trupu, ne dobija ništa ako pošalje svoje dve trupe i pobeđuje ako pošalje svoje tri trupe. Pošto je isplata 1 najveća, strategija *tri* generala 1 se smatra najboljim odgovorom na strategiju *jedan* i najboljim odgovorom na strategiju *dva*. Na sličan način se može popuniti i poslednja kolona, što nam u zbiru sa prethodne tri daje sledeći ishod:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	(0*,0)	(0, 0)	(0*, 0)	(0*,0)
Jedan	(0*,0)	(0, 0)	(-1, 1)	(-1, 1)
Dva	(0*,0)	(1*,-1)	(0, 0)	(-1, 1)
Tri	(0*,0)	(1*,-1)	(1*,-1)	(0*, 0)

Slično, odredićemo najbolje odgovore generala 2 na strageije generala 1:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	(,0*)	(,0*)	(,0*)	(,0*)

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Jedan	(,0)	(,0)	(,1*)	(,1*)

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Dva	(,0)	(,-1)	(,0)	(,1*)

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Tri	(,0*)	(,-1)	(,-1)	(,0*)

Najzad, najbolje odgovore oba generala grupišemo u istu matricu:

	Nula	Jedan	Dva	Tri
Nula	**(0*,0*)**	(0, 0*)	(0, 0*)	**(0*,0*)**
Jedan	(0*, 0)	(0, 0)	(-1, 1*)	(-1, 1*)
Dva	(0*, 0)	(1*,-1)	(0, 0)	(-1, 1*)
Tri	**(0*,0*)**	(1*,-1)	(1*,-1)	**(0*, 0*)**

Nešove ekvilibrijume čine oni parovi stragija kod kojih su isplate oba igrača označena zvezdicom: <0,0>, <0,3>, <3,0> i <3,3>. Izborom bilo koje druge strategije (ako drugi igrač ne menja svoj izbor) prvi igrač neće postići bolji rezultat. Slično, izborom bilo koje druge strategije (ako prvi igrač ne menja svoj izbor) drugi igrač neće postići bolji rezultat.

Dakle, Nešov ekvilibrijum čini onaj par strategija koji predstavlja uzajamno najbolji odgovor igrača na postavljenu igru.

Problem 15

Posmatrajmo dva automobila koji se približavaju raskrsnici brzinom od 60km/h iz dva suprotna smera. Ako oba automobila prođu kroz raskrsnicu bez zaustavljanja, doći će do sudara. Ako se oba automobila zaustave, izgubiće vreme na odlučivanju koji od njih treba da prođe kroz tu raskrsnicu prvi. U interesu oba vozača je da se ne zaustavljaju i da se umesto njih, zaustavi neko drugi. Rešiti igru ako je data sledeća matrica isplate:

	Prođi	Stani
Prođi	(-5,-5)	(1, 0)
Stani	(0, 1)	(-1, 0)

Rešenje:

Odredićemo strategije koja najbolji odgovor igrača na strategije drugog igrača.

	Prođi
Prođi	(-5,)
Stani	(0*,)

	Stani
Prođi	(1*,)
Stani	(-1,)

Dakle, ne postoji čista strategija za prvog igrača. Do sličnog zaključka ćemo doći ako bude posmatrali strategije optimalne drugog igrača. Najzad, grupisanjem rezultata dolazimo do sledećeg rezultata:

	Prođi	Stani
Prođi	(-5, -5)	(1*, 0*)
Stani	(0*, 1*)	(-1, 0)

Igra ima dve ravnotežne tačke: <prođi, stani> i <stani, prođi>. Međutim, prvi igrač preferira situaciju <prođi, stani> dok drugi igrač preferira situaciju <stani, prođi>. Dakle, koordinacija između igrača baš i neće biti idealna. Kako da se igrači dogovore oko izbora strategije kada se nađu u ovakvoj situaciji?

Stvetlo na semaforu će jednom vozaču signalizirati da treba da stane a drugom da prođe. Sa ovakvom odlukom vozači neće imati potrebu da menjaju odluku. Tačnije ako je jednom vozaču na semaforu upaljeno crveno svetlo (koje označava da vozač treba da se zaustavi) on neće želeti da produži jer će na taj način doći do sudara sa vozačem kome je na semaforu bilo upaljeno zeleno svetlo (koje signalizira da može da se prođe). Svetlo na semaforu sprovodi Nešove ravnotežne tačke.

1.4 Veza između dominantnosti i Nešovog ekvilibrijuma

Koja je veza između Nešovog ekvilibrijuma i iterativnog eliminisanja dominiranih strategija? Rešenja dobijena kao rezultat stroge dominacije predstavljaju Nešov ekvlibrijum. Kod dileme zatvorenika rešenje <priznaje, priznaje> pored toga što je predstavljalo dominantno rešenje, predstavljalo je i Nešov ekvilibrijum. Odredimo Nešov ekvilibrijum za problem 9.

Odredićemo najbolji odgovor na svaku strategiju zvezdicom za oba igrača:

	Levo	Centar	Desno
Gore	(13*, 3)	(1, 4*)	(7, 3)
Sredina	(4, 1)	(3*, 3*)	(6, 2)
Dole	(-1, 9*)	(2, 8)	(8*,-1)

Kao što se iz matrice može videti, Nešovu ravnotežnu tačku predstavlja strategija <sredina, centar> koju smo dobili eliminisanjem dominiranih strategija.

Dakle, iako igrači mogu da prođu bolje u slučaju da nisu birali strogo dominantnu strategiju, strategija koja je strogo dominantna za oba igrača predstavlja strategiju zbog koje ni jedna strana neće zažaliti. Konkretno za ovaj primer, ako se prvi igrač odluči da promeni strategiju, automatski završava sa manjom isplatom. Slično, ako drugi igrač odluči da promeni svoju strategiju takođe prolazi sa lošijim rezultatom. Dakle, pošto ni jednom igraču nije u interesu da prođe lošije od isplate (3,3), izabrana strategija predstavlja Nešov ekvilibrijum.

****

Nakon eliminisanja svih strogo dominantnih strategija može da se dogodi da ostane više strategija za svakog igrača. Da bismo izbegli takvu situaciju ponovićemo primer 13 uz malu izmenu.

Problem 16

Posmatramo 13 problem uz dodatak da prvi lovac, pored zečeva i jelena, može da lovi drugog lovca, dok drugi lovac može da bira između opcija da lovi zečeve, jelena ili da se sakrije. Ako prvi reši da lovi drugog lovca a ovaj se sakrije, tada će drugi lovac preživeti, inače drugi lovac završava sa popriličnо negativnom isplatom (biće pogođen). Sa druge strane, prvi lovac će osećati krivicu što je pogodio drugog, pa će i on imati negativnu isplatu

	Jelen	Zečevi	Sakrij se
Jelen	(3, 3)	(0, 2)	(0, 0)
Zečevi	(2, 0)	(1, 1)	(2, 0)
Ljudi	(-5,-10)	(-5,-10)	(0, 0)

Rešenje:

Prvo ćemo uporediti strategije prvog igrača, tj. proveriti da li neka od strategija *jelen* ili *zečevi* dominira strategiju *ljudi.*

	Jelen	Zečevi	Sakrij se
Zečevi	(2,)	(1,)	(2,)
Ljudi	(-5,)	(-5,)	(0,)

Budući da je 2>-5, 1>-5, 2>0 jasno je da strategija *zečevi* dominira strategiju *ljudi* što nas dovodi do zaključka da prvi lovac neće ići u lov na ljude. Obrisaćemo poslednju kolonu.

	Jelen	Zečevi	Sakrij se
Jelen	(3, 3)	(0, 2)	(0, 0)
Zečevi	(2, 0)	(1, 1)	(2, 0)

Budući da lovac 1 neće ići na lovca 2, možemo da proverimo da li neka od strategija *zečevi* ili *jelen* dominira strategiju *sakrij se.* Strategija *zečevi* dominira strategiju *sakrij se*:

	Zečevi	Sakrij se
Jelen	(, 2)	(, 0)
Zečevi	(, 1)	(, 0)

Stoga možemo da obrišemo i poslednju kolonu. Na ovaj način se igra svodi na problem 13. Nešov ekvilibrijum nalazimo tako što ispitamo sve četiri mogućnosti kao potencijalne ravnotežne tačke. Lako se dolazi do zaključka da su ravnotežne tačke <zečevi, zečevi> i <jelen, jelen>.

Problem 17

Odrediti Nešov ekvilibrijum za problem 12.

	Levo	Desno
Gore	(0, 1)	(-4, 2)
Sredina	(0, 3)	(3, 3)
Dole	(-2, 2)	(3,-1)

Rešenje:

Kao što smo primetili kod problema 12, strategija *sredina* slabo dominira strategije *gore* i *dole.* U zavisnosti od toga koja je od njih prva eliminisana, slabe dominantne strategije su <sredina, levo> i <sredina, desno>. Koja od ove dve strategije predstavlja Nešov ekvilibrijum?

Označićemo najbolji odgovor na svaku strategiju:

	Levo	Desno
Gore	(0*, 1)	(-4, 2*)
Sredina	(0*, 3*)	(3*, 3*)
Dole	(-2, 2*)	(3*, -1)

Budući da smo kao uzajamno najbolje odgovore dobili strategije <sredina, levo> i <sredina, desno> one se ujedno mogu i smatrati Nešvim ekvilibrijumom.

*** Iako se kod problema 17 Nešov ekvilibrijum poklopio sa slabo dominantnim strategijama, to ne mora uvek biti tačno. Ilustrovaćemo ovaj problem na sledećem problemu.

Problem 18

Odrediti dominantne strategije i Nešov ekvilibrijum za sledeću matricu isplate:

	Levo	Desno
Gore	(2, 3)	(4, 3)
Dole	(3, 3)	(1, 1)

Rešenje:

Posmatranjem strategija drugog igrača, videćemo da je njegova slabo dominantna strategija *levo*. Eliminisanjem poslednje kolone, problem se svodi na matricu dimenzije 2x1. Kod redukovane matrice se lako može videte da je *dole* dominantna strategija u odnosu na *gore* čime se dolazi do zaključka da je <dole,levo> jedina dominantna strategija za igrače.

Odredićemo posebno Nešov ekvilibrijum. Označićemo zvezdicom strategije koje su najbolji odgovor na strategije drugog igrača:

	Levo	Desno
Gore	(2, 3*)	(4*, 3*)
Dole	(3*, 3*)	(1, 1)

Postoje dva Nešova ekvilibrijuma <dole, levo> i <gore, desno>.

Problem 19

Odrediti dominantne strategije i Nešov ekvilibrijum za sledeću igru

	Levo	Centar	Desno
Gore	(2, 2)	(4, 2)	(4, 3)
Sredina	(2, 4)	(5, 5)	(7, 3)
Dole	(3, 4)	(3, 7)	(6, 6)

Rešenje:

Dominantne strategije odredićemo iterativnim uklanjanjanjem dominiranih strategija:

	Levo	Centar	Desno
Gore	(2,)	(4,)	(4,)
Sredina	(2,)	(5,)	(7,)

Pošto *sredina* dominira strategiju *gore*, obrisaćemo prvu vrstu.

	Levo	Centar	Desno
Sredina	(, 4)	(, 5)	(, 3)
Dole	(, 4)	(, 7)	(, 6)

Dalje vidimo da *centar* dominira strateije *levo* i *desno*, pa ćemo obrisati prvu i poslednju kolonu:

	Centar
Sredina	(5,)
Dole	(3,)

Pošto *sredina* dominira strategiju *dole* sledi da je dominantna strategija igrača <sredina, centar>.

Nešov ekvilibrijum tražimo tako što odredimo najbolji odgovor igrača na svaku strategiju protivnika:

	Levo	Centar	Desno
Gore	(2, 2)	(4, 2)	(4, 3*)
Sredina	(2, 4)	(5*, 5*)	(7*, 3)
Dole	(3*, 4)	(3, 7*)	(6, 6)

Primetićemo da postoji tačno jedna strategija koja se dobija kao najbolji odgovor na strategiju protivnika i da je to ista ona strategija koja se dobila kao slabo dominantna strategija, tj. strategija <sredina, centar>.

*** Na osnovu prethodnih primera možemo da zaključimo da Nešova ravnotežna tačka može ali ne mora uvek da bude dominantna strategija, kao i da je potupuno moguće da se postupkom eliminacije nedominantnih strategija eliminiše i Nešov ekvilibrijum.

Problem 20

Odrediti dominantne strategije i Nešov ekvilibrijum za sledeću igru

	Levo	Desno
Gore	(0, 1)	(-4, 2)
Sredina	(0, 3)	(3, 3)
Dole	(-2, 2)	(3,-1)

Rešenje:

Dominantna strategija je <gore, levo>, dok su Nešovi ekvilibrijumi <gore, levo> i <sredina, levo>.

NAPOMENA

1. Postupkom eliminacije strategija koje su dominirane dobija se Nešova ravnotežna tačka
2. Postupkom eliminacija slabo dominiranih strategija može se eliminisati Nešov ekvilibrijum.
3. Pri eliminisanju strategija prednost imaju strategije koje su dominirane u odnosu na one koje su slabo dominirane.

1.5 Mešovita ravnotežna tačka

Do sada smo pričali o čistim strategijama, odnosno o situacijama u kojima igrači mogu da se odluče samo za jedan potez. Mešovita strategija predstavlja kombinaciju mogućih strategija nekog igrača sa određenom pozitivnom verovatnoćom. Na primer, ako igrač i ima na raspolaganju strategije $S_i = (S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{im})$, tada njegova mešovita strategija može da se predstavi kao $\alpha_1 S_{i1} + \alpha_2 S_{i2} + \cdots + \alpha_m S_{im}$ tako da za verovatnoće $\alpha_j, j = 1, \dots, m,$ važi $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$.

Problem 21

Dvoje igrača istovremeno spuštaju novčić. U zavisnosti od toga da li je novčić spušten sa pismom na gore ili je gore glava, isplata koju igrači dobijaju je drugačija. Odrediti optimalnu strategiju igre ako su isplate prikazane matrično:

	Pismo	Glava
Pismo	(1, -1)	(-1, 1)
Glava	(-1, 1)	(1, -1)

Rešenje:

Igre ovog tipa se nazivaju **igrama sa nultom sumom** zato što je isplata koju jedan igrač dobija jednaka isplati koju drugi igrač gubi (njihove isplate imaju zbir nula). Drugim rečima, onaj igrač koji ima negativnu isplatu treba da isplati igrača čija je isplata pozitivna. Takođe, ovakva igra predstavlja tipičan primer igre u kojoj su igrači sukobljeni i žele da drugi igrač izgubi što je moguće više. Postoji veliki broj igara kod kojih igrači imaju sličan cilj: penali u fudbalu, slobodna bacanja u košarci… Kod igara sa nultom sumom dovoljno je da se prikaže matrica isplate jednog igrača, matrica isplate drugog se podrazumeva.

Prvo ćemo primetiti da se kod ove igre ne mogu izdvojiti dominantne strategije a ni čist Nešov ekvilibrijum. Dakle, ne postoje strategije koje će omogućiti igračima da budu zadovoljni svojim izborom nezavisno od strategija drugog igrača.

Pošto svaka konačna igra (igra koja ima konačni broj igrača sa konačnim brojem strategija) mora da ima najmanje jedan Nešov ekvilibrijum (Teorema Neša iz 1950 kaže da svaka konačna igra ima Nešov ekvilibrijum), Nešov ekvilibrijum mora da postoji i ovde. Međutim, ako čist ekvilibrijum ne postoji može da se odredi mešovit Nešov ekvilibrijum (mešovitu ravnotežnu tačku).

Postoji beskonačan broj različitih mešovitih strategija igrača, na primer, možemo da kažemo da će prvi igrač birati *pismo* sa verovatnoćom 1/3 i *glava* sa verovatnoćom 2/3 ili da će obe strategije biti izabrane sa verovatnoćom 1/2. Ako bi oba igrača birala svoje strategije sa verovatnoćom 1/2, isplata igrača će iznositi 0. Da bismo bolje ilustrovali mešovite strategije, malo ćemo izmeniti vrednosti matrice isplate (a čitaocima ostaviti da sami reše polazni problem):

	Pismo	Glava
Pismo	(3, -3)	(-2, 2)
Glava	(-1, 1)	(0, 0)

Kod izmenjenog zadatka takođe ne postoje dominantne strategije, niti čist Nešov ekvilibrijum. Ako prvi igrač postavi novčić tako da *pismo* bude gore, onda će drugi igrač postaviti novčić tako da gore bude *glava.* Slično, ako prvi igrač postavi novčić tako da *glava* bude gore, onda će drugi igrač postaviti novčić tako da gore bude *pismo*. Međutim, ako prvi igrač pola svog vremena postavlja novčić tako da gore bude *pismo* a pola da gore bude *glava*, tada bi njegova isplata mogla da bude $(3) \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 1$ ako se drugi ogluči za *pismo*, odnosno $(-2) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ako se drugi odluči za *glavu*.

Koja je isplata drugog igrača u slučaju da prvi igrač bira svoje strategije sa jednakom verovatnoćom?

Za strategiju *pismo*, drugi igrač bi dobio $(-3) \cdot \frac{1}{2} + (1) \cdot \frac{1}{2} = -1$, dok bi za strategiju *glava* dobio $(2) \cdot \frac{1}{2} + (0) \cdot \frac{1}{2} = 1$. Dakle, možemo reći da drugi igrač ima čistu strategiju i da bi uvek spuštao novčić sa *glavom* na gore. Postavlja se pitanje da li bi neko od njih mogao da prođe bolje i da osvoji više od jednog dinara?

Pretpostavimo da prvi igrač bira strategiju *pismo* sa verovatnoćom p, a strategiju *glava* sa verovatnoćom $1 - p$. Očekivana isplata drugog igrača će u tom slučaju iznositi

$$u_2\big((p, 1-p), pismo\big) = -3p + 1 \cdot (1-p) = -4p + 1$$

$$u_2\big((p, 1-p), glava\big) = 2p + 0(1-p) = 2p$$

Budući da izbor drugog igrača treba da bude takav da mu omogući maksimalnu isplatu, prvi igrač vrednost p određuje tako da drugi igrač nema uticaja na svoju isplatu (kada su isplate drugog igrača međusobno jednake, tada je njima jednaka i isplata svake njegove mešovite strategije). Dakle, p se bira tako da važi:

$$u_2\big((p, 1-p), pismo\big) = u_2\big((p, 1-p), glava\big)$$

odnosno kao rešenje jednačine

$$-4p + 1 = 2p.$$

Dobiće se da je $p = \frac{1}{6}$, što znači da ako prvi igrač bira strategiju *pismo* sa verovatnoćom $\frac{1}{6}$ i strategiju *glava* sa verovatnoćom $\frac{5}{6}$, drugi igrač neće imati uticaja na svoju isplatu. Slično ćemo odrediti mešovitu strategiju drugog igrača. Neka je q verovatnoća sa kojom će on birati strategiju *pismo*, a $1-q$ verovatnoća sa kojom će birati strategiju *glava*:

$$u_1(pismo, (q, 1-q)) = 3q - 2 \cdot (1-q)$$
$$u_1(glava, (q, 1-q)) = -1q + 0 \cdot (1-q)$$

Sada nam je cilj da drugi igrač bira svoju strategiju tako da prvi igrač nema uticaja na svoju isplatu:

$$u_1\big(pismo, (q, 1-q)\big) = u_1\big(glava, (q, 1-q)\big)$$

Rešenje jednačine je $5q - 2 = -q$ je $q = 1/3$. Dakle, drugi igrač će sa verovatnoćom $1/3$ birati strategiju *pismo* a sa verovatnoćom $2/3$ glava čime se dobija jedini Nešov ekvilibrijum ove igre.
Kažemo da je Nešov ekvilibrijum strategija $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

*** Nešov ekvilibrijum omogućava da prvi igrač dobije $u_1\left(\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(-2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, a drugi $u_2\left(\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \left(-3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$.

*** Pored igara sa nultom sumom postoje igre sa identičnim isplatama. To su igre kod kojih igrači dobijaju istu vrednost za svaki potez koji povuku. Ovakve igre se smatraju **nekooperativnim igrama**. Matrica isplate može da sadrži samo isplate jednog igrača.

1.6 Isplata kod mešovitih strategija

Problem 22
Dvojica mladih vozača voze direktno jedan drugom u susret. Onaj vozač koji prvi skrene sa puta smatra se kukavicom. Odrediti strategije vozača ako je igra predstavljena sledećom matricom isplate:

	Nastavi da voziš	Skreni
Nastavi da voziš	(-10, -10)	(2, -2)
Skreni	(-2, 2)	(0, 0)

Rešenje:
Na osnovu vrednosti u matrici isplate, oba igrača žele da maksimizuju svoju dobit, tj. obojica žele da voze do kraja i da drugi igrač skrene sa puta. Sledeća situacija koja im odgovara je da obojica skrenu sa puta, dok je treća situacija ona u kojoj oni skrenu dok drugi ostanu na putu. Igračima najmanje odgovara da obojica ostanu na putu do kraja.

Ova igra ima dva Nešova ekvilibrijuma, <nastavi da voziš, skreni> i <skreni, nastavi da voziš>. Proverićemo da li postoji mešovita Nešova tačka. Neka prvi igrač bira strategiju *nastavi da voziš* sa verovatnoćom p a strategiju *skreni* sa verovatnoćom $1-p$. Sa druge strane, neka su q i $1-q$ verovatnoće sa kojim drugi igrač bira svoje strategije. Odredimo vrednosti p i q :

Isplata za drugog igrača kada bira strategiju *nastavi da voziš*:

$$u_2\big((p, 1-p), nastavi\ da\ voziš\big) = -10p + 2(1-p)$$

Isplata za drugog igrača kada bira strategiju *skreni*:

$$u_2\big((p, 1-p), skreni\big) - 2p + 0 \cdot (1-p).$$

Pošto je cilj prvog igrača da drugi igrač nema uticaja na svoju isplatu, važi

$$-10p + 2(1-p) = -2p.$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se da je $p = 1/5$.
Na sličan način određujemo vrednost parametra q:

$$-10q + 2(1-q) = -2q + 0 \cdot (1-q) \qquad => \qquad q = 1/5$$

Dakle, mešovita Nešova strategija igrača je da sa verovatnoćom 1/5 biraju svoju prvu strategiju a sa verovatnoćom 4/5 drugu. Isplata koju će dobiti prvi igrač je sledeća:

$$u_1\left(\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\right)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(-10)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(-2)+(1/5)(4/5)(2)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(0)=-\frac{2}{5}.$$

Isplata koju će dobiti drugi igrač je sledeća:

$$u_2\left(\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\right)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(-10)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(2)+(4/5)(1/5)(-2)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(0)=-\frac{2}{5}.$$

Najzad možemo da zaključimo da će mešovita strategija omogućiti igračima isplatu (-2/5,-2/5) što je svakako lošije od (0,0), ali kao što smo ranije videli kod dileme zatvorenika, ishod (skreni, skreni) može biti nestabilna strategija koju će igrači najradije želeti da promene.

Problem 23

Odrediti mešovitu Nešovu strategiju problema 13. (Oba igrača će birati svoje strategije sa verovatnoćama 1/2.)

Problem 24

Odrediti mešovitu strategiju problema zatvorenika, problema 13 i problema čija je matrica isplate data u nastavku. Uporediti dobijene rezultate.

	Levo	Desno
Gore	(4, 4)	(0, 2)
Dole	(2, 1)	(1, 1)

Problem 25

Pokazati da sledeći problem nema mešovitu Nešovu ravnotežnu strategiju

	Levo	Desno
Gore	(3, 3)	(4, 1)
Dole	(1, 4)	(2, 2)

Problem 26 (Borba polova)

Muškarac i žena su se dogovorili da izađu na sastanak u petak uveče. Te večeri postoje samo dva događaja: balet i fudbalska utakmica. Iako bi žena radije išla na balet, a muškarac gledao utakmicu, oboje žele da to veče provedu zajedno. Problem je što se nisu precizno dogovorili gde će otići i ako se pojave na različitim mestima, oboje će otići kući a izlazak će propasti. Pretpostavićemo da je i naknadni dogovor ili bilo koji vid komunikacije do samog izlazka onemogućen. Gde će muškarac i žena otići ako je matrica isplate sledećeg oblika:

	Balet	Utakmica
Balet	(1,2)	(0,0)
Utakmica	(0,0)	(2,1)

Rešenje:

Lako se dolazi do zaključka da su dva Nešova ekvilibrijuma <balet, utakmica> i <utakmica, balet>. Mešoviti Nešov ekvilibrijum predstavlja strategija u kojoj prvi igrač bira balet sa verovatnoćom 1/3, dok drugi bira balet sa verovatnoćom 2/3. U slučaju mešovite strategije igrači imaju isplatu 2/3. Izbor ovako dobijene mešovite strategije nije najpovoljniji ako posmatramo čiste Nešove ekvilibrijume $(2/3 < 1)$ ali predstavlja još jednu ravnotežnu tačku koja odgovara posmatranom zadatku.

*** Ovo je jedna od poznatih igara kooperacije i takmičenja zato što oba učesnika žele da profitiraju ali tako da profitiraju više od drugog.

Problem 27

Rešiti igru

	Levo	Desno
Gore	(1,1)	(0,0)
Dole	(0,0)	(1,1)

NAPOMENA

Očekivana isplata kod mešovitih strategija predstavlja prosek ponderisanih vrednosti čistih strategija

1.7 Stroga dominantnost kod mešovitih strategija

Problem 28

Rešiti sledeću igru

	Levo	Desno
Gore	(3, -1)	(-1, 1)
Sredina	(0, 0)	(0, 0)
Dole	(-1, 2)	(2,-1)

Rešenje:

Prvo ćemo primetiti da ni jedna strategija prvog igrača ne dominira strategiju *sredina*:

	Levo	Desno
Gore	(3,)	(-1,)
Sredina	(0,)	(0,)

	Levo	Desno
Sredina	(0,)	(0,)
Dole	(-1,)	(2,)

Međutim, strategiju *sredina* strogo dominira mešovita strategija sačinjena od strategija *gore* i *dole*:

- Neka je mešovita strategija konstruisana tako da se u 50% slučajeva koristi strategija *gore* a u preostalih 50% slučajeva strategija *dole*. Očekivana isplata će u tom slučaju biti
  - $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)=1$ za prvog igrača kada drugi igra *levo*
  - $\left(\frac{1}{2}\right)(-1)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{1}{2}$ za prvog igrača kada drugi igra *desno*
- Budući da je $1>0$ i da je $\frac{1}{2}>0$ potpuno je očekivano da prvi igrač neće koristiti strategiju *sredina*, te se srednja kolona može obrisati iz matrice.

	Levo	Desno
Gore	(3, -1)	(-1, 1)
Dole	(-1, 2)	(2,-1)

Ako pogledamo redukovanu matricu, videćemo da čisti Nešovi ekvilibrijumi ne postoje. Zato ćemo odrediti mešoviti Nešov ekvilibrijum. Neka je p verovatnoća izbora strategije *gore*, a q verovatnoća izbora strategije *levo*. Verovatnoće se određuju kao rešenja sledećih jednačina:

$$-1p+2(1-p)=1p-1(1-p) \quad => \quad 3=5p \quad => \quad p=3/5$$
$$3q-1(1-q)=-1q+2(1-q) \quad => \quad 7q=3 \quad => \quad q=3/7$$

Dakle, mešoviti ekvilibrijum prvog igrača je da strategiju *gore* bira sa verovatnoćom 3/5 a strategiju *dole* sa verovatnoćom 2/5, dok je mešoviti ekvilibrijum drugog igrača da strategiju *levo* bira sa verovatnoćom 3/7 a strategiju *dole* sa verovatnoćom 4/7. Na ovaj način isplata prvog igrača je

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\cdot 3+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\cdot 2=\frac{27}{35}-\frac{6}{35}-\frac{12}{35}+\frac{16}{35}=\frac{5}{7}$$

dok je isplata drugog igrača

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\cdot(2)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\cdot(1)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\cdot(-1)=\frac{-6}{35}+\frac{12}{35}+\frac{12}{35}-\frac{8}{35}=\frac{2}{7}$$

Dakle, izborom mešovite strategije koja igračima omogućava isplatu $\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$ prvi igrač neće poželeti da igra strategiju *sredina* jer bi na taj način smanjio svoju isplatu na 0.

***

Kod zadatka smo mešovitu strategiju konstruisali tako što smo koristili druge dve sa verovatnoćama 1/2. Do sličnog zaključka smo mogli da dođemo korišćenjem i nekog drugog odnosa, na primer mogli smo da koristimo strategiju *gore* sa verovatnoćom 49/100 a strategiju *dole* sa verovatnoćom 51/100 i ponovo bismo dobili mešovitu strategiju koja strogo dominira strategiju *sredina*.

Problem 29

Rešiti sledeću igru

	Levo	Centar	Desno
Gore	(-3, 6)	(9, 1)	(0, 2)
Sredina	(3,-4)	(2, 4)	(4, 1)
Dole	(4, 7)	(3, 2)	(-3, 2)

Rešenje:
Primetimo da ne postoji ni jedna čista dominantna strategija ni za jednog igrača. Drugi igrač ima dominantnu mešovitu strategiju (konstruisanu korišćenjem strategije *levo* sa verovatnoćom 1/4 i strategije *centar* sa verovatnoćom ¾) koja dominira strategiju *desno*:

- Ako prvi igrač bira čistu strategiju *gore*, drugi će svojom mešovitom dobiti $\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 6 + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 1 = \frac{9}{4}$ što je veće od 2 koliko bi dobio da je igrao *desno*.
- Ako prvi igrač bira čistu strategiju *sredina*, drugi će svojom mešovitom dobiti $\left(\frac{1}{4}\right) \cdot (-4) + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 4 = 2$ što je veće od 1 koliko bi dobio da je igrao *desno.*
- Ako prvi igrač bira čistu strategiju *dole*, drugi će svojom mešovitom dobiti $\left(\frac{1}{4}\right) \cdot (7) + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 2 = \frac{13}{4}$ što je veće od 2 koliko bi dobio da je igrao *desno.*

Dakle, drugi neće igrati svoju čistu strategiju *desno* zato što bi na taj način imao manju isplatu od one koja se očekuje kada igra mešovitu strategiju sačinjenu od strategija *levo* i *centar*. Obrisaćemo kolonu *desno*.

	Levo	Centar
Gore	(-3, 6)	(9, 1)
Sredina	(3,-4)	(2, 4)
Dole	(4, 7)	(3, 2)

Ako pažljivije pogledamo strategije prvog igrača, videćemo da na redukovanoj matrici strategija *dole* strogo dominira strategiju *sredina*. Obrisaćemo vrstu koja odgovara strategiji *sredina*.

	Levo	Centar
Gore	(-3, 6)	(9, 1)
Dole	(4, 7)	(3, 2)

Sada možemo da primetimo da strategija *levo* dominira strategiju *centar* drugog igrača. Obrisaćemo kolonu *centar*.

	Levo
Gore	(-3, 6)
Dole	(4, 7)

Najzad, prvi igrač će radije igrati strategiju *dole* umesto strategiju *gore* jer će na taj način imati veću dobit. Strategija <dole, levo> je Nešov ekvilibrijum ove igre što možemo i da proverimo.
Drugi igrač svakako neće menjati svoju strategiju zato što je isplata 7 veća od svih isplata koje može da dobije. Prvi igrač neće promeniti svoju strategiju zato što bi u tom slučaju završio sa isplatom 3 ili isplatom -3 koje su manje od 4.

Problem 30
Koliko Nešovih ekvilibrijuma ima sledeća igra?

	Levo	Desno
Gore	(1, 1)	(0, 0)
Dole	(0, 0)	(0, 0)

Problem 31
Na stolu se nalazi 8000 din. Istovremeno dvojica igrača biraju da li će uzeti novac sa stola ili ga ostaviti. Ako se obojica odluče da podele, kompletan iznos se deli na dva jednaka dela. Ako jedan odluči da uzme a drugi da ostavi, onaj koji se odlučio da uzme nosi sve. Ako se obojica odluče da nose, ostaju bez para. Ako je cilj svakog igrača maksimizacija iznosa koji će odneti kući, koliko Nešovih ekvilibrijuma ima sledeća igra?

	Uzmi	Ostavi
Uzmi	(4, 4)	(0, 8)
Ostavi	(8, 0)	(0, 0)

Rešenje:
Igra ima tri čista Nešova ekvilibrijuma: <uzmi, ostavi>, <ostavi, uzmi> i <uzmi, uzmi>. Budući da je drugom igraču sve jedno da li će uzeti ili ostaviti novac kada prvi bira strategiju *uzmi*, drugi može na beskonačan broj načina da kombinuje svoje dve strategije i da ponovo završi sa iznosom 0. Posebno ako pogledamo koji su ciljevi drugog igrača. Ako je drugi igrač osvetoljubiv, uzeće novac, čime prvog takođe dovodi na isplatu 0. Ako je darežljiv, biraće strategiju *ostavi*. Pored ova dva čista izbora, može da bira bilo koju kombinaciju tih strategija. Do sličnog zaključka možemo doći ako drugi igrač bira da uzme novac kao čistu strategiju. Dakle, igra ima beskonačno mnogo ekvilibrijuma.

Problem 32
Posmatramo igru sa N igrača u kojoj svako od njih može da bira ceo broj iz skupa celih brojeva $\{1,2,\ldots,100\}$. Nagradu dobija igrač čiji je broj najbliži 2/3 proseka svih izabranih brojeva (zaokruženih na ceo broj). Ostali igrači ostaju bez nagrade.

Rešenje:
Na času proveriti šta će student izabrati pre nego što im se predstavi rešenje!
Ponoviti igru još jednom. Da li se rezultat promenio?

Rešenje problema je Nešov ekvilibrijum. Neka svaki igrač pretpostavlja da je prosek (uključujući i njegov potez) broj X. Tada je optimalna strategija svakog igrača da izabere broj koji je najbliži broju $\frac{2}{3}X$. Dakle, X mora biti manje od 100, tako da optimalna strategija svakog igrača može da bude 67. Međutim, ako X nije veće od 67, tada optimalna strategija svakog igrača neće biti veća od $\frac{2}{3}67$. Ako X nije veći broj od $\frac{2}{3}67$, tada optimalna strategija bilo kog igrača treba da bude $\left(\frac{2}{3}\right)^2 67$. Ponavljanjem postupka dolazimo do zaključka da je jedinstven Nešov ekvilibrijum ako svaki igrač izabere broj 1.

Problem 33
B.A.Baldwin i G.B.Meese su 1971 godine posmatrali ponašanje dve svinje različitih veličina, istovremeno smeštenih u istoj prostoriji, kada se na jednom kraju te prostorije nalazi dugme koje je potrebno da se pritisne kako bi se na drugom kraju prostorije isporučilo 10 jedinica hrane. U zavisnosti od toga gde se koja svinja nalazila u momentu pritiskanja dugmeta, količina hrane koju će svinje pojesti je različita. U slučaju da je manja svinja pritisla dugme, do momenta dok ona dođe do hrane, velika svinja će pojesti 9 hrane koja je isporučena, ostavljajući joj svega 1 ukupne hrane. U slučaju da manja svinja prva dođe do hrane, poješće 4 hrane a većoj ostaviti 6 hrane. Ako obe svinje dođu do hrane u istom momentu, manja će pojesti 3 a veća 7. Ako svako pritiskanje dugmeta za hranu troši energiju te svinje u iznosu od 2 jedinice hrane, konstruisati matricu isplate i odrediti rešenje igre.

Rešenje:
Matrica isplate je sledeća (strategije male svinje su predstavljene vrstama dok su strategije velike svinje predstavljene kao kolone):

Mala\Velika	Pritiska dugme	Čeka hranu
Pritiska dugme	(1,5)	(-1,9)
Čeka hranu	(4,4)	(0,0)

Igra ima strogo dominantnu strategiju u kojoj manja svinja čeka pored hrane dok velika pritiska dugme (isplata (4,4)).
Ovaj socijalni eksperiment je primenjen na pravim životinjama tako što se merilo koliko puta će svinja stisnuti dugme za hranu u odnosu na to da li je sama u kavezu ili ne. Rezultati su sledeći

Mala\Velika	Sama u kavezu	Nije sama
Velike svinje	75	105
Male svinje	70	5

NAPOMENA
1. Skoro sve igre imaju neparni broj Nešovih ekvilibrijuma
2. Slaba dominantnost najčešće dovodi do kršenja pravila 1.
3. Ako se pronađe parni broj ekvilibrijuma, uvek proveriti da još neki nije izostavljen.
4. Čiste strategije mogu biti dominirane od strane mešovitih strategija ako nisu dominirane od strane drugih čistih strategija.

Zadaci za vežbu:

1. Rešiti igru sa nultom sumom ako je isplata za prvog igrača data matricom M
   a) $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   b) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
   d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
2. Odrediti sve dominantne strategije i sve Nešove ekvilibrijume:
   a)

	A	B	C	D
Gore	(2, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(0, 0)
Centar	(1, 0)	(4, 1)	(2, 4)	(1, 5)
Dole	(0, 4)	(3, 1)	(3, 0)	(3, 3)

   b)

	Levo	Centar	Desno
Gore	(3, 0)	(2, 1)	(0, 0)
Sredina	(1, 1)	(1, 1)	(5, 0)
Dole	(0, 1)	(4, 2)	(0, 1)

   c)

	Levo	Desno
Gore	(2,2)	(-1,-1)
Dole	(-1,1)	(1,1)

   d)

	Levo	Desno
Levo	(0,1)	(1,0)
Desno	(1,0)	(0,1)

   e)

	Levo	Centar	Desno
Gore	(3, 0)	(0, 1)	(0, 0)
Sredina	(1, 1)	(1, 1)	(5, 0)
Dole	(0, 1)	(4, 2)	(0, 0)

Pareto optimalne strategije

Minmax strategije

Ekvilibrijum u korelaciji

2. Igre u ekstenzivnoj formi

Igre u ekstenzivnoj formi dozvoljavaju da se strategije biraju određenim redosledom. U zavisnosti od količina informacija sa kojima raspolažu, razlikuju se

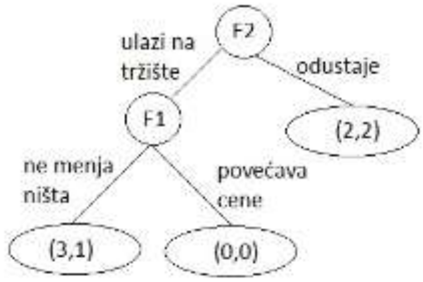
- **Igre sa potpunim informacijama** (igre kod kojih je svaki igrač upoznat sa svim strategijama, zna ko je šta igrao pre njega i zna vrednosti svih mogućih isplata)
- **Igre sa nepotpunim informacijama** (igre kod kojih neko od igrača raspolaže sa većom količinom informacija u odnosu na nekog drugog ili sve ostale igrače).

Igre u ekstenzivnoj formi se najčešće prikazuju preko stabla tako da listovi stabla predstavljaju odgovarajuće isplate.

2.1 Igre sa potpunim i nepotpunim informacijama

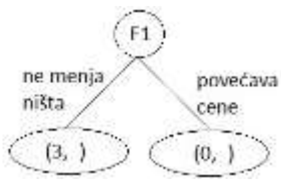
Problem 1

Pretpostavimo da jedna firma (u nastavku označena kao F1) drži monopol u gradu i da druga firma (u nastavku F2) želi da se uključi na isto tržište sa istom proizvodom. Ako se F2 uključi u proizvodnju, F1 treba da razmisli o tome da li da da se složi sa dolaskom nove firme ili ne (da li da utiče na cenu proizvoda). Ako se F1 odluči da promeni cenu, profit će se smanjiti i obe firme će završiti sa isplatama 0. Ako F1 odluči da dozvoli duopol, obe firme će profitirati: F1 će dobiti 1, dok će F2 dobiti 3. Ako se F2 na uključi na tržište, sačuvaće novac koji je planiran za ulazak na tržište i samim tim imati isplatu 2. Sa druge strane, bez konkurencija, F1 će imati isplatu 2. Budući da prvo F2 donosi odluku da li će se uključiti na tržište ili ne, a zatim F1 odlučuje da li da poveća cene ili ne, ovakva igra se najbolje može prikazati preko stabla (na slici niže isplata za F2 je prva koordinata a isplata za F1 druga uređenog para):

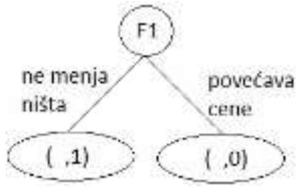


Rešenje:

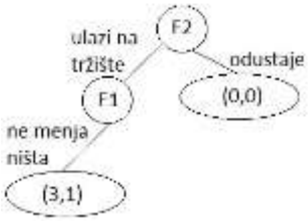
Opisana igra predstavlja <u>igru sa potpunim informacijama</u> budući da su igračima poznati mogući potezi protivnika, kao i uticaj svake kombinacija poteza na konačni ishod (čiste strategije za F2 su $\{ulazi\ na\ tržište, odustaje\}$, čiste strategije za F1 su $\{ne\ menja\ ništa, povećava\ cene\}$). Igra počinje tako što F2 donosi odluku o tome da li želi da se uključi na tržište ili ne. Ako odluči da ulazak na tržište nije dobar potez, igra se zavšava sa isplatama (2,2). Međutim, ako se F2 odluči da uđe na tržište, počinje nova igra (podigra) u kojoj F1 odlučuje da li da poveća cene ili ne. U zavisnosti od poteza F1, F2 će dobiti 3 ili 1:



Budući da F1 bira najbolji potez za sebe, pogledaćemo podigru koja odgovara njegovim isplatama:



Iz drveta se može videti da strategija u kojoj se ništa ne menja dominira strategiju u kojoj se cene povećavaju. Dakle, F1 neće povećavati cene pa se ta grana može obrisati. Igra dobija sledeći oblik:

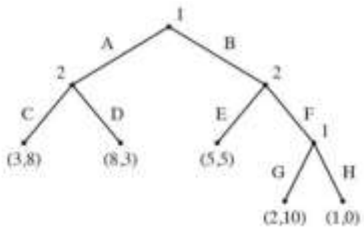


Budući da sada strategija <ulazi na tržište, ništa ne menja> dominira strategiju <odustaje, > ova strategija će predstavljati Nešov ekvilibrijum.

Ovakvi ekvilibrijumi se dodatno nazivaju **savršenim ekvilibrijumima podigre**.

Problem 2

Odrediti čiste strategije igrača a zatim rešiti igru u ekstenzivnoj formi. Zapisati igru u normalnoj formi.



Rešenje:

Ovo je igra sa dva igrača, prvi igrač (označen kao 1) ima strategije $\{(A,G),(A,H),(B,G),(B,H)\}$. Primetite da strategija (A,G) zapravo podrazumeva da će drugi igrač birati između C i D i time završiti igru, odnosno da posle strategije A prvi igrač više neće igrati. Bez obzira na ovaj podatak, njegova A strategija podrazumeva strategije (A,G) i (A,H). Drugi igrač bira između strategija $\{(C,E),(C,F),(D,E),(D,F)\}$. Slično kao i kod prvog igrača, drugi bira između opcija levo ili desno, ako je prvi izabrao A, onda će izbor drugog biti C ili D.

Ova igra se može zapisati u normalnoj formi na sledeći način. Pošto oba igrača imaju po 4 različite strategije, napravićemo matricu koja će pokriti sve situacije:

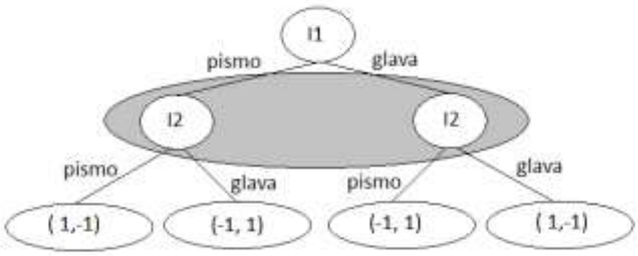
	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)
(A,G)	(3,8)	(3,8)	(8,3)	(8,3)
(A,H)	(3,8)	(3,8)	(8,3)	(8,3)
(B,G)	(5,5)	(2,10)	(5,5)	(2,10)
(B,H)	(5,5)	(1,0)	(5,5)	(1,0)

Igra ima 3 čista Nešova ekvilibrijuma (dokazati):

- $(A,G),(C,F)$
- $(A,H),(C,F)$
- $(B,H),(C,E)$

Problem 3

Problem 21 je podrazumevao je situaciju u kojoj dva igrača istovremeno spuštaju novčić. Pretpostavimo sada da novčić prvo spušta prvi igrač (igrač I1) a potom drugi igrač (I2), ne znajući kako je to uradio I1. Igra se može prikazati u ekstenzivnoj formi kao igra sa nepotpunim informacijama na sledeći način. Čvor I1 predstavlja koren stabla. Od njega idu dve grane s obzirom da I1 ima dve strategije. Obe grane se završavaju čvorovima označenim kao I2. Pošto I2 ne zna koji je potez napravio I1, oba čvora se nalaze u istom informacionom skupu (čvorove koji se nalaze u istom **informacionom skupu** uvek označimo na određen način, ovde se nalaze u okviru sive elipse). Dalje iz čvorova I2 idu dve grane (pismo i glava) koje dovode do listova stabla. Listovi sadže isplate igrača u zavisnosti od odigranih strategija:



Rešenje:
Čiste strateije: I1∈ $\{pismo, glava\}$, I2∈ $\{(pismo, pismo), (pismo, glava), (glava, pismo), (glava, glava)\}$.
Situacija u kojoj drugi igrač nema dovoljno informacija o potezu prvog igrača smešta ga u isti informacioni skup pa se ova igra može prikazati u normalnoj formi (gde oba igrača istovremeno donose odluke). I2 može da igra *pismo* ali, pošto ne zna na kojoj se tačno poziciji nalazi, takav potez mu može doneti isplatu 1 ili isplatu -1. Slično, ako I2 igra *glava,* ponovo će isplata biti -1 ili 1. Dakle, ne postoji dominantna strategija za I2. I1 je u sličnoj poziciji pa ne postoji dominantna strategija ni za njega. Potrebno je da se odredi Nešov ekvilibrijum. Za ekvilbirijum ćemo zapisati ovu igru u normalnoj formi:

I1/I2	Pismo	Glava
Pismo	(1,-1)	(-1,1)
Glava	(-1,1)	(1,-1)

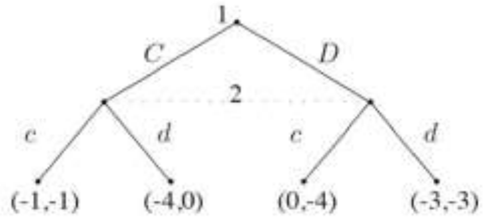
Označićemo verovatnoću sa kojom I1 bira svoje strategije sa p i $1-p$, a verovatnoću sa kojom I2 bira svoje strategije sa q i $1-q$. Važi sledeće:

$$u_2\big((p, 1-p), pismo\big) = -p + (1-p)$$
$$u_2\big((p, 1-p), glava\big) = p - (1-p)$$
$$-p + (1-p) = p - (1-p) \quad => \quad p = \frac{1}{2}$$

Na sličan način dobija se da je $q = \frac{1}{2}$. Dakle, Nešov ekvilibrijum je $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

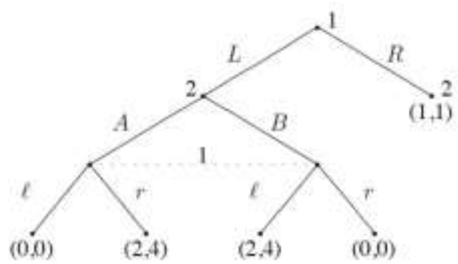
2.2 Indukcija unazad

Problem 4
Rešiti sledeću igru ako su informacioni skupovi igrača dati na sledećem stablu:



Rešenje:
Prvi igrač bira između strategija $\{C, D\}$, dok drugi bira između $\{c, d\}$. Drugi igrač, u momentu izbora svog poteza, ne zna da li je prvi igrač pre njega igrao C ili D (strategije iz istog informacionog skupa su povezane isprekidanom linijom). Kažemo da su strategije c i d u istom **informacionom skupu** za drugog igrača. Igru ćemo rešavati postupkom **indukcije unazad** tako što ćemo prvo pogledati isplate i u zavisnosti od njih izabrati strategiju drugog igrača a potom strategiju prvog igrača. Strategija c drugom igraču donosi -1 i -4 u zavisnosti od toga u kom se informacionom skupu nalazi, dok strategija d donosi 0 i -3. Kako je $0 > -1$ a $-3 > -4$ drugi igrać će igrati d. Imajući strategiju drugog igrača u vidu, prvi može dobiti -4 ili -3. Prvi će igrati D. Čist Nešov ekvilibrijum za ovu igru je $< D, d >$.

Problem 5
Rešiti sledeću igru ako su informacioni skupovi igrača dati na sledećem stablu:



Rešenje:
Prvi igrač bira između strategija $\{(L, l), (L, r), (R, l), (R, r)\}$, dok drugi bira između $\{A, B\}$. Prvi igrač, u momentu kada vuče svoj drugi potez, ne zna da li je drugi igrač pre njega igrao strategiju A ili strategiju B. Ako koristimo princip

indukcije unazad videćemo da drugi igrač nema čistu strategiju. On može da koristi mešovitu strategiju i da sa verovatnoćom ½ kombinuje strategije l i r. Na ovaj način, potencijalna isplata za prvog igrača će biti

$$u_1\left(\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),A\right)=\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}2=1$$
$$u_1\left(\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),B\right)=\frac{1}{2}2+\frac{1}{2}0=1$$

dok će očekivana isplata za drugog igrača biti:

$$u_2\left(\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),A\right)=\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}4=2$$
$$u_2\left(\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),B\right)=\frac{1}{2}4+\frac{1}{2}0=2.$$

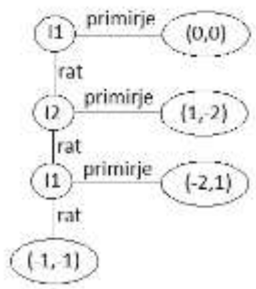
Kako je drugi igrač potpuno svestan poteza prvog igrača, njemu će biti sve jedno da li će igrati strategiju A ili strategiju B. On nema čistu strategiju. Prvi igrač sada može da bira da li će na početku igre igrati L ili R. Ako igra L, završiće sa isplatom 1, odnosno ako igra R završiće takođe sa isplatom 1. Ovako gledano ni prvi igrač ne može da izabere dominantnu strategiju. Podigra ima savršene Nešove ekvilibrijume $<\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),A>,<\left(L,\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}r\right),B>,<R,>$.

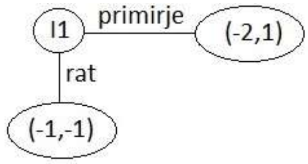
Problem 6

Dve države (I1 i I2) se duže vreme ne slažu i planiraju da zarate. I1 razmišlja o tome da li da ostane u primirju sa I2 ili da uradi nešto što će I2 naterati da započne rat. Ako I1 odluči da ostane pri primirju, igra se završava sa isplatama (0,0). Međutim, ako I1 odluči da neposredno izazove rat, naredni potez bira I2. I2 može da primiri situaciju koju je I1 izazvala i održi primirje ili da uzvrati i natera I1 da prva započne rat. Ukoliko I2 primiri situaciju igra se završava sa isplatom (1,-2), dok se u drugom slučaju igra nastavlja tako što je I1 ponovo na potezu i ima završnu reč. I1 može da se povuče uz isplatu (-2,1) ili da pristane na rat uz isplatu (-1,-1). Nacrtati odgovarajuće stablo i rešiti igru.

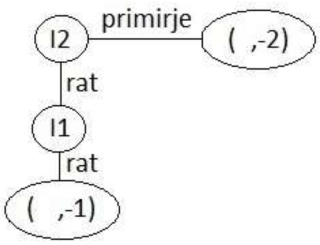
Rešenje:

Stablo koje odgovara igri prikazano je sa desne strane. Da bi se igra rešila koristićemo princip indukcije unazad, tj. krenućemo od konačnog ishoda igre i izbora strategije koja je prethodila tom ishodu i zavšiti sa početnim potezom:



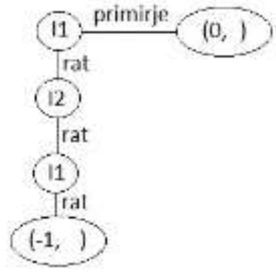


Dakle, I1 može da bira između toga da objavi rat ili da bude u primirju sa I2. Kako je isplata za I1 u slučaju objave rata -1, a isplata u slučaju primirja -2, *rat* je dominantna strategija za I1. Sada se stablo igre može zapisati bez dominirane strategije *primirje*. Budući da je potezima igrača I1 prethodio potez igrača I2, proverićemo da li on ima dominantnu strategiju (isplate za I1 biće obrisane jer ne utiču na izbor igrača I1):



I2 dobija -1 ako izabere *rat*, odnosno -2 ako izabere *primirje.* Budući da je *rat* dominantna strategija, I2 će izabrati *rat*.

Najzad smo došli do prvog poteza u ovoj igri, odnosno do poteza igrača I1 (isplatu za I2 ćemo obrisati pošto nema uticaja na I1) (slika dole desno):



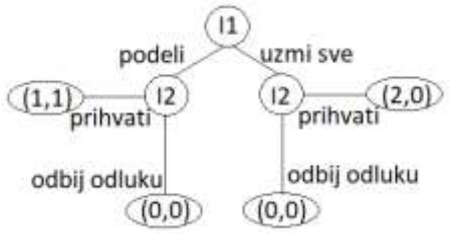
I1 bira izmedju mogućnosti da održi primirje, što mu donosi 0 i mogućnosti da izazove I2 na neki način, što mu donosi isplatu -1. Kako je *primirje* dominantna strategija, I1 će izabarati ovu strategiju.

Nešov ekvilibrijum čini strategija *primirje* za I1. Možemo da napišemo bilo koju strategiju kao strategija za I2, ali se ona neće odigrati.

Problem 7

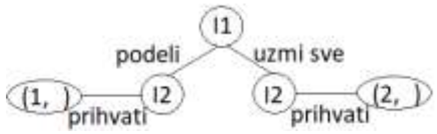
Pretpostavimo da I1 raspolaže određenom količinom zlata koju može (ali ne mora) da podeli sa I2. I1 može da podeli zlato sa I2 ili da ga ostavi samo za sebe. I2 može da se složi sa odlukom koju je doneo I1 ili da da svoj predlog. Ako se I2 ne složi sa I1, obojica završavaju bez zlata. Nacrtati drvo koje odgovara igri i odrediti dominantnu strategiju.

Rešenje:



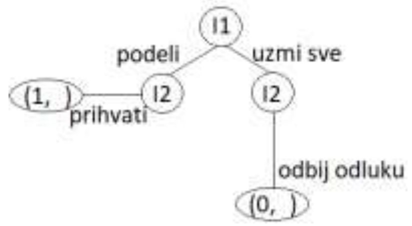
Ova igra je poznata kao igra ultimatuma upravo zbog ulitmatuma koji zadaje I1. Ako se I1 odluči da podeli zlato, I2 može da prihvati ili odbije. Ako I1 odluči da uzme sve za sebe, I2 može da se složi sa tom odlukom ili da odbije. Igru rešavamo indukcijom unazad. Nije bitno od kog kraja stabla ćemo krenuti, bitno je da se strategija za I1 rešava tek nakon što se srede sve moguće strategije I2. Posmatraćemo prvo levu stranu stable: I2 može da prihvati li odbije odluku koju je doneo I1. Ako je prihvati dobija 1, ako odbije dobije 0. Jasno je da će prihvatanje biti dominantna strategija, te se strategija *odbij odluku* može obrisati. Dalje posmatramo desnu polovinu stabla. I2 ponovo može da prihvati ili odbije odluku koju je doneo I1. U oba slučaja I2 ima isplatu 0. Budući da I2 nema čistu strategiju, može da igra *prihvati*, *odbij odluku* ili da formira mešovitu strategiju korišćenjem ove dve strategije. Razmotrićemo sve tri situacije iz ugla I1:

1. I2 može da prihvati dogovor odluku I1 koji želi da uzme sve.



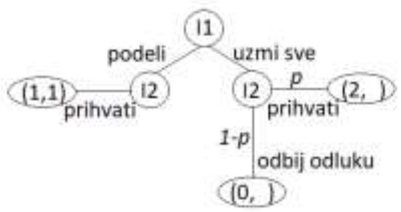
   Ako I1 odluči da uzme sve i I2 to prihvati, I1 završava igru sa isplatom 2 koja je veća od 1 i ovo bi bio savršen ekvilibrijum takve podigre.

2. I2 ne prihvata odluku I1 koji želi da uzme sve



   Ako I1 bira da uzme sve, a I2 se ne složi sa tom odlukom, I1 će imati isplatu 0, što je manje od isplate koju bi dobio da je u startu podelio svo zlato. Na ovaj način je određen savršeni ekvilibrijum ovako definisane podigre.

3. I2 formira mešovitu strategiju i sa verovatnoćom p prihvata odluku koju je doneo I1, odnosno sa verovatnoćom $1-p$ je ne prihvata.



$$u_1\big(uzimi\ sve, (p, 1-p)\big) = 2p + 0 \cdot (1-p) = 2p$$

   Da bi ova strategija predstavljala novi savršeni ekvilibrijum neophodno je da važi

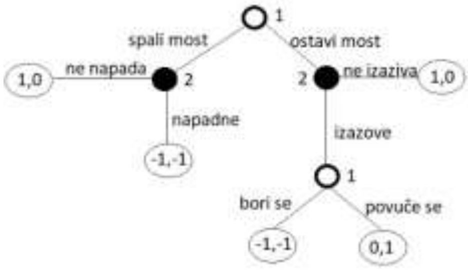
$$u_1\big(uzmi\ sve, (p, 1-p)\big) > u_1(podeli, prihvati),$$

   tj. $2p > 1$. Dakle, ako I2 sa verovatnoćom $p > \frac{1}{2}$ bira strategiju *prihvati*, onda će I1 birati da *uzme sve*. Međutim, ako I2 odbije odluku u više od 50% slučajeva, onda I1 treba da *podeli*. Najzad, ako je $p = 1/2$ tada I1 može da bira svoju strategiju sa jednakim verovatnoćama jer je

$$u_1\left(uzimi\ sve, \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right) = 1 = u_1(podeli, prihvati).$$

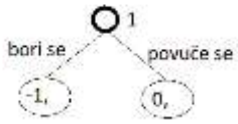
Problem 8

Između dve države koje su u ratu nalazi se manje ostrvo. Svaka država ima tačno jedan most preko kog može da pristupi tom ostrvu. Iako je teritorijalno od značaja, ni jednoj državi se ne isplati da ratuje za to ostrvo. Radije će tu teritoriju prepustiti drugoj državi, nego što će se boriti za njega. Prva država pređe preko mosta i okupira ostrvo. Potom vojnici te države odlučuju da li da spale most koji su prešli ili ne. Druga država treba da odluči da li želi da napadne ostrvo. Ako vojska prve države nema most preko kog može da se vrati u svoju državu, moraće da se bori. Ako most ostane, prva država može da odluči da povuče svoje vojnike ili da se bori protiv vojnika druge države. Odrediti strategije država ako je problem zapisan u ekstenzivnoj formi.

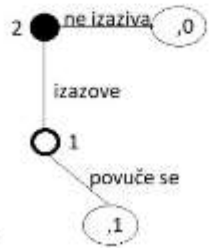


Rešenje:

Ovaj problem se najlakše rešava korišćenjem indukcije unazad. Neka je država1 ostavila most i neka je druga država odlučila da napadne. Prva država, za drugi svoj potez, bira da ratuje ili da povuče svoje vojnike nazad.

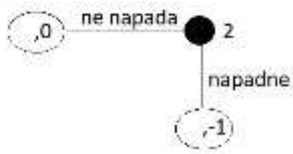


Pošto je 0 veće od -1, povućiće se. Ovoj odluci prethodi potez druge države. Druga država može da ratuje sa vojskom prve ili ne.

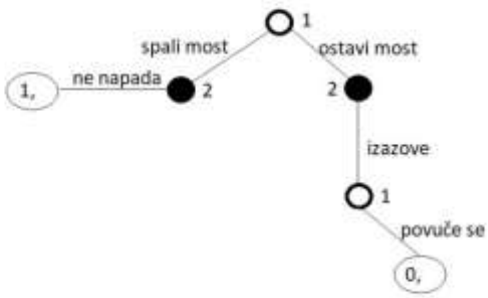


Ako je drugoj državi poznato da prva nije spalila most, može da je napadne ili da je ne dira. Povlačenje vojske prve države dovodi do toga da će drugi imati isplatu 1. Dok izazivanje vojske druge države drugoj državi donosi isplatu 0. Pošto je 1 veće od 0, druga država će izazivati prvu.

Ako je prva spalila most, i ako druga napadne, druga će imati isplatu -1, odnosno ako ne napadne, imaće isplatu 0. Pošto je 0 veće od -1, druga država neće napadati vojsku prve koja je spalila most.



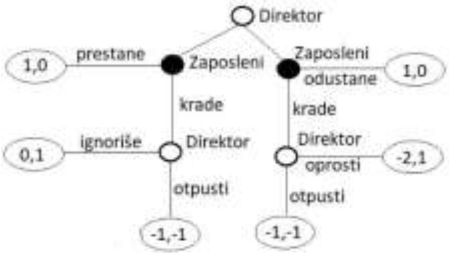
Nakon eliminacija dominiranih strategija, može se nacrtati novo drvo igre:



Prva država sada bira između opcija da spali most i toga da ga ostavi. Ako ga spali, imaće isplatu 1, ali ako ga ostavi, isplatu 0. Dakle, prva država će poslati vojsku da zauzme ostrvo i spaliti most između njih.

Problem 9

Direktor kompanije je primetio da jedan od njegovih zaposlenih potkrada tu kompaniju. Direktor ceni iskrenost svojih zaposlenih, dok ukraden materijal za njega nema vrednost. Zapravo, direktor bi radije zadržao tog svog zaposlenog nego što bi ga zamenio. Naravno, idealno bi bilo kada bi taj zaposleni prestao da poktrada kompaniju. Na sastanku zaposlenih direktor informiše zaposlene da će prva osoba uhvaćena u krađi biti otpuštena. Da li je direktor u pravu što je izdao takvo upozorenje? Rešiti igru ako je ona prikazana u ekstenzivnoj formi.



Rešenje:

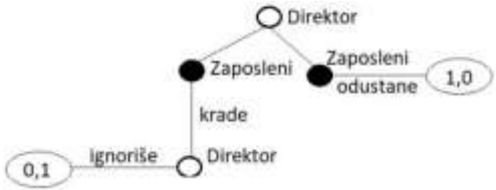
Analiziraćemo prvo situaciju u kojoj direktor ignoriše krađu svog zaposlenog. U slučaju da upozorenje nije izdato (levi kraj stabla) i da je zaposleni nešto ukrao, kako direktor treba da odreaguje?

Ignorisanje situacije mu donosi 0, dok bi otpuštanjem zaposlenog imao -1. Budući da mu ukradeni materijal ne predstavlja materijalni gubitak, direktor može da ignoriše ovu krađu.

U kojoj situaciji se nalazi zaposleni? Ako direktor nije izdao upozorenje, zaposleni će dobiti 1 ako ukrade materijal, odnosno 0 ako ništa ne ukrade. Budući da je 1>0, zaposleni će ukrasti a direktor će takav potez ignorisati.

Posmatrajmo sada desnu polovinu stabla. Ako zaposleni izvrši krađu uprokos obaveštenju direktora, direktor može da oprosti krađu ili da otpusti zaposlenog. Imajući u vidu da direktor poštuje iskrenost, oprost će nositi -2 a doslednost odluci da se lopov otpusti -1. Kako je $-1 > -2$, direktor će se u ovom slučaju odlučiti da otpusti zaposlenog.

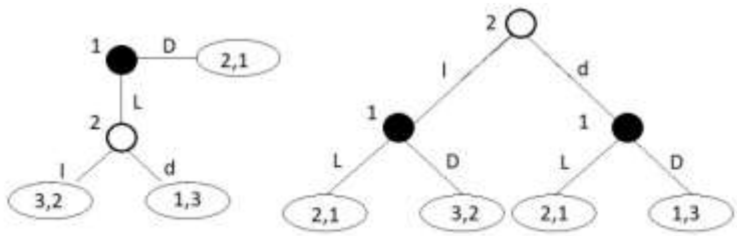
Sada možemo da posmatramo desnu polovinu stabla bez dominiranih strategija. Zaposleni može da prestane da krade, što mu donosi 0, i da krade uprkos direktorovom upozorenju, što mu donosi -1. Zaposleni će prestati da krade. Najzad možemo da vidimo kako će se igra odigrati u zavisnosti od toga da li će direktor izdati obaveštenje ili ne.



Ako direktor izda upozorenje, dobiće 1, odnosno ako ga ne izda 0. Direktor će izdati obaveštenje a zaposleni odustati od krađe u tom slučaju.

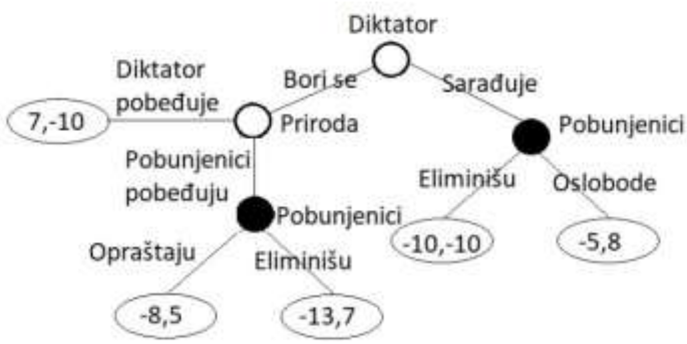
Problem 10

Rešiti sledeće igre, koja je razlika u ishodima:



Problem 11

Diktator može da se preda i prekine građanski rat ili da se kocka i nada da će rat završiti u njegovu korist. Ukoliko se sve završi u njegovu korist, pobediće opoziciju. Ako izgubi, pobunjenici će osvojiti zemlju. Ukoliko se diktator ne preda a izgubi, nova vlada odlučuje o sudbini diktatora. Rešiti igru ako je prikazana preko ekstenzivne forme (igra uključuje potez prirode i slučajnosti). Priroda sa verovatnoćom 0.2 deluje u korist diktatora a sa verovatnoćom 0.8 u korist pobunjenika.

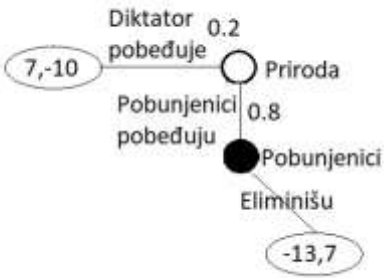


Napomena: Umesto isplate (-10,-10) na slici iznad treba da stoji (-10,10)!

Rešenje:

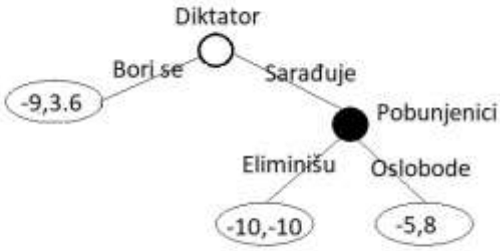
Problem rešavamo indukcijom unazad.

Ako pobunjenici dobiju rat, biraju između opcija da oproste diktatoru ili da ga eliminišu. Budući da je 7>5, pobunjenici će se odlučiti za eliminaciju. Sada proveravamo situaciju koja će se dogoditi pod dejstvom prirode. Priroda deluje usled verovatnoće tako što se situacija u kojoj diktator pobeđuje dešava sa verovatnoćom 0.2, odnosno situacija u kojoj pobunjenici pobeđuju sa verovatnoćom 0.8. Da bi se eliminisala verovatnoća sa kojom igra priroda, potrebno je da izračunamo očekivane isplate:



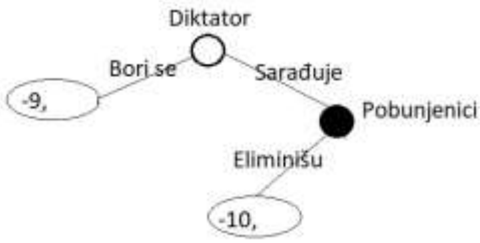
$$u_1(diktator\ dobija\ rat, pobunjenici\ ga\ eliminišu) = 0.2 \cdot 7 + 0.8 \cdot (-13) = -9$$
$$u_2(diktator\ dobija\ rat, pobunjenici\ ga\ eliminišu) = 0.2 \cdot (-10) + 0.8 \cdot (7) = 3.6$$

Zamenimo procenjene isplate u stablo. Dobićemo ekstenzivnu formu igre kao kod bilo koje igre koja nema verovatnoću:



Posmatramo sada opcije koje imaju pobunjenici u slučaju da se diktator preda.

Pobunjenici mogu da ga eliminišu (isplata 10) ili oslobode (isplata 8). Kako je $10 > 8$, jasno je da će diktator biti eliminisan. Najzad, diktator treba da se odluči između opcija u kojima može da se preda i da podržava građanski rat.



Pošto je $-9 > -10$, diktator će podržati rat.

Problem 12

Fabrika koja proizvodi plastične flaše po ceni 0.5 dolara po flaši (litarskoj) želi da proširi svoju delatnost i prodaje flaširanu vodu po ceni od $3 po litru. Međutim, kako ne poseduju sistem za filtriranje vode, potrebno je da se udruži sa fabrikom za filtriranje vode. Fabrika koja poseduje sistem za filtriranje vode ima sistem koji je jako star i u koji treba da se uloži 1000 dolara za popravke. Nakon svih popravki, filtriranje jednog litra vode koštaće 0.5 dolara po litru. Fabrika za proizvodnju flaša je ponudila fabrici za filtriranje vode da od nje otkupi 1000 litara filtrirane vode po ceni od 1 dolara po litru. Fabrika za filtriranje vode je takvu odluku odbila zato što bi bila u minusu nakon popravki pogona. Fabrika za prodaju flaša je ponudila da otkupi filtriranu vodu po ceni od 2 dolara po flaši. Ako je cilj obe fabrike maksimizacija profita, da li fabrika za preradu vode treba da prihvati ponudu? Nacrtati stablo igre.

2.3 Indukcija unazad bez stabla

Problem 13

Kapetan Crnobradi je na svom pohodu pronašao 10 zlatnika koja, ukoliko to želi, može da podeli članovima svoje posade. Pored kapetana, posadu čine još četiri pirata. Po tradiciji, kapetan predlaže podelu. Ako se najmanje polovina posade (uključujući kapetana) složi oko podele, podela se vrši po pravilu koje je kapetan izneo. Ukoliko se većina ne složi, kapetan hoda po dasci. Nakon toga sledeći po činu predlaže novu podelu sa istim pravilima koje je imao kapetan. Cenkanje se nastavlja sve dok svi članovi posede ne šetaju po dasci ili makar polovina prihvati podelu. Ako je cilj svakog člana posade da preživi, rešiti igru.

Rešenje:

Igru čini 5 igrača (kapetan Crnobradi, Pirat2, Pirat3, Pirat4 i Pirat5). Ako bi crtali drvo koje odgovara ovoj igri, dobili bismo baš razgranato drvo. Za početak, posmatraćemo podelu koju će izneti Pirat4 nakon što su kapetan Crnobradi, Pirat2 i Pirat3 šetali po dasci. Moguće su sledeće podele zlatnika između njega i Pirata5: (10, 0), (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4), (5, 5), (4, 6), (3, 7), (2, 8), (1, 9) i (0, 10), gde je prvi iznos ono što nosi Pirat4 a drugi iznos ono što uzima Pirat5. Međutim, ako Pirat3 nije šetao po dasci, onda on treba da podeli zlatnike na tri dela, što će imati mnogo više mogućnosti. Dakle, stablo je skoro nemoguće nacrtati. Umesto kompletnog stabla, možemo nacrtati tok igre (grana označena sa “prihvata” podrazumeva da je veći deo posade prihvatio podelu, dok grana “odbija” podrazumeva da je veći deo posade odbio podelu i da je donosilac podele morao da šeta po dascci):

Korišćenjem indukcije unazad, Pirat5 će biti jedini preostali pirat i on će sebi dati 10 zlatnika. Tok igre možemo pratiti tako što ćemo iznose podele zapisati u tabeli. Svaka vrsta tabele predstavlja savršen ekvilibrijum za tu podigru (poslednja vrsta pretpostavlja da Pirat5 vrši podelu kao jedini preostali pirat na brodu, pretposlednja vrsta predstavlja podigru u kojoj Pirat4 vrši podelu zlatnika između njega i Pirta5 i tako dalje), dok vrednosti u kolonama predstavljaju ponude koje su igrači iz vrsta ponudili igračima iz kolona, a ovi ih prihvatili.

Budući da igru rešavamo indukcijom unazad, prvo ćemo razmotriti podelu koju je iznep Pirat5. Pirat5, kao poslednji pirat, nudi sebi 10 zlatnika i sa tom podelom se slaže kao jedini član posade (čini 100% posade).

		Prihvaćene podele				
		Crnobradi	Pirat2	Pirat3	Pirat4	Pirat5
Ravnotežne strategije	Crnobradi					
	Pirat2					
	Pirat3					
	Pirat4					
	Pirat5	X	X	X	X	10

Kako bi zlatnike podelio Pirat4? Budući da su na palubi ostali samo Pirat4 i Pirat5, sudbina Pirata4 može da zavisi od odluke Pirata5. Međutim, kako je neophodno da se polovina složi, dovoljno je da zlatnike podeli onako kako će njemu odgovarati (jer on čini polovinu). Dakle, Pirat4 će uzeti sve zlatnike. Na ovaj način Pirat4 ne može bolje proći (preživeo je, ima svih 10 zlatnika i status kapetana). Iako se Pirat5 neće složiti sa ovakvom podelom, njegov glas neće imati uticaja jer se polovina posade slaže sa podelom koju je trenutni kapetan izneo.

		Prihvaćene podele				
		Crnobradi	Pirat2	Pirat3	Pirat4	Pirat5
Ravnotežne strategije	Crnobradi					
	Pirat2					
	Pirat3					
	Pirat4	X	X	X	10	0
	Pirat5	X	X	X	X	10

Koji je ishod podigre u kojoj je Pirat3 kapetan? Da bi podela koju napravi Pirat3 bila prihvaćena neophodno je da se sa njom složi još najmanje jedan član posade (na taj način 75% članova posade će se složiti sa podelom). Dakle, da bi preživeo, Pirat3 treba da potukupi Pirata4 ili Pirata5. Šta sve Pirat3 treba da ponudi Piratu4 kako bi ovaj glasao za njega? Za početak znamo da u slučaju da predlog Pirata3 ne prođe, Pirat4 će postati kapetan, preživeti svoju podelu i uzeti sve zlatnike. Dakle, ako Pirat3 ponudi sve zlatnike Piratu4, ovaj će odbiti ponudu jer neće imati status kapetana. Dakle, jedini način da Pirat3 preživi jeste da se potkupi Pirata5. Iako se naizgled očekuje da će Pirat3 većinu zlatnika ponuditi Piratu5, takva odluka nije optimalna za Pirata3. Naime, Pirat5 će ostati bez novčića ako Pirat4 bude vršio podelu novčića, tako da će pristati i na 1 novčić ako mu toliko ponudi Pirat3. Na ovaj način Pirat3 će sebi ostaviti 9, Piratu4 ponuditi 0 a Piratu5 1 novčića i sa takvom podelom preživeti. Da li je Pirat3 mogo da napravi drugačiju podelu i da, umesto 1 novčić, Piratu5 ponudi više novčića? Naravno da je mogo, ali onda on neće biti zadovoljan sa takvom podelom jer je i sam svestan da će Pirat5 pristati i na samo 1 novčić.

		Prihvaćene podele				
		Crnobradi	Pirat2	Pirat3	Pirat4	Pirat5
Ravnotežne strategije	Crnobradi					
	Pirat2					
	Pirat3	X	X	9	0	1
	Pirat4	X	X	X	10	0
	Pirat5	X	X	X	X	10

U slučaju da su samo Crnobradi i Pirat1 hodali po dasci, a da je Pirat2 posao kapetan, koja je optimalna strategija kapetana? Budući da posadu čine 4 člana, dovoljno je da Pirat2 napravi takvu podelu zlatnika da se sa njom, pored njega samog, složi još najmanje jedan član posade. Imajući u vidu da Pirat3 može da završi sa 9 zlatnika ako Pirat2 hoda po dasci, pristaće da glasa za tekuću podelu jedino ako mu Pirat2 ponudi 10 zlatnika (neće pristati sa 9 zato što može da ima 9 zlatnika i da bude kapetan). Pirat5 će dobiti 1 zlatnik ako Pirat2 hoda po dasci, što znači da će glasati za njega ako mu ovaj ponudi 2 zlatnika. Sa druge strane, Pirat4 će ostati bez zlatnika ako Pirat2 hoda po dasci. Dakle, Pirat2 će najbolje proći ako potkupi glas Pirata4 a za sebe zadrži 9 zlatnika.

		Prihvaćene podele				
		Crnobradi	Pirat2	Pirat3	Pirat4	Pirat5
Ravnotežne strategije	Crnobradi					
	Pirat2	X	9	0	1	0
	Pirat3	X	X	9	0	1
	Pirat4	X	X	X	10	0
	Pirat5	X	X	X	X	10

Najzad nam ostaje odluka kapetana Crnobradog. Da bi izbegao hodanje po dasci neophodno je da pridobije glasove dvojice članova posade (3/5 posade). Ako pogledamo u tabelu videćemo da če Pirati 3 i 5 dobiti po 0 zlatnika ukoliko Crnobradi hoda po dasci. Da bi Crnobradi izbegao hodanje po dasci dovljno će biti da dobije njihove glasove, odnosno da im ponudi po jedan zlatnik. Crnobradi bolje ne može da prođe. Da bi potkupio Pirata2 morao bi da mu da sve zlatnike, da bi potkupio Pirata4, morao bi da mu da 2 zlatnika. Ako se odluči da podmiti Pirata4, moraće da podmiti još jednog (Pirata3 ili Pirata5) čime ostaje sa 7 zlatnika, odnosno ako se odluči da podmiti Pirata2, ostaje bez svih zlatnika ali i bez glave.

		Prihvaćene podele				
		Crnobradi	Pirat2	Pirat3	Pirat4	Pirat5
Ravnotežne strategije	Crnobradi	8	0	1	0	1
	Pirat2	X	9	0	1	0
	Pirat3	X	X	9	0	1
	Pirat4	X	X	X	10	0
	Pirat5	X	X	X	X	10

Poslednja tabela predstavlja savršeni ekvilibrijum svake podigre. Crnobradi ostaje na poziciji kapetana sa 8 zlatnika, dok Pirati 3 i 5 dobijaju po zlatnik a Pirati2 i 4 ostaju praznih ruku.

Problem 14 (Nim igra)

Na stolu se nalazi 21 novčić. Prvi igrač može da uzme jedan ili dva novčića sa gomile. Zatim drugi igrač uzima jedan ili dva novčića. Igrači naizmenično uzimaju novčiće. Igrač koji je uzeo poslednji novčić sa gomile je pobednik. Ko je pobedio u ovoj igri?

Rešenje:

Slično kao i kod prethodne igre, crtanje stabla može biti komplikovano. Svaki igrač, kada je na potezu, može da bira između dve strategije a sve to će voditi do velikog broja različitih konačnih ishoda. Umesto da posmatramo situaciju kada su svi novčići na broju, počećemo od situacije kada je na stolu jedan novčić. Igrač koji je prvi na potezu pobeđuje budući da će on taj novčić uzeti (ova situacija pokriva sve slučajeve u kojima je jedan novčić ostao na stolu). Drugi trivijalni slučaj predstavlja situacija u kojoj su dva novčića na stolu. U ovom slučaju, igrač koji je na potezu može da uzme jedan novčić ili da uzme dva. Ako uzme 1, onda će igrač koji igra posle njega pobediti, a on će izgubiti. Ako uzme 2 novčića, pobeda je njegova.

Šta se dešava ako se na stolu nalaze 3 novčića? Neka je igrač Y prvi na potezu a igrač X drugi. Y može da uzme sa stola 1 ili 2 novčića. Ako uzme 1, onda X bira između jednog i dva novčića. Ako X izabere 1 novčić, Y će uzeti preostali novčić sa stola i pobediti. U suprotnom će X uzeti 2 novčića i on pobediti u igri. Sa druge strane, ako Y iz prve uzme 2 novčića, X će završiti igru uzimanjem preostalog novčića sa stola. Dakle, ako se na stolu nalaze 3 novčića, kako god da igra prvi igrač, drugi može da pobedi.

Da li će se sreća okrenuti u korist Y igrača ako se na stolu nalazi 4 novčića? Da. Ako uzme 1 novčić sa stola, X će se naći u istoj situaciji kao on kada je imao na raspolaganju 3 novčića i izgubiti igru.

Šta se dešava kada se na stolu nalazi 5 novčića? Prvi igrač može uzeti 2 novčića i drugog ostaviti sa 3 novčića na stolu što će mu ponovo omogućiti pobedu.

Šest novčića: Ako Y uzme 1, a njegov protivnik 2, tada će Y izgubiti igru. Ako Y uzme 2 a protivnik 1, ponovo će Y izgubiti.

Sedam novčića: Igrač koji je na potezu može uzeti 1 novčić ostavljajući protivnika u poziciju koju će protivnik izgubiti. Ako igrač koji je na potezu uzme 2 novčića, i ako protivnik uzme 2, igrač koji je na potezu će izgubiti.

Osam novčića: Uzimajući 2 novčića, igrač koji je na potezu ostavlja protivnika sa 6 novčića garantujući sebi pobefu. Ako uzme 1 protivnik će takođe uzeti 1, ostavljajući njega u poziciji koju će izgubiti igru.

Devet novčića: Ista situacija kao kod 6. Ako prvi uzme 1, drugi 2, prvi će izgubiti jer će na stolu biti 6 novčića. Ako prvi uzme 2, drugi će uzeti 1 pa će prvi ponovo izgubiti.

Dakle, ako se na stolu nalazi broj novčića deljiv sa 3, drugi može garantovati sebi pobedu tako što će igrati suprotno onome što igra prvi. Sa druge strane, ako se broj novčića na stolu ne može podeliti sa 3, prvi igrač može svesti taj broj na broj deljiv sa 3 obezbeđujući sebi pobedu.

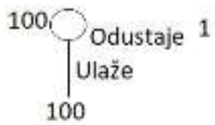
Najzad, ko će pobediti? Ako se na stolu nalazi 21 novčić pobedu može da garantuje drugi igrač koji će uvek uzimati onoliko novčića sa stola koliko mu treba da na stolu ostane broj novčića deljiv sa 3.

Problem 15

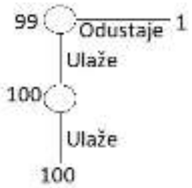
Posmatrajmo sledeću igru u kojoj učestvuje 100 individua. Svaki igrač može da uloži 1 dinar ili da se povuče. Ako svi ulože po 1 dinar, svi će zaraditi po 100 dinara. Međutim, ako se bilo koji od igrača odluči da se povuče, igra prestaje, igrač koji se povlači dobija 1 dinar a svi ostali 0. Rešiti igru.

Rešenje:

Pretpostavimo da 99 igrača uloži svoj novac. Konačna odluka zavisi od 100. igrača koji može da uloži ili da odustane.



Ako uloži 1 dinar, dobiće 100 dinara. Ako odustane, dobiće 1 din. Kako je 100>1, jasno je da će 100.igrač uložiti svoj novac. Šta se dešava sa 99.igračem? Koja je njegova optimalna strategija? On može da uloži, tada će i 100.igrač uložiti i svi će dobiti po 100 dinara, odnosno može da odustane i završi sa isplatom od 1 dinara.



Pošto je 100>1, jasno je da će i 99.igrač uložiti. Na sličan način zaključićemo da će i svi igrači koji prethode 99om uložiti.

Međutim, opisana strategija nije stabilna. Prvi igrač je u najlošijoj poziciji budući da on treba da odluči da li će da uloži svoj novac i da računa na 99 preostala igrača da će uraditi isto. Ako pretpostavi da će svi igrači posle njega uložiti novac sa verovatnoćom 99%, to znači da će svi uložiti novac sa vetovatnoćom $0.99^{99} \approx 37\%$. Međutim, kako bi isplata od 100 dinara bila značajno veća od uloženih 1din, ulaganje deluje kao pametan potez.

Šta se dešava ako prvi igrač veruje da će ostali uložiti novac sa verovatnoćom 95%? Verovatnoća da će se igra završiti sa isplatama od 100 dinara je sada $0.95^{99} \approx 0.623\%$. Imajući u vidu ovakvu verovatnoću povoljnog ishoda, prvi igrač se može odlučiti da ne uloži svoj novac, čime se igra završava.

Pretpostavimo da prvi igrač računa na to da će svi ostali uložiti novac sa verovatnoćom 99%. Pretpostavimo dalje da drugi igrač nema tako dobro mišljenje i očekuje da će ostali uložiti novac sa vetovatnoćom 95%. Iz ugla drugog igrača, šanse da svi uplate su $0.95^{98} \approx 0.656\%$. Jasno je da ni drugi igrač neće želeti da uloži svoj novac kada su šasne tako male. Prvi završava isplatom 0 u ovom slučaju a drugi sa isplatom 1.

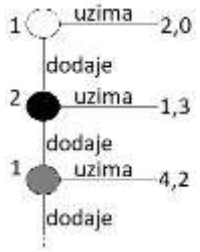
Dakle, prvi treba da proveri sa drugim igračem da li će on ulagati i na osnovu toga da deluje. Ako drugi kaže da neće ulagati, prvi će dobiti 1 povlačenjem iz igre odmah, dok bi ulaganjem 1 dinara izgubio kada drugi odluči da se povuče. Prvi zapravo treba da uloži novac samo ako je izuzetno optimističan da će i svi ostali uložiti i tako treba da razmišlja svaki naredni igrač.

Problem 16

Posmatramo igru sa dva igrača. Prvi igrač počinje igru tako što stavlja 2 dolara na sto ili podiže 2 dolara sa stola. Ukoliko podigne novac sa stola, igra se završava. Ukoliko doda novac na sto, drugi igrač može da uzme 2 dolara i da podeli 2 dolara sa stola, ili može da doda 2 dolara na sto. Ako drugi igrač podigne novac, igra se završava tako što drugi igrač dobija 3 dolara a prvi 1. Inače, prvi igrač bira da li će da uzme dva dolara sa stola i podeli 4 dolara koja se već nalaze na stolu, ili da doda nova 2 dolara na sto. Ako uzme novac, igra se završava tako što prvi igrač dobija 4 dolara a drugi 2. Inače, ako prvi doda svoj novac, drugi se susreće sa istom odlukom. Igra se ponavlja 100 puta. Rešiti igru.

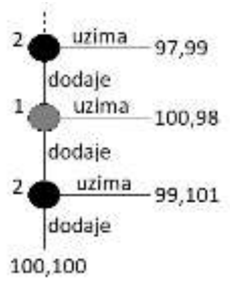
Rešenje:

Prva runda se može predstaviti sledećim stablom:



Ukoliko igrači u svakoj iteraciji dodaju novac, igra će se nastaviti sve dok se na stolu ne bude nalazilo 200 dolara. Pri poslednjem potezu drugi igrač bira da li će da uzme 101 dolar i ostavi 99 dolara drugom igraču ili će da uloži svoj novac što znači da će oba igrača završiti sa po 100 dolara.

Poslednjih par iteracija ima sledeći oblik:

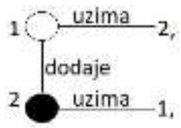


Pretpostavimo da igrači žele da maksimiziraju svoju dobit. Pretpostavimo takođe da je prvi igrač uvek dodao novac, a i da je drugi igrač dodavao novac sve do poslednjeg poteza. Razmotrićemo isplatu u zavisnosti od poslednjeg poteza drugog igrača. Drugi igrač može da doda novac, što znači da će njegova isplata biti 100 ili da ga uzme sa stola, što znači da će njegova isplata biti 101 dolar. Pošto je 101>100, drugi igrač uzima novac sa stola na poslednjem čvoru.

Indukcijom unazad proverićemo potez prvog igrača. Budući da je potez prvog igrača prethodio potezu drugog igrača, možemo da razmotrimo njegovu strategiju još jednom. Ako prvi igrač doda novac na sto, nakon poteza drugog igrača dobiće 99 dolara. Međutim, ako se prvi odluči da uzme novac sa stola, njegova isplata će biti 100. Budući da je 100>99, prvi će uzeti novac.

Pri pretposlednjem potezu drugi igrač ima mogućnost da doda svoj novac ili da ga ne doda i uzme polovinu sa stola. Na ovaj način drugi igrač bira da li će otići sa 98 ili sa 99 dolara.

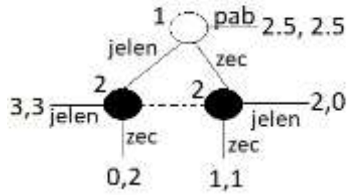
Pošto je 99>98, drugi će takođe uzeti novac sa stola. Ista logika može da se primeni na sam početak igre. Dakle, u prvom čvoru se dobija sledeće:



Prvi igrač može da završi sa isplatom 2 ili isplatom 1. Kako je 2>1, njegova strategija se sastoji u tome da uzme polovinu novca sa stola. Zapravo, strategija oba igrača se sastoji u tome da u svakom momentu kada je njihov potez na redu uzmu novac sa stola. Iako bi bolje završili kada bi sačekali kraj ulaganja, igrači će završiti sa, po njima, nepovoljnijim ishodom.

Problem 17

Posmatramo nešto izmenjen problem lovca. Prvi lovac može da se odluči da ide u lov na jelene, zečeve ili da ode u obližnji pab. Ako prvi lovac odluči da ode u pab, drugi lovac će ga videti i automatski mu se pridružiti. Ovakav ishod donosi obojici lovaca po 2.5. Međutim, ako se prvi lovac odluči da lovi, drugi će se takođe odlučiti da lovi nezavisno od toga šta lovi prvi lovac. Isplate su prikazane u stablu. Rešiti igru.

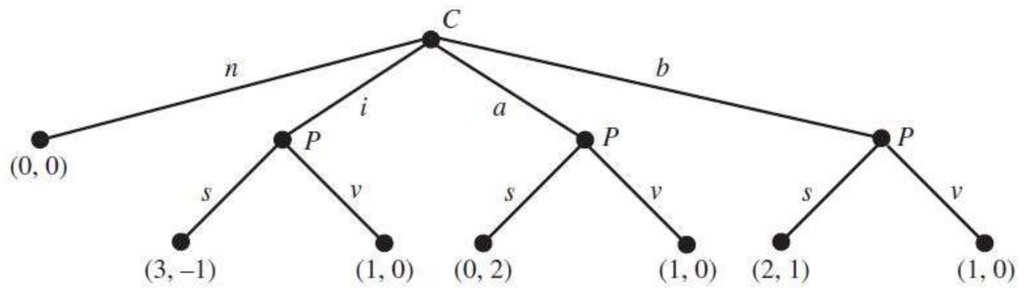


NAPOMENA

1. Svaka igra sa savršenom informacijom u ekstenzivnoj formi ima podigru koja ima čist Nešov ekvilibrijum.

Zadaci za vežbu:

1. Cenkanje. Prvi igrač predlaže drugom igraču vrednost $x, x \in \{0,1,2,\ldots,10\}$. Drugi prihvata ili odbija ponudu. Ukoliko drugi prihvati ponudu, prvi dobija $10 - x$ a drugi x. Ako drugi odbije ponudu, oba igrača dobijaju 0. Rešiti igru. (Prvi igrač treba da ponudi 1 a drugi treba da prihvati)
2. Rešiti igru



3 Rekurzivne, stohastičke, igre sa ponavljanjima i neprekidne igre

Pretpostavimo da se deo igre ili cela igra ponavlja više puta. Na primer, izbori se odvijaju na svake 4 godine. Na konačni ishod izbora mogu uticati sledeći elementi:

- Potezi političara,
- Politički savezi,
- Uticaji prijatelja,
- Uticaji kolega na poslu, …

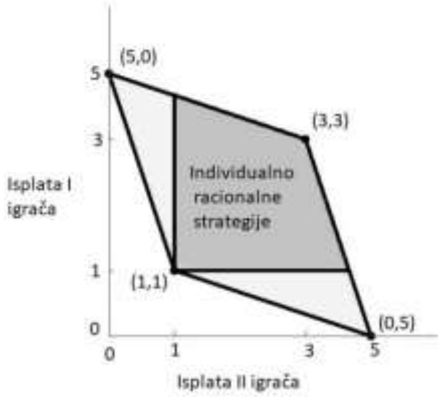
Dakle, igre koje se ponavljaju proučavaju logiku kojom se vode igrači u međusobnim interakcijama tokom dužeg vremenskog perioda. Osnovna ideja ovih igara sastoji se u tome da igrači, prilikom donošenja odluka, vode računa o tome kako će trenutna strategija uticati na poteze ostalih igrača u budućnosti i da na osnovu takvih predviđanja razmisle o tome da li će igrati kooperativno, osvetnički ili napadački.

3.1 Igre koje se ponavljaju

Najbolji primer ovih igara je Dilema zatvorenika. Iako je obostrana korist igrača nepriznavanje krivice, igračima je isplata predstavljena tako da će uvek želeti da biraju opciju “priznaje”:

Prvi\Drugi	Ne priznaje	Priznaje
Ne priznaje	(3,3)	(0,5)
Priznaje	(5,0)	(1,1)

Individualno racionalne isplate igrača u zavisnosti od poteza svih učesnika igre mogu se ilustrovati sledećom slikom:



Kada su igre koje se ponavljaju u pitanju, potrebno je da odgovorimo na nekoliko ključnih pitanja:

1. Koju isplatu imaju igrači ako se takva igra ponavlja beskonačno puta?
2. Da li možemo takvu igru da izrazimo kroz ekstenzivnu formu?
3. Koja je isplata igrača u zbiru?
4. Da li postoji mogućnost da se prilikom ponavljanja ne ponavlja uvek ista igra?

Pretpostavimo da se Dilema zatvorenika ponavlja 6 puta i da su igrači birali svoje strategije kao što je to navedeno u tabeli niže.

Igra	1	2	3	4	5	6	Prosek
Strategija I igrača	Priznaje	Priznaje	Ne priznaje	Ne priznaje	Ne priznaje	Priznaje	
Strategia II igrača	Priznaje	Ne priznaje	Priznaje	Priznaje	Ne priznaje	Priznaje	
Isplata I igrača	3	0	5	5	1	3	2,83
Isplata II igrača	3	5	0	0	1	3	2,00

Da li bi neko od igrača mogao da ostvari bolju isplatu drugačijim izborom strategija? Da! Na primer, prvi igrač je mogao da prođe sa boljom isplatom (videte tabelu niže):

Pozicija	1	2	3	4	5	6	Prosek
Strategija I igrača	Priznaje	Priznaje	Ne priznaje	Priznaje	Ne priznaje	Priznaje	
Strategija II igrača	Ne priznaje	Ne priznaje	Ne priznaje	Ne priznaje	Ne priznaje	Priznaje	
Isplata I igrača	5	5	1	5	1	3	3,33
Isplata II igrača	0	0	1	0	1	3	0,83

Može se primetiti da u svakoj fazi igre, oba igrača imaju uvida u istoriju svojih poteza i istoriju potezu drugog igrača, što znači da je pri k-tom ponavljanju igre odigrano $2^{2(k-1)} = 4^{k-1}$ različitih ishoda. Dakle, ako se igra ponavlja m puta, broj mogućih kombinacija ishoda je

$$2^{4^0} 2^{4^1} 2^{4^2} \dots 2^{4^m} = 2^{(4^m - 1)/3}$$

Odnosno, kada je broj ponavljanja $m = 2$, takva igra može da ima 32 različite strategije, dok je za $m = 6$ broj strategija 10^{410}. Dakle, ovakve igre je gotovo nemoguće prikazati u ekstenzivnoj formi. Umesto toga, najčešće se pretpostavi da igrači biraju svoje strategije sa određenom verovatnoćom i na takav način određuju moguće isplate.

Da li će igrači igrati svoju optimalnu strategiju uvek? Pretpostavimo da se prvi igrač dvoumi između situacija u kojima će uvek birati da „ne priznaje“ krivicu i one u kojoj će bar jednom „priznati“. Neka je verovatnoća da će se igra ponoviti označena kao δ (δ se dodatno u literaturi naziva *discount factor*)

Ako I igrač ni jednom ne prizna krivicu tokom beskonačno mnogo ponavljanja, isplata je sledećeg oblika:

$$u_1(ne\ priznaje\ svaki\ put) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = \frac{3}{1-\delta}$$

Ako I igrač prvi put prizna krivicu, a svaki naredni put odluči da je ne prizna, tada je isplata oblika

$$u_1(priznaje\ samo\ prvi\ put) = 5 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 5 + \frac{3\delta}{1-\delta}.$$

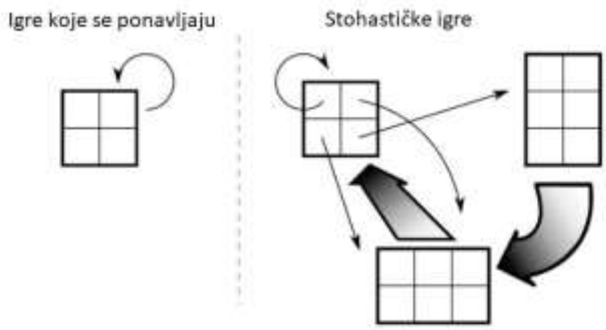
Ostalo je da proverimo koja strategija se prvom igraču više isplati. Ako je $u_1(ne\ priznaje\ svaki\ put) > u_1(priznaje\ samo\ prvi\ put)$, prvi igrač ne treba da priznaje krivicu niti jednom:

$$\frac{3}{1-\delta} > 5 + \frac{3\delta}{1-\delta} \quad \rightarrow \quad 3 > 5 - 2\delta \rightarrow \quad \delta > 1.$$

Dakle, prvi igrač, ako želi da maksimizuje svoj dobitak, treba uvek da se drži strategije „ne priznaj“ i da natera drugog igrača da i on bude dosledan takvom izboru.

3.2 Stohastičke igre

Stohastičke igre predstavljaju generalizaciju igara koje se ponavljaju (slika niže)



Stohastičke igre se predstavljaju korišćenjem uređene n-torke (Q, N, A, P, R) definisane tako da:
- Q predstavlja konačni skup pozicija,
- N konačni skup od n igrača,
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$, gde je A_i konačni skup dopustivih strategija igrača i,
- $P: Q \times A \times Q \rightarrow [0,1]$ predstavlja verovatnoću izbora odgovarajućih strategija, tj. $P(q, a, \hat{q})$ je verovatnoća prelaska iz pozicije q na poziciju $\hat{q}$ ako se igrala strategija a i
- $R = r_1, \dots, r_n$ gde je $r_i: Q \times A \rightarrow R$ je isplata koju će dobiti igrač i.

Ovako definisane stohastičke igre podrazumevaju da je skup strategija isti u svim igrama, inače je potrebno da se dodefinišu razlike.

Problem 1
Rešiti igru sa nultom sumom ako je matrica isplate prvog igrača matrica I,

$$I = \begin{pmatrix} A & 4 \\ 5 & B \end{pmatrix}, \text{gde su } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Rešenje:
Posmatramo prvo igre A i B.
Igra A:

Prvi igrač može da bira gore ili dole. Budući da ni jedna od te dve strategije ne dominira drugu, prvi igrač će ih birati sa određenom verovatnoćom. Neka je verovatnoća izbora strategije „gore“ p, a verovatnoća izbora strategije „dole“ $1-p$. Odredićemo vrednost parametra p:

$$u_2\big((p,1-p), levo\big) = 0p + (1-p)(-2) = -3p + (1-p)\cdot 1 = u_2\big((p,1-p), desno\big)$$

$$-2+2p = -4p+1 \;\rightarrow\; 6p = 3 \;\rightarrow\; p = \frac{1}{2}$$

Kako će drugi igrač igrati igru A. Neka je q verovatnoća izbora strategije „levo“, a $1-q$ strategije „desno“. Odredićemo vrednost parametra q:

$$u_1(gore,(q,1-q)) = 0q + 3(1-q) = 2q + (-1)(1-q) = u_1(dole,(q,1-q))$$

$$3-3q = 1+3q \;\rightarrow\; 6q = 2 \;\rightarrow\; q = \frac{1}{3}$$

Dakle, isplate igrača nakon odigrane igre A sa verovatnoćama $< \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) >$ iznosi: $(1,-1)$.
Na sličan način odredićemo isplate igre B:
Optimalna strategija igrača je $< (0,1),(0,1) >$, dok isplata iznosi $(3,-3)$.
Konačno, da bismo odredili vrednost igre I, odnosno optimalne strategije igrača, umesto da koristimo igre A i B, zamenićemo njihove isplate. Matrica I je sledećeg oblika (vrednosti 4 i 5 predstavljaju isplate prvom igraču):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ponavljajući postupak može se odrediti optimalna strategija oba igrača $< \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right), \left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right) >$ koja će prvom igraču omogućiti isplatu $\frac{17}{5}$, a drugom $-\frac{17}{5}$.

Do sličnog rezultata mogli smo da dođemo ako bismo matrice A i B zamenili matricama dimenzije 2×2 čije će vrednosti biti 4 i 5:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

NAPOMENA
Kod igara sa nultom sumom, umesto da računamo verovatnoće sa kojima igrači biraju određene strategije, možemo direktno da izračunamo vrednost isplate korišćenjem sledeće formule:

$$val\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

3.3 Rekurzivne igre

Problem 2
Rešiti sledeću igru za dva igrača sa nultom sumom koja se ponavlja ako je data matrica isplate prvog igrača

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{n-1} \end{pmatrix}, \;\; G(1) = 1.$$

Rešenje:
Igre ovog tipa rešavaju se iterativnim postupkom. Neka je sa $\pi(G)$ označena vrednosti igre G. Tada važi:

$$\pi(G_1) = 1$$

$$\pi(G_2) = \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\pi(G_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$\pi(G_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{n}$$

Na kraju igre, prvi igrač dobija $\frac{1}{n}$ ukoliko svoje strategije bira sa verovatnoćom $\left(\frac{1}{n},\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$.

Problem 3

Rešiti sledeću rekurzivnu igru sa dva igrača i nultom sumom ako je data matrica isplate prvog igrača:

$$G_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G_2+\frac{1}{2}(0) & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}G_1+\frac{1}{3}(-2) & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Rešenje:

Imajući u vidu da vrednost igre može da se izračuna bez računanja verovatnoće sa kojom igrači biraju svoje strategije, odredićemo vrednost igara G_1 i G_2. Neka je $\pi_1=val(G_1)$ i $\pi_2=val(G_2)$:

$$\pi_1=val\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{2}(0) & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=val\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\pi_2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=-\frac{2}{\frac{1}{2}\pi_2-3}=\frac{4}{6-\pi_2}$$

$$\pi_2=val\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}(-2) & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\pi_1-\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\frac{2(5-2\pi_1)}{5-2\pi_1}$$

Rešavanjem sistema dobija se da je

$$\pi_1=\frac{2(5-2\pi_1)}{16-7\pi_1}$$

odnosno

$$\pi_1=\frac{\left(10-\sqrt{30}\right)}{7}=0.646$$

Zamenom vrednosti u π_2, dobija se da je

$$\pi_2=-\frac{2\sqrt{30}-10}{5}=-0.19089.$$

Zamenom u početnu igru može se dobiti rešenje igre.

3.4 Funkcije kod kojih strategije imaju vrednosti iz skupa realnih brojeva

Problem 4 (Podela pite)

Posmatramo problem u kome je majka napravila pitu i ponudila svojoj dvojici sinova da izaberu količinu koju žele da pojedu. Ni jedan od braće ne sme da zna koliko parče pite je drugi tražio. Ukoliko dečaci u zbiru traže količinu pite koja je veća od jedne cele pite, ostaće bez pite. Rešiti igru.

Rešenje:

Prvo ćemo definisati funkciju isplate za oba igrača. Neka je x deo pite koji je tražio prvi dečak, a y deo pite koji je tražio drugi. Tada se iznos koji će obojica dobiti može definisati kao funkcija isplate za svakog od njih:

$$u_1(x,y)=\begin{cases}x & ako\ je\ x+y\leq 1\\ 0 & inače\end{cases}$$

$$u_2(x,y)=\begin{cases}y & ako\ je\ x+y\leq 1\\ 0 & inače\end{cases}$$

Kako je $y\in[0,1]$ najbolje za prvog dečaka je da izabere ostatke pite drugog, tj. $1-y$. Ukoliko je $x<1-y$ potpuno je jasno da će prvi poželeti da zatraži parče koje je veće od x ali ne veće od $1-y$. Idealno bi bilo kada bi to parče bilo jednako baš $1-y$. Slično, ako drugi zna da je prvi tražio x, on će tražiti ostatak, odnosno $1-x$. Igra ima beskonačno mnogo ekvilibrijuma:

$$\{(x^*,y^*)|x^*\in[0,1],y^*=1-x^*\}\text{ i }x^*=y^*=1.$$

Problem 5 (Duopol)
Posmatrajmo problem u kome cene nekih proizvoda opadaju linearno kako se broj tih proizvoda povećava na tržištu. Na primer, neka je cena proizovda (p) određena količinom ($q = s + t$) tog proizvoda (s je količina koju je proizvela jedna fabrika, a s količina koju je proizvela druga fabrika), tj. neka je $p = 20 - 2(s + t)$. Profite obe fabrike označićemo sa π_1 i π_2:

$$\pi_1(s,t) = ps - c_1(s) = \big(20 - 2(s+t)\big)s - 4s = (16 - 2t)s - 2s^2$$
$$\pi_2(s,t) = pt - c_2(t) = \big(20 - 2(s+t)\big)t - 4t = (16 - 2s)t - 2t^2$$

Uzeli smo da su cene troškova proizvodnje označene kao funkcije c_1 i c_2 za svaku fabriku posebno. Takođe, s i t su realni brojvi. Budući da prva fabrika bira da proizvede s proizvoda, njen cilj je da analizira broj proizvoda koji će proizvesti druga fabrika i da odreaguje na tu količinu najbolje moguće. Neka je, na primer, količina koju će proizvesti druga fabrika t, $t = b(s)$. Maksimalnu vrednost koju druga fabrika može da proizvede odredićemo u nulama prvog izvoda:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial t} = 16 - 2s - 4t = 0$$

Rešavanjem jednačine dobija se da je

$$t = b(s) = 4 - \frac{1}{2}s$$

Profit prve fabrike treba da se odredi kao najbolji odgovor na proizvodnju druge fabrike:

$$\pi_1\big(s, b(s)\big) = \pi_1\left(s, 4 - \frac{1}{2}s\right) = \left(16 - 2\left(4 - \frac{1}{2}s\right)\right)s - 2s^2 = 8s - s^2$$
$$\frac{d}{ds}\pi_1\big(s, b(s)\big) = 8 - 2s = 0 \ \rightarrow \ s = 4.$$

Dakle, maksimum koji prva fabrika treba da proizvodi je 4 proizvoda ($s^* = 4$). U tom slučaju, druga će se odlučiti za $t^* = b(s^*) = 4 - \frac{1}{4}4 = 2$ po ceni od $p^* = 20 - 2(s^* + t^*) = 8$ što joj donosi profit

$$\pi_1^* = \pi_1(s^*, t^*) = (16 - 2 * 2) * 4 - 2 * 4^2 = 16$$
$$\pi_2^* = \pi_2(s^*, t^*) = (16 - 2 * 4) * 2 - 2 * 2^2 = 8$$

Šta se može zaključiti iz dobijenih rezultata? Da ćete imati veći profit ako ste vi kompanija koja se prva odlučuje broj proizvoda koje će proizvoditi a ne druga.

Zadaci za vežbu:

4 Koalicione igre sa n igrača

4.1 Karakteristična funkcija igre

Problem 1

Posmatramo igru sa tri igrača (A,B i C) definisanu tako da svaki igrač može birati između dve strategije (I i II). Matrice isplate u zavisnosti od poteza prvog igrača date su u nastavku.

A bira strategiju I

B \ C	I	II
I	(0,3,1)	(2,1,1)
II	(4,2,3)	(1,0,0)

A bira strategiju II

B \ C	I	II
I	(1,0,0)	(1,1,1)
II	(0,0,1)	(0,1,1)

Rešenje:

Ukoliko A, B i C igraju kooperativno, maksimalna vrednost igre iznosi $4+2+3=9$. Koristimo oznaku $v(ABC)=9$. Međutim, ako bi B znao kako će igrati A i C, mogao bi da bira svoju strategiju tako da za sebe obezbedi maksimalnu dobit. Na primer, ako bi A igrao I, C igrao I, tada bi B mogao da igra I i na taj način sebi obezbedi 3 umesto 2.

Odredimo vrednost igre kada bi A igrao protiv koalicije koju formiraju B i C, zatim vrednost igre kada bi B igrao protiv koalicije koju formiraju A i C, i vrednost igre kada bi C igrao protiv koalicije A i B:

A protiv koalicije BC (matrica isplate se odnosi samo na igrača A)

A \ Koalicija BC	I, I	I, II	II, I	II,II
I	0	2	4	1
II	1	1	0	0

Pošto je maksimalna vrednost igre 9, u interesu koalicije BC je da A ostvari što je moguće manje, kako bi oni imali veću dobit. Dakle, BC koalicija neće igrati koalicione igre (I,II) niti (II,I).

Eliminisanjem dominantnih strategija može da se odredi vrednost igre iz ugla igrača A:

$$v(A)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}.$$

B protiv koalicije AC (matrica isplate za B)

B \ Koalicija AC	I, I	I, II	II, I	II,II
I	3	1	0	1
II	2	0	0	1

Slično kao u prethodnom slučaju, koalicija AC neće igrati (I, I) niti strategije (I, II) i (II, II). Eliminisanjem strategija može se zaključiti da je vrednosti igre iz ugla igrača B sledeća

$$v(B)=0$$

C protiv koalicije AB (matrica isplate za C)

C \ AB	I, I	I, II	II, I	II,II
I	1	3	0	1
II	1	0	1	1

Analogno prethodnim slučajevima oduzimanjem dominantnih strategija dobija se vrednost igre iz ugla igrača C:

$$v(C)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{3}{4}.$$

Dalje nas zanima udružena vrednost koju bi dobile koalicije kada bi igrale protiv trećeg igrača.

AC protiv B (u matrici isplate su predstavljene vrednosti koje će A i C dobiti u zbiru)

AC \ B	I	II
I, I	0+1	4+3
I, II	2+1	1+0
II, I	1+0	1+1
II, II	0+1	0+1

Možemo da zaključimo da kolacija AC neće birati poslednje dve strategije, te će vrednost igre zato biti

$$v(AC) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}.$$

Analogno se mogu odrediti vrednosti igre za koalicije AB i BC:

$$v(AB) = 3$$
$$v(BC) = 2$$

Opisanim postupkom definisana je funkcija v koja se naziva **karakterističnom funkcijom igre**:

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(A) = \frac{1}{2}$$
$$v(B) = 0$$
$$v(C) = \frac{3}{4}$$
$$v(\mathrm{AB}) = 3$$
$$v(\mathrm{AC}) = \frac{5}{2}$$
$$v(BC) = 2$$
$$v(ABC) = 9$$

4.2 Imputacije, eksces (višak) i nukleus

Za dati vektor $x = (x_A, x_B, x_C)$ kažemo da x_A predstavlja **imputaciju** za igrača A, x_B imputaciju za B i x_C imputaciju za C. Kažemo da je vektor x **racionalan** ukoliko važi:

$$v(koalicija\ svih\ igrača) = \sum_{i=1}^{brojIgrača} x_i$$

Vektor x je **individualno racionalan** ukoliko važi:

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Definicija

Ako sa N označimo koalicionu igru, sa x_i isplatu koju će dobiti i-ti igrač kada igra igru N, a sa $v(\{i\})$ isplatu i-tog igrača, **imputacija** predstavlja vektor isplate koji je racionalan za grupu i individualno racionalan za svakog igrača. Definišemo ga na sledeći način:

$$\left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \colon \sum_{i \in N} x_i = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N \right\}.$$

Skup imputacija je neprezan!

Primer:

Za igru koja je definisana sledećom karaketrističnom funkcijom odrediti vektor imputacije:

$$v(A) = \frac{1}{2}$$
$$v(B) = 0$$
$$v(C) = 1$$
$$v(N) = 9$$

Rešenje:

Imputacija zadate funkcije ima sledeći oblik:

$$\left\{ (x_A, x_B, x_C) : x_A + x_B + x_C = 9, x_A \geq \frac{1}{2}, x_B \geq 0, x_C \geq \right\}$$

Za ovakav skup imputacija, rešenje se nalazi unutar trougla čija su temena čvorovi $(8,0,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{17}{2}\right)$.
Imputacija je **nestabilna** u koaliciji S ukoliko za tu koaliciju važi $v(S) > \sum_{i \in S} v(x_i)$

Ukoliko nas interesuje koliko će svaka koalicija biti nezadovoljna isplatom koja joj je dodeljena po završetku igre, meru nepravde nazivamo višak („eksces"). **Eksces** predstavlja razliku do isplate koja bi bila fer. Cilja svake koalicije je da se isplata koriguje tako da nezadovoljstvo među isplatama bude minimalno:

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j$$

Jezgro igre definiše se kao skup imputacija za koje važi $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N$.
Imputacija se nalazi u jezgru ako i samo ako su svi njeni ekscesi jednaki nuli.

Problem 2

Posmatramo igru u kojoj su se trojica prijatelja (označimo ih sa A, B i C) dogovorila oko osnivanja zajedničke firme. Prilikom osnivanja te firme svako od trojice prijatelja učestvovao je sa onom sumom novca sa kojom je u tom momentu raspolagao. Sa tim u vezi, C je uložio 30,000 evra, B je uložio 20,000 evra, dok je A uložio svega 10,000 evra. Na nesreću prijatelja firma nije imala previše uspeha što je dovelo do bankrota. Trojica prijatelja je odlučilo da firmu proda i tom prilikom su uspeli da povrate ukupno 36,000 evra. Problem trojice prijatelja je sledeći. Kako da podele iznos od 36000 evra tako da podeljen iznos bude fer u odnosu na novac koji su uložili u početku.

Rešenje:
Kada bi se novac raspodelio proporcionalno uloženim sredstvima, prijatelji bi imali sledeće isplate:

A --> 6,000 evra
B --> 12,000 evra
C --> 18,000 evra

Pitanje je da li je podeljen iznos korektan, tj. da li bi drugačiji iznos bio više fer?
Formiraćemo karakterističnu funkciju igre.

$v(ABC) = 36.000 \qquad x_A + x_B + x_C = 36.000$

$v(A) = 0$

$v(B) = 0$

Imajući u vidu da je C prilikom osnivanja firme uložio najveći iznos novca, odnosno uložio iznos koji je jednak iznosu koji su uložili A i B, pretpostavićemo da je prilikom osnivanja firme potpisan ugovor koji C-u garantuje da će u slučaju bankrota dobiti najmanje 6000 evra bez obzira na to koliko će A i B dobiti. Dakle, neka je

$v(C) = 6.000$

Ako se C-u garantuje isplata od 6000 evra, pretpostavićemo da su koalicija koju čine A i B tražila identične uslove, odnosno garanciju da će u slučaju bankrota i oni dobiti najmanje 6000 evra, tj. neka je

$v(AB) = 6.000.$

Ostale isplate definisaćemo na sledeći način. Neka se koaliciji AC garantuje povraćaj novca u iznosu od 6000+ uloženih 10,000 evra:

$v(AC) = 16.000$

Takođe, neka se koaliciji BC garantuje da u slučaju bankora neće imati manje od 6000 + uloženih 20,000 evra:

$v(BC) = 26.000$

Formiraćemo tablicu isplata nakon bankrota tako što ćemo u prvoj koloni navesti moguće koalicije, u drugoj vrednosti karakteristične funkcije, u trećoj razliku do fer isplate, a u poslednje dve kolone vrednosti koje se dobijaju kada se u koloni 3 zamene konkretne vrednosti za konkretne iznose bankrota. Vrednosti će biti izražene u hiljadama evra.

S	$v(S)$	$e(x,S)$	(6,12,18)	(5,12,19)
A	0	$0 - x_1$	-6	-5
B	0	$0 - x_2$	-12	-12
C	6	$6 - x_3$	-12	-13
AB	6	$6 - x_1 - x_2$	-12	-11
AC	16	$16 - x_1 - x_3$	-8	8
BC	26	$26 - x_2 - x_3$	-4	5

Da li je ovako definisana funkcija cilja fer?

Primera radi, ako se A, B i C dogovore oko isplate i ako, na primer odluče da imputacija bude vektor (6,12,18), takvom imputacijom biće najviše oštećena koalicija BC s obzirom da će njihovo nezadovoljstvo biti najveće ($e(BC) = -4$). Dakle, koalicija BC će tražiti više od 26 hiljada kao garanciju usled bankrota.
Pošto ukupan iznos koji može da se vrati koalicionim partnerima iznosi 36 hiljada, sledi da je

$$x_2 + x_3 = 36 - x_1$$

što znači da će svako povećanje isplate koaliciji BC uticati na umanjenje isplate za A. Kako se ovakav problem rešava? Koalicija BC može da se dogovori sa A da isplata bude takva da nezadovoljstvo izazvano isplatom bude jednako, na primer, neka važi

$$e(A) = e(BC) = -5.$$

Pošto nezadovoljstvo iznosi -5, iz relacije $e(A) = -5$ direktno sledi da je $x_A = 5$.
Ova izmena uticaće na koaliciju AB budući da će i oni smatrati da su oštećeni. Slično kao što je rešen prethodni problem, možemo da pretpostavimo da će C smanjiti svoju garanciju u korist koalicije AB. Za početak znamo da će koalicija između B i C doneti 31 hiljadu:

$$x_B + x_C = 36 - 5 = 31$$

Problem sa koalicijom AB rešićemo tako što će se inosi za x_B i x_C smanjiti. Neka je, na primer imputacija sledećeg oblika (5,12,19).
Sada se može videte da je eksces koalicije AC najveći i da iznosi 8. Da bi se njihovo nezadovoljstvo smanjilo, mora da se poveća x_C a smanji x_B. Slično se može povećati isplata za AB. Pošto je nezadovoljstvo koalicije blizu 8 vrednosti za x_C i x_B se traže tako da važi $e(x, BC) = e(x, AC)$. Ovo se postiže za $x_B = 10.5$ i $x_C = 20.5$ što nas dovodi do nove imputacije (5,10.5, 20.5).
Kod poslednje imputacije izazvana su sledeća nezadovoljstva (-5, -10.5, -14.5, -9,5, -9,5,-5). Pitanje je da li se ova nezadovoljstva mogu popraviti. Da, problem se može rešiti korišćenjem Šeplijevog vektora (koji će se učiti u nastavku).

NAPOMENA
Za vektore $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ **leksikografski manje**, u oznaci $X <_L Y$, znači da je

$$x_1 < y_1 \text{ ili}$$
$$x_1 = y_1, x_2 < y_2 \text{ ili}$$
$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 < y_3 \text{ ili....}$$

Na primer, neka su vrednosti 4. kolone prethodne tablice označene kao $O(x)$, a vrednosti imputacije y ozněene sa $O(y)$. Kažemo da je $O(x) <_L O(y)$ ako važi $-6 < y_1$ ili je $-6 = y_1$ i $-12 < y_2$, ili ako je $-6 = y_1, -12 = y_2$ i $-12 < y_3$ i tako redom.

Definicija
Neka je sa $X = \{x \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = v(N)\}$ označen skup svih imputacija. Kažemo da je vektor $v \in X$ **nukleus** ako za svako $x \in X$ važi $O(v) \leq O(x)$ u leksikografskom poretku. Drugim rečima, nukleus minimizira najveće odstupanje od iznosa koji koalicija može da obezbedi ne uzimajući u obzir ponašanje ostalih igrača.

Problem 3
Odrediti nukleus igre sa 3 igrača ako je ona zadata u formi karakteristične funkcije

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = -1 & v(\{1,2\}) = 3 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 4 & v(\{1,2,3\}) = 5 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 2 & \end{array}$$

Rešenje:
Formiraćemo tabelu u kojoj ćemo odrediti vrednosti ekscesa za svaku moguću imputaciju. Posmatraćemo proizvoljno određene imputacije. Neka je, na primer $x = (1,1,3)$, primetićemo da je najveći eksces kod koalicije koju čine A i B. Ako želimo da smanjimo ovaj višak, potrebnoje da smanjimo iznos x_3. Pošto sledeći najveći eksces ima koalicija AC

sledi da ćemo x_2 ostaviti fikirano, što znači da ćemo povećati samo vrednost x_1. Neka je zato $x_3 = 2$, sledi da ćemo dobiti da je $x_1 = 1$. Dakle, nova imputacija je $x = (2,1,2)$. Kod nove imputacije dva najveća ekscesa imaju koalicije AB i AC. Da bi smanjili ove dve vrednosti potrebno je da smanjimo vrednosti za x_2 i x_3 a povećamo vrednost x_1. Uvećanje vrednosti x_1 direktno utiče na veći eksces za BC. Dakle, najbolje bi bilo kada bi ekscesi za AB, AC i BC bili međusobno jednaki. Dakle, da bi odredili iznos za koji ćemo povećati određene elemente imputacije potrebno je da rešimo sledeće jednačine:

$$x_3 - 2 = x_2 - 1 = x_1 - 3$$
$$\text{i } x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

Rešavanjem sistema dobija se da je $x_3 = x_2 + 1, x_1 = x_2 + 2$, odnosno nova imputacija je $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

S	$v(S)$	$e(x,S)$	(1,1,3)	(2,1,2)	(8/3, 2/3, 5/3)
A	-1	$-1 - x_1$	-2	-3	-11/3
B	0	$-x_2$	-1	-1	-2/3
C	1	$1 - x_3$	-2	-1	-2/3
AB	3	$3 - x_1 - x_2 = x_3 - 2$	1	0	-1/3
AC	4	$4 - x_1 - x_3 = x_2 - 1$	0	0	-1/3
BC	2	$2 - x_2 - x_3 = x_1 - 3$	-2	-1	-1/3

Poslednja određena imputacija predstavlja nukleus zadate igre.

Problem 4

Odrediti nukleus igre sa 3 igrača ako je ona zadata u formi karakteristične funkcije

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 30 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 100 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 80 & \end{array}$$

Rešenje:

$$x = (10,45,45)$$

4.3 Jezgro i Šeplijev vektor

Definicija

Skup C stabilnih imputacija se naziva **jezgrom** i označava kao

$$C = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N), \qquad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N\}$$

Problem 5

Odrediti jezgro igre ako je ona zadata preko svoje karakteristične funkcije:

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 8 \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 & \end{array}$$

Rešenje:

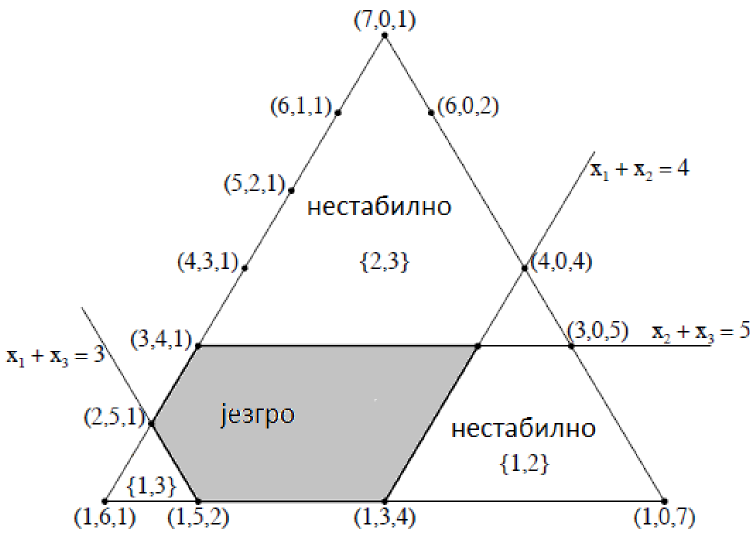
Imputacija je vektor (x_1, x_2, x_3) vrednosti x_1, x_2 i x_3 za koje važi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1.$$

Imputacija se može predstaviti preko trougla koji se nalazi u ravni $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ a čija su temena (7,0,1), (1,6,1) и (1,0,7). Dakle, svaka tačka ravni ima tri koordinate ukupne vrednosti 8.

Možemo da nacrtamo pravu $x_1 = 1$, odnosno pravu

$x_1 + x_3 = 3$ koja je jednaka pravoj $x_2 = 5$.



Sa slike se može videte da koalicija koju čine {2,3} može sebi da garantuje minimalni iznos 5 ($v(\{2,3\}) = 5$) što znači da su sve tačke trougla za koje važi $x_2 + x_3 < 5$ nestabilne (sve tačke ispod prave $x_2 + x_3 = 5$). Obzirom da koalicija {1,2} sebi garantuje minimum $v(\{1,4\}) = 4$ sledi da su sve tačke ispod prave $x_1 + x_2$ =4 takođe nestabilne. Najzad, koalicija {1,3} garantuje iznos $v(\{1,3\}) = 3$ čime se dobija da su i sve tačke ispod prave $x_1 + x_3 = 3$ takođe nestabilne. Jezgro predstavljaju preostale tačke zajedno sa granicama (osenčeni petougao).

Problem 6

Odrediti jezgro igre ako je ona zadata preko svoje karakteristične funkcije:

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 20 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 10 & v(\{1,2,3\}) = 60 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 50 & \end{array}$$

Rešenje:

Pretpostavimo da se trougao nalazi na ravni $x_1 + x_2 + x_3 = 60$. Dakle, svaka tačka te ravni ima tri koordinate čiji je zbir 60. Prvo ćemo odrediti nestabilne imputacije za jezgro. Koalicija $\{2,3\}$ može da garantuje iznos 50, što znači da za sve vrednosti x_2 i x_3 vektora (x_1, x_2, x_3) za koje važi $x_2 + x_3 < 50$ nestabilne. Takođe, pošto koalicija $\{1,2\}$ sebi garantuje minimalnu isplatu 20, sve tačke x_1 i x_2 za koje važi $x_1 + x_2 < 20$ takođe nestabilne. Dodatno, pošto koalicija $\{1,3\}$ sebi može da garantuje isplatu od najmanje 10, sve tačke imputacije (x_1, x_2, x_3) za koje važi $x_1 + x_3 < 10$ su takođe nestabilne. Jezgro čine preostale tačke prostora imputacija (četvorougao se dobija).

Problem 7

Pretpostavimo da neki predmet ima različitu vrednost za različite igrače, tj. neka a_i označava vrednost tog predmeta, $i = 1,2,3$. Neka je, zatim $a_1 < a_2 < a_3$ i neka je taj predmet najvredniji prvom igraču a najmanje vredan poslednjem. Pretpostavimo da je prvi igrač vlasnik tog predmeta i da važi $v(\{1\}) = a_1$. Pošto ga drugi igrači ne poseduju, možemo reći da je $v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{2,3\}) = 0$. Ako se prvi i drugi igrač udruže, njihova zajednička vrednost će biti a_2, $v(\{1,2\}) = a_2$. Slično, ako se udruže prvi i treći, zajednička vrednost će iznositi $v(\{1,3\}) = a_3$. Odrediti jezgro igre.

Rešenje:

$$\begin{array}{lll} x_1 \geq a_1 & x_1 + x_2 \geq a_2 & \\ x_2 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq a_3 & x_1 + x_2 + x_3 = a_3 \\ x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Iz relacija $x_2 = a_3 - x_1 - x_3 \leq 0$ i $x_2 \geq 0$ sledi da je $x_2 = 0$.
Dalje se iz $x_1 \geq a_2$ i $x_3 = a_3 - x_1 \geq 0$ dobija da je jezgro igre skup $C = \{(x, 0, a_3 - x), a_2 \leq x \leq a_3\}$

Na osnovu vrednosti iz skupa može da se zaključi da će treći igrač kupiti predmet po nekoj ceni x, što znači da će prvi dobiti x dinara koje će mu treći isplatiti. Drugi ne dobija ništa ali ima važnu ulogu zato što je on podigao cenu predmeta na najmanje a_2. Bez drugog igrača treći je mogao da otkupi premet po manjoj ceni.

Problem 8

Neka je igra data preko svoje karakteristične funkcije. Odrediti Šeplijev vektor igre.

$$v(\emptyset)=0 \quad \begin{array}{l} v(\{1\})=1 \\ v(\{2\})=0 \\ v(\{3\})=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} v(\{1,2\})=4 \\ v(\{1,3\})=3 \\ v(\{2,3\})=5 \end{array} \quad v(\{1,2,3\})=8$$

Rešenje:

Šeplijev vektor se može odrediti na 2 načina. U oba slučaja $N=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

I način

Uvodimo sledeće oznake

$$c_{\{1\}}=v(\{1\})=1$$
$$c_{\{2\}}=v(\{2\})=0$$
$$c_{\{3\}}=v(\{3\})=1$$

$$c_{\{1,2\}}=v(\{1,2\})-c_{\{1\}}-c_{\{2\}}=4-1-0=3$$
$$c_{\{1,3\}}=v(\{1,3\})-c_{\{1\}}-c_{\{3\}}=3-1-1=1$$
$$c_{\{2,3\}}=v(\{2,3\})-c_{\{2\}}-c_{\{3\}}=5-0-1=4$$
$$c_N=v(\{N\})-c(\{1,2\})-c\{1,3\}-c(\{2,3\})-c(\{1\})-c(\{2\})-c(\{3\})=8-3-1-4-1-0-1=-2$$

Sada za svaku koaliciju S sa $|S|$ igrača, karakterističnu funkciju v možemo zapisati u sledećem obliku

$$v=\sum_{S\subset N} c_{\{S\}}v_{\{S\}}=v_{\{1\}}+v_{\{2\}}+3v_{\{1,2\}}+v_{\{1,3\}}+4v_{\{2,3\}}-2v_{\{1,2,3\}}$$

Vrednosti Šeplijevog vektora se mogu računati po formuli $\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{c_i}{|S|}$ gde se S posebno definiše za svakog igrača.

Na primer, pri određivanju vrednosti $\phi_1(v)$ za S važi sledeće: $S\subseteq\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$.

$$\phi_1(v)=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=2\frac{1}{3}$$

Slično, pri određivanju vrednosti $\phi_2(v)$ za S važi sledeće: $S\subseteq\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$$\phi_2(v)=0+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}-\frac{2}{3}=\frac{7}{2}-\frac{2}{3}$$

Dok je za $\phi_3(v)$ S definisano sa $S\subseteq\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$$\phi_3(v)=1+\frac{1}{2}+\frac{4}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}-\frac{2}{3}$$
$$\phi\ \ (v)=\left(\frac{14}{6},\frac{17}{6},\frac{11}{6}\right)$$

II način

Koristimo sledeću formulu:

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}[v(S)-v(S-\{i\})]$$

Skupovi S su definisani na isti način kao u slučaju I.

Problem 9

Odrediti Šeplijev vetkor ako je data sledeća karakteristična funkcija igre

$$v(\emptyset)=0 \quad \begin{array}{l} v(\{1\})=1 \\ v(\{2\})=0 \\ v(\{3\})=-4 \end{array} \quad \begin{array}{l} v(\{1,2\})=2 \\ v(\{1,3\})=-1 \\ v(\{2,3\})=3 \end{array} \quad v(\{1,2,3\})=6$$

Rešenje:

I način

$$c_{\{1\}}=v(\{1\})=1$$
$$c_{\{2\}}=v(\{2\})=0$$
$$c_{\{3\}}=v(\{3\})=-4$$
$$c_{\{1,2\}}=v(\{1,2\})-c_{\{1\}}-c_{\{2\}}=1$$
$$c_{\{1,3\}}=v(\{1,3\})-c_{\{1\}}-c_{\{3\}}=2$$
$$c_{\{2,3\}}=v(\{2,3\})-c_{\{2\}}-c_{\{3\}}=7$$

$$c_N = v(\{N\}) - c(\{1,2\}) - c\{1,3\} - c(\{2,3\}) - c(\{1\}) - c(\{2\}) - c(\{3\}) = -1$$
$$v = w_{\{1\}} - 4w_{\{3\}} + w_{\{1,2\}} + 2w_{\{1,3\}} + 7w_{\{2,3\}} - w_{\{1,2,3\}}$$
$$\phi_1(v) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{3} = 2\frac{1}{6}$$
$$\phi_2(v) = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} - \frac{1}{3} = 3\frac{4}{6}$$
$$\phi_3(v) = -\frac{4}{1} + \frac{2}{2} + \frac{7}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\phi \quad (v) = \left(2\frac{1}{6}, 3\frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

<u>II način</u>

Koristimo formulu

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

$$\phi_1(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}[1-0] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[2-1] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[-1+4]$$
$$+ \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}[6-3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{6}$$
$$\phi_2(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}[1-0] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[2-1] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[3+4]$$
$$+ \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}[6+1] = 0 + \frac{1}{6} + \frac{7}{6} + \frac{7}{3} = 3\frac{2}{3}$$
$$\phi_3(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}[-4-0] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[-1-1+3-0] + \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}[6-2]$$
$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

Problem 10

Posmatramo igru sa 4 igrača koji imaju po 10, 20, 30 i 40 deonica u nekom preduzeću. Odluke donose oni igrači koji imaju najmanje 50% vlasništva. Formirati karakterističnu funkciju igre a zatim odredti Šeplijev vektor.

Rešenje:

Igrači mogu da se udruže u sledeće koalicije $\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$

$$v\{1\} = v\{2\} = v\{3\} = v\{4\} = 0,$$
$$v\{1,2\} = v\{1,3\} = 0$$
$$v\{1,2,3,4\} = v\{2,4\} = v\{3,4\}$$

Koalicije u kojoj učestvuje 1. igrač donose:

$S = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2,4\} \quad \rightarrow \qquad v(S) - v(S - \{1\}) = 0,$

$S = \{1,2,4\} \qquad\qquad\qquad \rightarrow$

$$\phi_1(v) = \frac{2!\,1!}{4!} = \frac{1}{12}$$

Za koalicije koje čini drugi igrač važi $v(S) - v(S - \{2\}) = 0$, osim kada su u pitanju koalicije $S = \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}$ kada je Šeplijeva vrednost

$$\phi_2(v) = \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!}[1] + \frac{(3-1)!\,(4-3)}{4!}[1] + \frac{(3-1)!\,(4-3)}{4!}[1] + \frac{1}{4}$$

Slično, treći igrač učestvuje u koalicijama {3,4}, {1,3,4}, {1,2,3} čime je Šeplijeva vrednost igre za njega

$$\phi_3(v) = \frac{1}{4}$$

Najzad, za 4.igrača važi $v(S) - v(S - \{4\}) \neq 0$ u koalicijama $\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$. Stoga važi:

$$\phi_4(v) = 2\frac{1!\,2!}{4!} + 3\frac{2!\,1!}{4!} = \frac{5}{12}$$

Konačno, Šeplijev vektor je sledećeg oblika:

$$\phi = \left(\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right)$$