

Problem raspoređivanja

PRIMER 55

Građevinska kompanija raspolaže sa 4 velika buldožera. Buldožeri su raspoređena u 4 različite garaže i mogu se koristiti za bilo koje od 4 pomenuta gradilišta. Rastojanje (izraženo u kilometrima) između garaži i gradilišta dato je u tabeli.

Buldožer/Gradilište	A	B	C	D
1	90	75	75	80
2	35	85	55	65
3	125	95	90	105
4	45	110	95	115

Rasporediti buldožere među gradilištima tako da da ukupno pređeno rastojanje bude minimalno?

Rešenje:

Ukoliko se u matrici nalaze nule koje se mogu precrtati upotrebom minimalnog broja linija i ukoliko je broj iskorišćenih linija jednak rangu matrice problem je rešen. U na mestima baznih nula nalazi se rešenje problema, inače se pristupa sledećem algoritmu:

Korak 1:

Odrediti najmanje rastojanje u svakoj vrsti a zatim od svake kolone oduzeti dobijen vektor. Na primer, najmanja vrednost u prvoj vrsti je 75, u drugoj 35, trećoj 90 i četvrtoj 45. Oduzimanjem vektora $(75,35,90,45)^T$ dobija se sledeća matrica:

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 75 & 75 & 75 & 75 \\ 35 & 35 & 35 & 35 \\ 90 & 90 & 90 & 90 \\ 45 & 45 & 45 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix}$$

Korak 2:

Od svake kolone oduzeti vektor čije su vrednosti jednake najmanjoj vrednosti te kolone. Na primer, od prve, druge i treće kolone oduzeti vektore čiji su svi elementi jednaki nuli, od četvrte vektor čiji su svi elementi jednaki 5:

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

Korak 3:

Prekriti sve nule u matrci pomoću najmanjeg broja vertikalnih i horizontalnih linija

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

Mi smo precrtali prvu vrstu i prvu i treću kolonu.

Korak 4:

Budući da je najmanji broj linija koje smo iskoristili za prekrivanje nula jednak 3 a da je rang matrice 4, prelazimo na korak 5.

Korak 5:

Među neprecrtanim poljima naći najmanju vrednost ($\min\{50,25,5,10,65,65\}=5$). Vektor čiji su elementi jednaki toj najmanjoj neprecrtanoj vrednosti **oduzeti od neprecrtanih vrsta** a zatim **dati precrtanim kolonama**.

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 45 & 15 & 20 \\ 30 & 0 & -5 & 5 \\ -5 & 60 & 45 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 45 & 20 & 20 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 60 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

Vratiti se na korak 3.

Korak 3:

Precrtati sve nule korišćenjem najmanjeg broja horizontalnih i vertikalnih linija. Ukoliko je broj linija jednak rangu matrice, dobili smo optimalno rešenje. U suprotnom, prelazi se na korak 4.

Korak 4:

U poslednjoj matrici mogu se precrtati prva i treća vrsta i prva kolona.

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 45 & 20 & 20 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 60 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

Prelazi se na korak 5.

Korak 5:

Među neprecrtanim poljima se određuje najmanja vrednost. To je polje čija je vrednost 20. ($\min\{45,20,20,60,50,60\} = 20$)

Od svake neprecrtane vrste oduzima se vektor čije su vrednosti jednake 20 a zatim se precrtanim kolonama dodaje vektor čije su vrednosti jednake 20.

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 45 & 20 & 20 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 60 & 50 & 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 5 & 0 \\ -20 & 25 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ -20 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 20 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Prelazi se na korak 3

Korak 3:

Precrtamo sve nule korišćenjem minimalnog broja horizontalnih i vertikalnih linija. Ukoliko je broj iskorišćenih linija jednak rangu matrice dobijeno je optimalno rešenje.

Korak 4:

Budući da se sve nule mogu precrtati korišćenjem 4 linije, dobili smo optimalno rešenje i ono se nalazi na poljima koje čine glavne nule.

Glavne nule se dobijaju na sledeći način:

Prvo se odredi nula koja je jedina u svojoj vrsti ili koloni i označi kao bazisna. Potom se nula koja se nalazi u vrsti ili koloni bazisne nule označi kao nebazisna a zatim se postupak ponavlja.

Na primer, u poslednjoj vrsti nalazi se samo jedna nula i ona postaje bazisna. Precrtavaju se prva kolona i poslednja vrsta. Među neprecrtanim vrstama i kolonama se nalaze po dve nule. Ukoliko se u drugoj koloni nula koja se nalazi u 3.vrsti proglaši za bazisnu, nula koja se nalazi u prvoj vrsti postaje nezabizna. Da bi prva vrsta imala bazisnu nulu, nula koja se nalazi u četvrtoj koloni postaje bazisna. Ovakvim postupkom nula koja se nalazi u 4. koloni i 2. vrsti postaje nebazisna. Preostaje 3. vrsta koja ima dve nule (od kojih je jedna u vrsti sa bazisnom nulom). Nula koja u svojoj koloni i vrsti nema ni jednu bazisnu nulu se proglašava za bazisnu.

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & \mathbf{0} \\ 20 & 25 & \mathbf{0} & 0 \\ 55 & \mathbf{0} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Rešenje problema raspoređivanja se nalazi na istom mestu na kome su bazisne nule u odnosu na polaznu maticu troškova, tj. Rešenje je sledećeg oblika:

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115