

## PROBLEM ODREĐIVANJE MAKSIMALNOG TOKA U GRAFU

Protoci u mrežama predstavljaju jedan od najinteresantnijih ekstremalnih problema u teoriji grafova. Naime, problem određivanja optimalnog protoka u informacionim, komunikacionim, vodovodnim i drugim mrežama su neki od primena ove oblasti.

### PROBLEM

Pretpostavimo da imamo jednu posebnu vrstu lanca, od izvora  $s$  do ušća  $t$  date mreže, na sledeći način:

Neka je dat lanac  $p$  koji povezuje izvor  $s$  i ušće  $t$ . Ako je za sve napred usmerene grane koje pripadaju lancu  $p$ ,  $f_{ij} < D_{ij}$ , a za sve nazad usmerene grane lanca  $p$ ,  $f_{ij} > 0$ . Tada ćemo lanac  $p$  nazvati LANCEM SA REZERVNIM KAPACITETOM ili LANCEM SA REZERVNOM PROPUSNOM SPOSOBNOŠĆU u odnosu na protok  $f$ .

## FORD FULKERSTON ALGORITAM MAKSIMALNOG PROTOKA (FFF ALGORITAM)

### KORAK 1

Obeležimo izvor mreže sa oznakom  $[-, \epsilon(s) = \infty]$ . Sada je izvor  $s$  obeležen i posmatran čvor, dok su ostali čvorovi neobeleženi. Uočimo, zatim, sve čvorove susedne izvoru  $s$ . Neka su to čvorovi  $1, 2, \dots, k, \dots, t$ . Svakom od njih, za koji je  $f_{sk} < D_{sk}$  (gde su  $D_{sk}$  – kapacitet grane,  $f_{sk}$  – trenutni protok), dodelimo oznaku  $[s^+, \epsilon(k)]$ , gde je

$$\epsilon(k) = \min\{\epsilon(s), D_{sk} - f_{sk}\}$$

a svim onim čvorovima za koje je  $f_{sk} > 0$ , dodelimo oznaku  $[s^-, \epsilon(k)]$ , gde je  $\epsilon(k) = \min\{\epsilon(s), f_{ks}\}$

Sada je izvor  $s$  obeležen i neposmatran čvor, dok su svi njemu susedni čvorovi obeleženi i posmatrani. Ostali čvorovi mreže nisu obeleženi, pa se postupak obeležavanja čvorova produžava i sastoji u sledećem:

- Uočimo ma koji obeleženi i posmatrani čvor  $i$ . Neka je njegova oznaka  $[g^+, \epsilon(i)]$  ili  $[g^-, \epsilon(i)]$ , gde je  $g$  jedan od obeleženih i susednih čvorova čvoru  $i$ , tada svim susednim neobeležanim čvorovima  $j$ , za koje je  $f_{ij} < D_{ij}$ , dodelimo oznaku  $[i^+, \epsilon(j)]$ , gde je

$$s(j) = \min\{\epsilon(i), D_{ij} - f_{ij}\}$$

a svim susednim neobeležanim čvorovima  $j$ , za koje je  $f_{ji} > 0$  dodelio oznaku  $[i^-, \epsilon(j)]$ , gde je sada

$$\epsilon(j) = \min\{\epsilon(i), f_{ji}\}$$

- Postupak obeležavanja čvorova sprovodi se sve dotle dok i ušće mreže  $t$  ne bude obeleženo ili dok se ne ustanovi da dalje obeležavanje čvorova, ovim postupkom, nije moguće, što znači da postoje sledeće dve alternative:

1.1 Ako je ušće mreže  $t$  moguće obeležiti, tada postoji lanac sa rezervnom propusnom sposobnošću, što znači da se postojeći protok može povećati, pa je potrebno preći na naredni korak algoritma.

1.2. Ako se ustanovi da dalje obeležavanje čvorova nije moguće, tada su minimalni presek i maksimalni protok određeni, a FFT algoritam je završen. Nakon toga potrebno je preći na KORAK 3.

### KORAK 2

U prethodnom koraku algoritma obeleženi su svi čvorovi mreže uključujući i ušće  $t$ . Neka je ušće  $t$  obeleženo jednom od oznaka  $[z^+, \epsilon(t)]$  ili  $[z^-, \epsilon(t)]$ , gde je  $z$  označen jedan od susednih čvorova ušću  $t$ . Ako je ušće  $t$  obeleženo oznakom  $[z^+, \epsilon(t)]$ , tada postojeći protok  $f_{zt}$  uvećavamo za  $\epsilon(t)$  i dobijamo novi protok  $f_{zt} + \epsilon(t)$ , a ako je ušće  $t$  obeleženo oznakom  $[z^-, \epsilon(t)]$ , tada postojeći protok  $f_{zt}$  umanjujemo za  $\epsilon(t)$  i dobijamo novi prtok  $f_{zt} - \epsilon(t)$ . Nakon toga prelazi se na posmatranje oznaka čvora  $z$ , i postupak promene protoka se dalje nastavlja na sledeći način:

- Neka je bilo koji čvor  $j$  date mreže obeležen oznakom  $[i^+, \epsilon(j)]$ , tada postojeći protok  $f_{ij}$  zamenjujemo protokom  $f_{ij} + \epsilon(t)$ . Ako je čvor  $j$  obeležen oznakom  $[i^-, \epsilon(j)]$ , tada postojeći protok  $f_{ij}$  zamenjujemo protokom  $f_{ij} - \epsilon(t)$ .

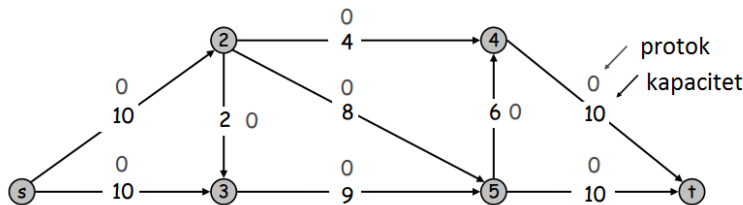
- Kada se na ovaj način dođe do izvora mreže  $s$ , postupak promene protoka je završen, a postojeća veličina protoka  $v$  uvećava se za  $\epsilon(t)$ , odnosno postojeći protok  $f$  zamenjuje se novim protokom  $f + \epsilon(t)$ .
- Ovim se istovremeno završava jedna iteracija, pa se, nakon brisanja starih oznaka svih čvorova, sa novim protokom  $f + \epsilon(t)$  vraćamo na prvi korak algoritma i obeležavanje čvorova, čime u stvari otpočinja naredna iteracija.

### KORAK 3

Svi čvorovi, uključujući i izvor mreže  $s$ , koji su u toku poslednje iteracije bili obeleženi predstavljaju podskup čvorova  $X$ , a svi neobeleženi čvorovi predstavljaju podskup čvorova  $\bar{X}$ , dok skup grana  $(X, \bar{X})$  predstavlja minimalni presek mreže. Veličina protoka sa kojom smo započeli poslednje obeležavanje čvorova (ušće  $t$  nije moguće obeležiti) predstavlja maksimalnu veličinu protoka.

### PRIMER 90

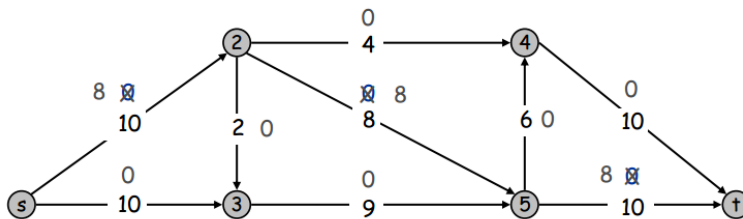
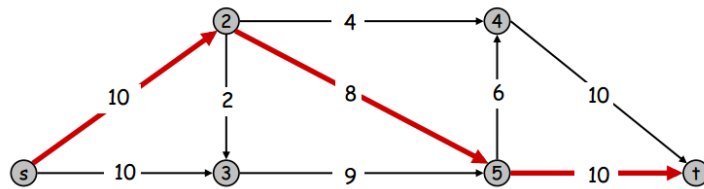
Za datu mrežu  $G$  odrediti maksimalni protok



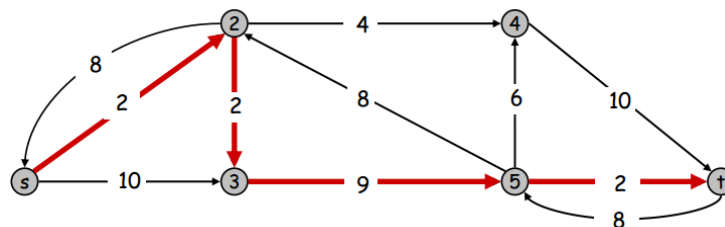
Rešenje:

Posmatramo bilo koji put od  $s - t$ :

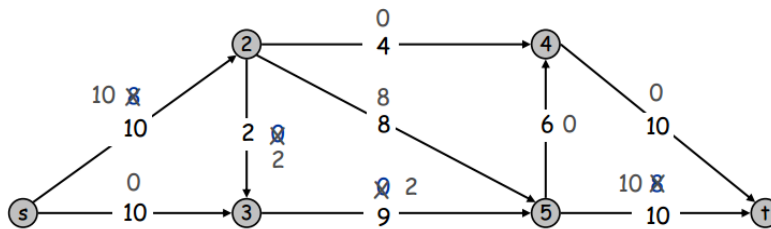
Na primer: Preko čvorova 2 i 5 protok iznosi  $\min\{10,8,10\} = 8$ . Trenutni protok je 8.



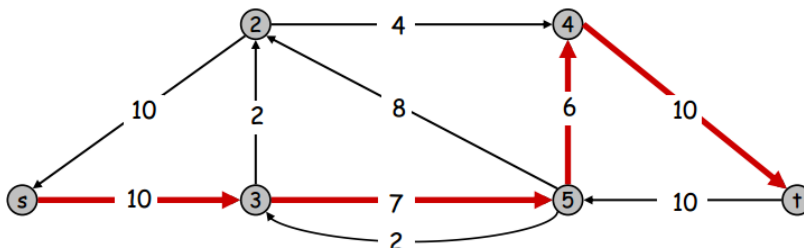
Tražimo novi put od  $s - t$ . Na primer: Preko čvorova 2 - 3 - 5  $\min\{2,2,9,2\} = 2$ . Dobijamo protok  $8+2=10$ .



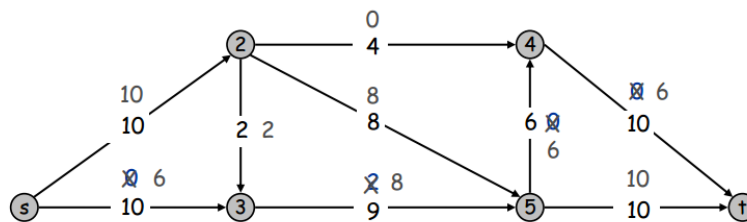
Na ovaj način, grane  $s - 2$ ,  $2 - 3$  i  $5 - t$  su zasićene, njih brišemo. Obeležimo novu putanju i, ujedno, obeležimo i povratnu putanju.



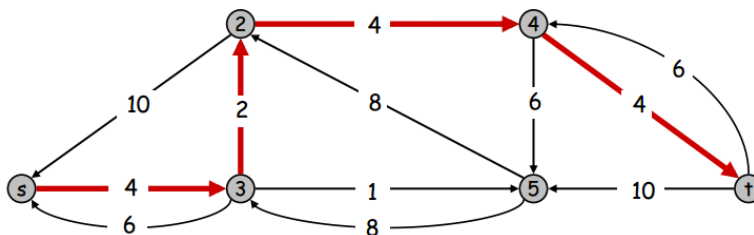
Dakle, povratna putanja kapaciteta 8 od izvora do ušća je  $t - 5 - 2 - s$ , dok je povratna putanja kapaciteta 2. Ponavljamo postupak. Neka je nova putanja  $s - 3 - 5 - 4 - t$ ,  $\min\{10, 7, 6, 10\} = 6$ . Dobijamo protok  $10+6=16$ .



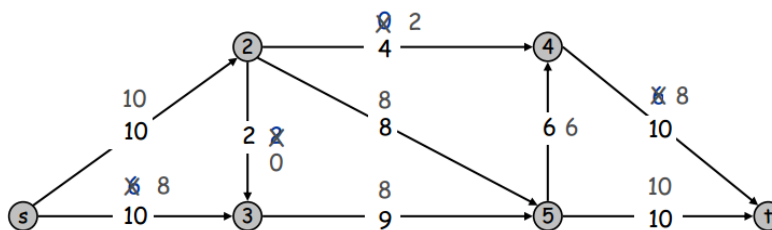
Obeležimo novu putanju i novu povratnu putanju:



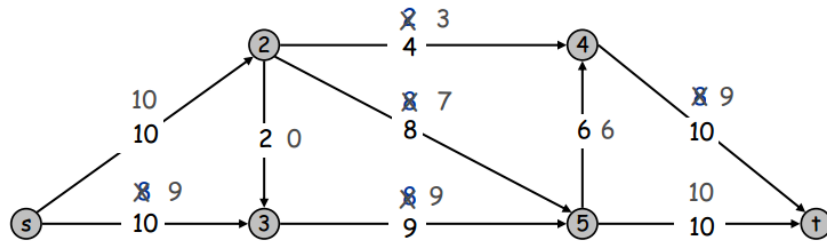
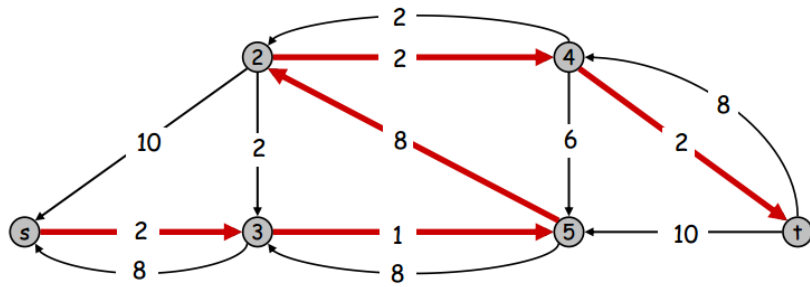
Tražimo novu putanju. Na primer:  $s - 3 - 2 - 4 - t$ , protoka 2. Dobijamo protok  $16+2=18$ .



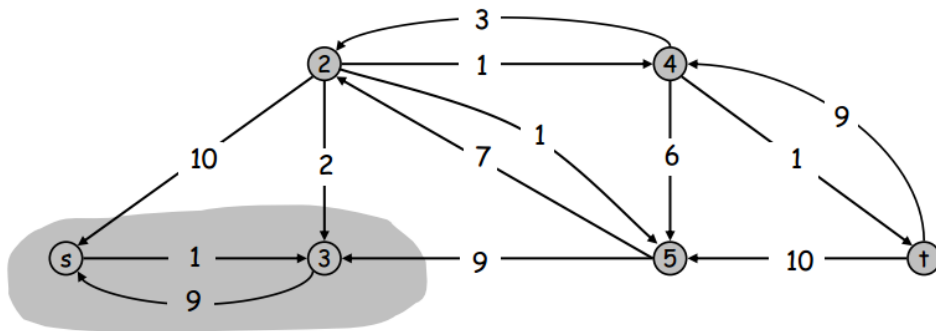
Posmatramo zasićenost:



Nova putanja,  $s - 3 - 5 - 2 - 4 - t$  protoka 1. Dobijamo protok  $18+1=19$ .

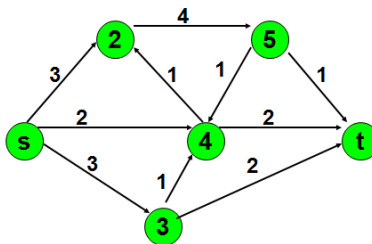


Da li postoji još neka putanja? Ne! Algoritam je završen, maksimalni protok iznosi 19.  
Konačno, putanja je prikazana na grafu niže:



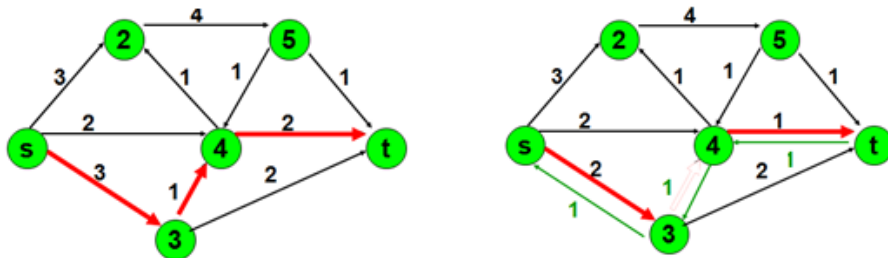
**PRIMER 91**

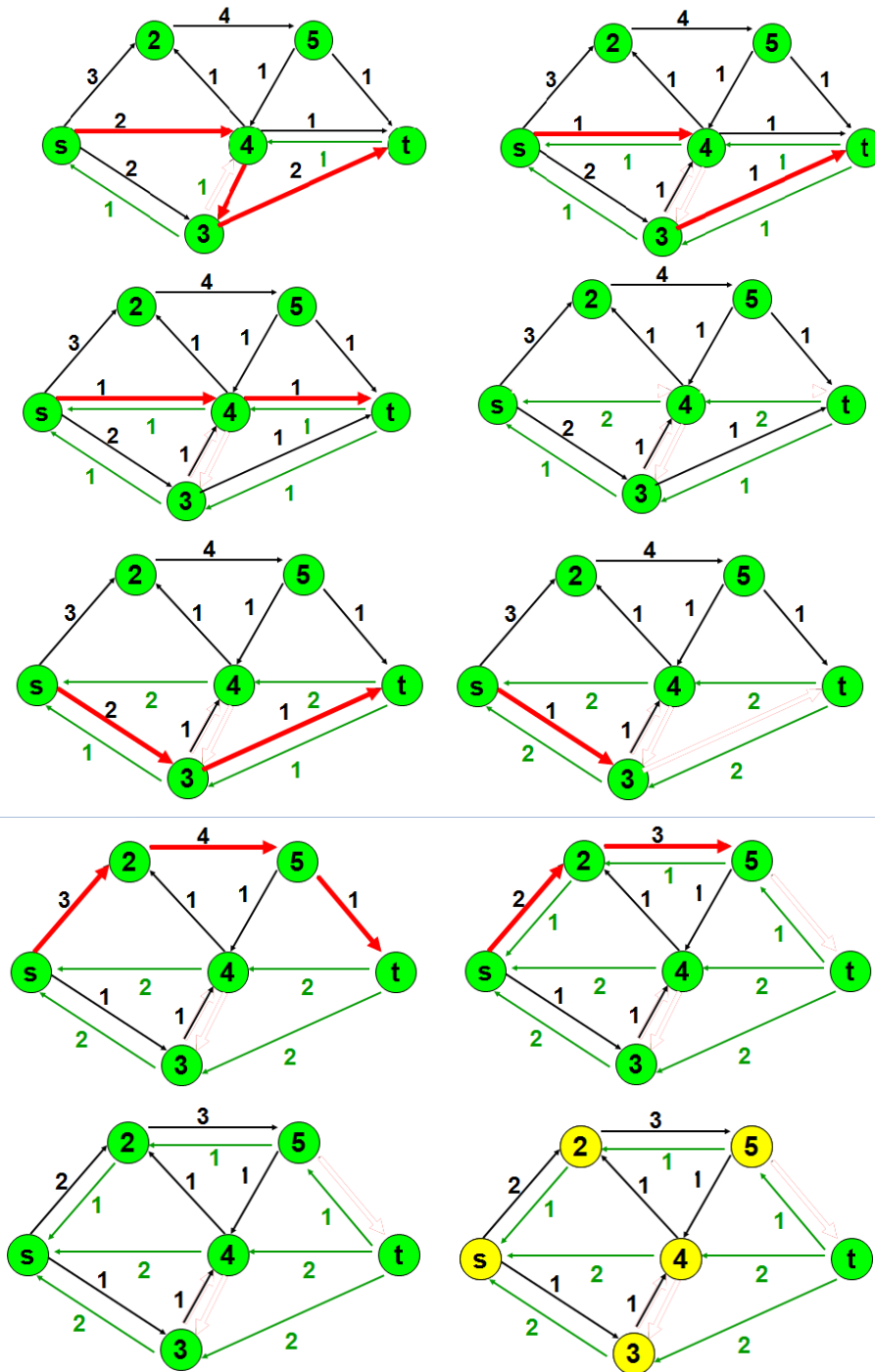
Za datu mrežu  $G$  odrediti maksimalni protok



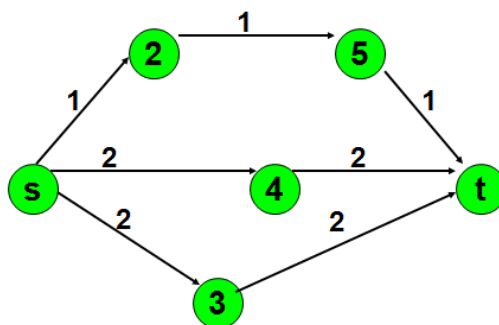
Rešenje:

Tražimo bilo koju putanju  $s - t$  i odredimo maksimalni protok duž te putanje:



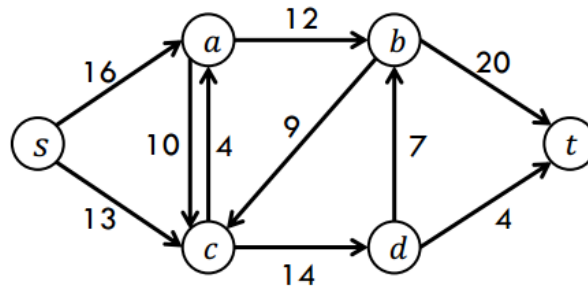


Kraj algoritma. Maksimalni tok ima sledeću putanju:

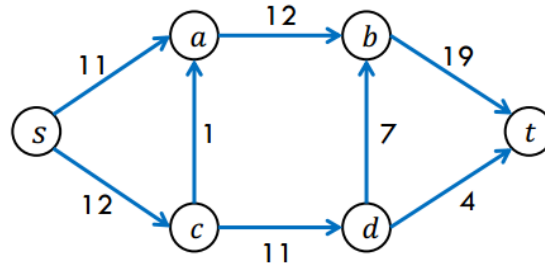


**PRIMER 92**

Za datu mrežu  $G$  odrediti maksimalni protok

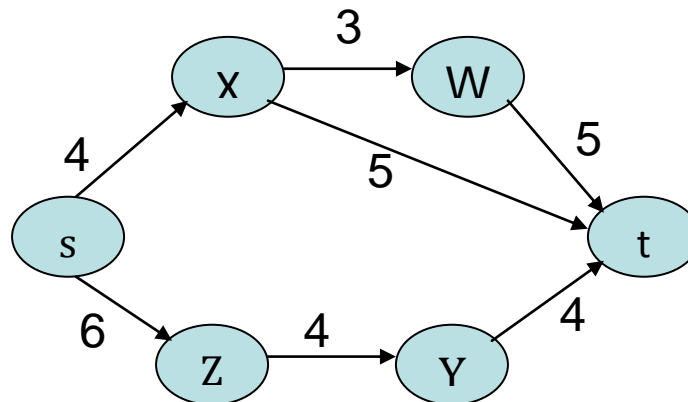


Rešenje

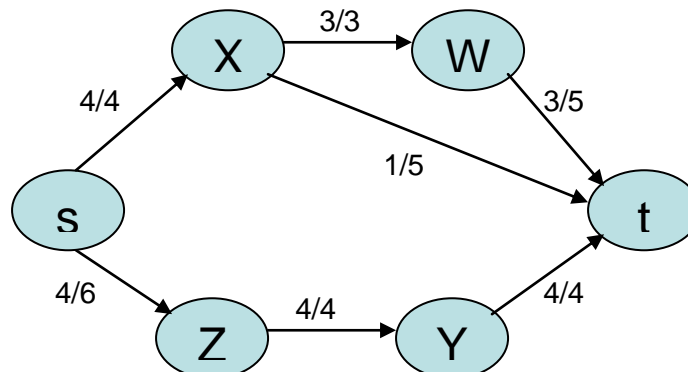


**PRIMER 93**

Za datu mrežu  $G$  odrediti maksimalni protok



Rešenje



## HAMILTONOVA PUTANJA

Problem Trgovačkog putnika predstavlja jedan od najpoznatijih problema kombinatorne optimizaciji pripada teško rešivim problemima obzirom da je njegovo rešavanje eksponencijalnog karaktera

### DEFINICIJA

Hamiltonov put je put koji prolazi kroz sve čvorove grafa TAČNO JEDANPUT. Put koji se završava u istom čvoru a kroz sve ostale čvorove prolazi tačno jedanput naziva se zatvoren Hamiltonov put (Hamiltonov put formira konturu koja sadrži sve čvorove grafa pa se umesto pojma Hamiltonov put češće korsiti pojam Hamiltonove konture). Graf koji ima Hamiltonovu konturu se naziva Hamiltonovim grafom.

- ◆ Hamilton je 1856. godine predstavio problem: Trgovački putnik treba da obiđe određeni broj gradova i da se vrati na mesto polaska, tako da u toku putovanja obiđe svaki grad tačno jedanput.
- ◆ Sličan problem je problem Konjičkog skoka (konj kao šahovska figura): Da li je moguće skakanjem obići sva polja šahovske table tako da se svako polje obiđe tačno jedanput.
- ◆ Analogan problem Hamiltonovog puta je problem nalaženja Ojlerovog puta (kroz svaku GRANU grafa se prolazi tačno jedanput). Egzistencija Ojlerovog puta zavisi samo od stepena čvorova dok kod Hamiltonovog to ne mora biti slučaj. Egzistencija Hamiltonovog puta zavisi pre svega od strukture grafa i ovaj problem u opštem slučaju nije rešen.
- ◆ Problem trgovačkog putnika možemo da formulišemo na sledeći način: Od svih Hamiltonovih puteva odabрати onaj koji je prema zadatom kriterijumu optimalan (kriterijum optimalnosti može npr. biti dužina ili cena puta).
- ◆ Primer primene Hamiltonove putanje: Zanatsko preduzeće ima na raspolaganju  $n$  stanova u kojima mora da završi vodoinstalaterske i molerske radove. U  $i$ -tom stanu vodoinstalateri treba da rade  $a_i$  a u moleri  $b_i$  vremena. Kojim redosledom treba vodoinstalateri i moleri da rade kako bi se celokupna zgrada završila za što kraće vreme.
  - ◆ Prvi uslov koji treba ispoštovati je da vodoinstalateri treba da rade u stanu  $i$  pre nego u stanu  $j$  ako važi da je

$$\min(a_i, b_j) \leq \min(a_j, b_i)$$

### TEOREMA (Redei)

U digrafu u kojem između dva proizvoljno izabrana čvora  $x_i$  i  $x_j$  postoji jedna od grana  $(x_i, x_j)$  i  $(x_j, x_i)$ , postoji i Hamilton-ov put.

- ◆ Teorema se može primeniti na turnire u kojima svaki tim igra sa svakim timom i ne postoje nerešeni rezultati. Na kraju turnira se takmičari mogu numerisati tako da je svaki takmičar, osim prvog, pobeđen od onog sa neposredno manjim brojem.

### TEOREMA (Redei)

Ako u povezanom grafu sa  $n$  ( $n \geq 3$ ) čvorova za stepen  $d$  svakog čvora važi nejednakost  $d \geq \frac{1}{2}n$ , graf poseduje Hamiltonovu konturu.

### TEOREMA (Dirac)

Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n > 3$ ) čvorovi grafa  $G$  a  $d_1, d_2, \dots, d_n$  njihovi stepeni. Ako za svaka dva nesusedna čvora  $x_i, x_j$  važi  $d_i + d_j > n - 1$  graf  $G$  sadrži Hamiltonovu konturu.

## TEOREMA (Ore)

Neka je  $G$  graf sa  $n$  ( $n > 3$ ) čvorova. Ako je za svako  $k$  ( $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ) broj čvorova stepena ne većeg od  $k$  manji od  $k$  i ako za neparno  $n$ , broj čvorova stepena ne većeg od  $\frac{n-1}{2}$  nije veći od  $\frac{n-1}{2}$ , graf  $G$  ima Hamilton-ovu konturu.

## PROBLEM TRGOVAČKOG PUTNIKA

Neka je dato  $n$  gradova koje treba da obiđe trgovački putnik tako da troškovi puta budu minimalni. Postoje dve varijante ovog problema:

1. Putnik mora da se vrati u grad iz kojeg je pošao (sedište peduzeća)
  2. Početni i završni grad puta trgovačkog putnika mogu da se razlikuju.
- ◆ Problem Trgovačkog putnika može da se interpretira na potpunom težinskom grafu  $G$  sa čvorovima  $1, 2, \dots, n$  i sa matricom težina (dužina) grana  $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ .
  - ◆ Obzirom da je Hamiltonova putanja put koji kroz svaki čvor grafa  $G$  prolazi tačno jednom, put Trgovačkog putnika možemo da posmatramo upravo kao Hamiltonovu put.

### PROBLEM

Odrediti najkraći Hamilton-ov put (konturu) u potpunom težinskom grafu  $G$ .

Problem Trgovačkog putnika rešavamo kao problem (0,1) celobrojnog programiranja:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, S \subset X, S \neq \emptyset, S \neq X \quad (3)$$

Gde je  $D = [d_{ij}]_{m \times n}$  (simetrična) matrica težina grana i  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Ovde je  $x_{ij} = 1$  ako i samo ako grana između čvorova pripada rešenju problema, tj. najkraćoj Hamiltonovoj konturi. Funkcija cilja koja se minimizira u (1) predstavlja dužinu delimičnog podgrafa određenog vrednostima promenljivih  $x_{ij}$ . Ograničenje (2) obezbeđuje da je stepen svakog čvora pomenutog delimičnog podgrafa jednak 2. Ograničenja (3) eliminišu mogućnost da se u rešenju pojavi više od jedne konture.

### PROBLEM

Za zadati potpuni težinski graf i zadati broj  $L$  utvrditi da li postoji Hamilton-ov put čija dužina nije veća od  $L$ .

- Hamiltonov put u grafu sa  $n$  čvorova predstavlja jednu permutaciju skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  i obrnuto, permutacija određuje Hamilton-ov put. Sada se problem Trgovačkog putnika može reći generisanjem svih permutacija skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  i izračunavanjem dužina svih Hamilton-ovih puteva i odabirom najkraćeg puta. Ovako formiran algoritam je neefikasan jer je broj permutacija  $n!$  što predstavlja eksponencijalnu funkciju od  $n$ .
- Za problem Trgovačkog putnika može da se formira greedy algoritam tako da Trgovački putnik posećuje onaj grad koji mu je najbliži. Međutim, mogu se formirati kontraprimeri kojima bi se moglo pokazati da se ovako ne dobijaju uvek dobra rešenja.
- Za rešavanje problema Trgovačkog putnika koristi se algoritam grananja i ograničavanja.
- Metoda grananja i ograničavanja predstavlja metodu implicitne enumeracije dok je metoda probanja svih permutacija eksplisitna enumeracija. Prostor mogućih rešenja se deli na manje delove (granjanje) i to više puta pri



čemu se pojedini delovi prostora rešenja odbacuje na osnovu procene vrednosti funkcije koja se minimizira (ograničavanje).

## ALGORITAM

Neka je  $H$  skup svih Hamiltonovih puteva u težinskom grafu  $G$  i neka je  $S$  skup svih razapinjućih stabala u  $G$ . Pošto ovaj put predstavlja stablo, važi relacija  $H \subset S$ . Problem minimalnog razapinjućeg stabla se naziva relaksacioni problem za problem trgovačkog putnika. Problem trgovačkog putnika se može svesti na više problema nalaženja minimalnog razapinjućeg stabla.

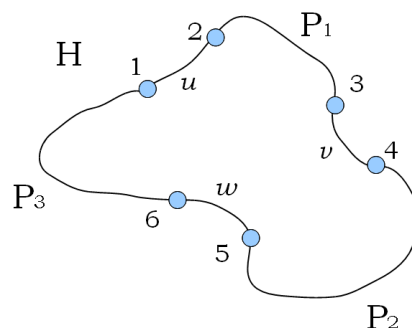
- ◆ Prvo se odredi minimalno razapinjuće stablo u grafu  $G$ . Ako je ovo stablo put, to je Hamiltonov put i ujedno rešenje problema trgovačkog putnika.
- ◆ Ako dobijeno stablo nije put, ono sadrži bar jedan čvor stepena većeg ili jednakog 3. Neka je čvor  $x$  stepena  $d$  ( $d$  je najmanje 3) i neka su  $u_1, u_2, \dots, u_d$  grane koje se sriču u čvoru  $x$ .
- ◆ Bar jedna od grana  $u_1, u_2, \dots, u_d$  ne pripada optimalnom rešenju problema trgovačkog putnika, ako težinu  $d(u_1)$  grane  $u_1$  modifikujemo tako da ona postane vrlo velika i ponovo rešimo problem minimalnog razapinjućeg stabla, grana  $u_1$  se neće nalaziti u tom stablu. Početni problem se iz ovog razloga može razgranati na  $d$  potproblema i u svakom od tih potproblema težina jedne od grana je postala  $+\infty$ . Na svakom pod potproblema se može ponoviti ovaj proces. Na taj način dobijamo strukturu porproblema oblika stabla.
- ◆ Pretraživanje stabla se dalje može vršiti u dubinu ili u širinu
- ◆ Ako je dužina minimalnog razapinjućeg stabla veća od dužine ranije nađenog Hamiltonovog puta, taj pozproblem se više ne razgranava obzirom da nam on neće omogućiti optimalno rešenje. Ako se u nekom potproblemu dobije Hamiltonov put koji je manji od dužine ranije pronađenog Hamiltonovog puta, pamti se novi put a raniji zaboravlja. Kada se iscrpe svi problemi, Hamiltonov put koji je ostao zapamćen predstavlja i rešenje problema Trgovačkog putnika.
- ◆ Ovo su NP poptuni problemi i imaju eksponencijalnu složenost.

## HEURISTIKE

Heuristika bazirana na idejama greedy algoritma ne daje optimalne rezultate. Na osnovu jedne takve heuristike, trgovački putnik treba uvek da ide u najbliži grad u kome do tada nije bio.

- ◆ Problem trgovačkog putnika je NP težak problem.
- ◆ Jedna od najboljih heuristika za ovaj problem je 3-optimalna heuristika

Posmatramo problem trgovačkog putnika u kojem se traži najkraća Hamilton-ova kontura u zadatom potpunom težinskom grafu.



Prvo se određuje jedna Hamiltonova kontura (slučajno/proizvoljno)  $H$ . Posmatramo tri međusobno nesusedne grane  $u, v, w$  sa konture  $H$ . Udaljavanjem tih grana kontura  $H$  se raspada na tri puta  $P_1, P_2, P_3$ . Posmatramo čvorove  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  koji predstavljaju krajnje tačke udaljenih grana  $u, v, w$ . Ovi čvorovi se odadavanjem tri nove grane mogu na različite načine spojiti tako da se ponovo zatvori Hamilton-ova kontura.

Mogući načini spajanja su:

- $(1, 2), (3, 4), (5, 6); (1, 2), (3, 5), (4, 6);$
- $(1, 3), (2, 4), (5, 6); (1, 3), (2, 5), (4, 6);$
- $(1, 4), (2, 5), (3, 6); (1, 4), (2, 6), (3, 5);$
- $(1, 5), (2, 4), (3, 6); (1, 5), (2, 6), (3, 4);$

Na ovaj način dobijamo 8 Hamilton-ovih kontura. Prvi način spajanja daje ponovo konuru  $H$ . Od tih 8 kontura izaberemo onu najmanje dužine. Dobijena kontura je najbolje rešenje koje se može postići polazeći od konture  $H$  i uklanjanjem grana  $u, v, w$ .

Opisani postupak poboljšanja rešenja na osnovu izbacivanja tri nesusedne grane  $u, v, w$  iz konture  $H$  ponavljamo za svaki izbor grana  $u, v, w$ . Od svih tako formiranih kontura biramo onu najmanje dužine. Time se završava 3-optimalna heuristika.

- ◆ 3-optimalna heuristika daje dobre rezultate i ima polinomijalnu kompleksnost.

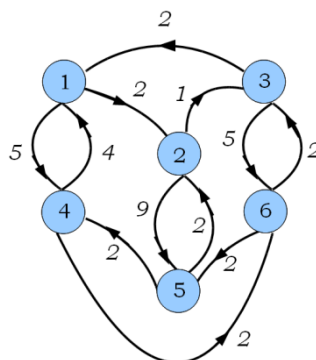
#### PRIMER 94

Naći Hamiltonovu putanju minimalne dužine u grafu ako je data matrica rastojanja čvorova:

	1	2	3	4	5	6
1		2		5		
2			1		2	
3	2					5
4	4					2
5		9		2		
6			2		2	

Rešenje:

Možemo da konstruišemo graf na osnovu date matrice.



Primetićemo da se ovde mogu izdvojiti cikli:  $1 - 2 - 3$  i  $4 - 6 - 5$

Granamo problem na 3 potproblema sa matricama:

P1:

	1	2	3	4	5	6
1				5		
2			1		2	
3	2					5
4	4					2
5		9		2		
6			2		2	

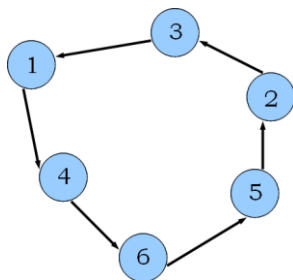
P2:

	1	2	3	4	5	6
1		2		5		
2					2	
3	2					5
4	4					2
5		9		2		
6			2		2	

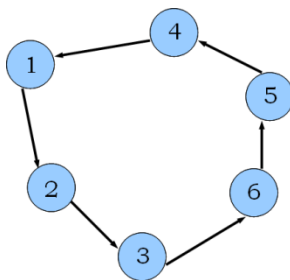
P3:

	1	2	3	4	5	6
1		2		5		
2			1		2	
3						5
4	4					2
5		9		2		
6			2		2	

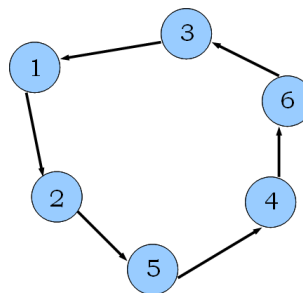
Optimalnim rešenjima odgovaraju cikli



vrednost funkcije je 21



vrednost funkcije je 12



vrednost funkcije je 16.

### PRIMER 95

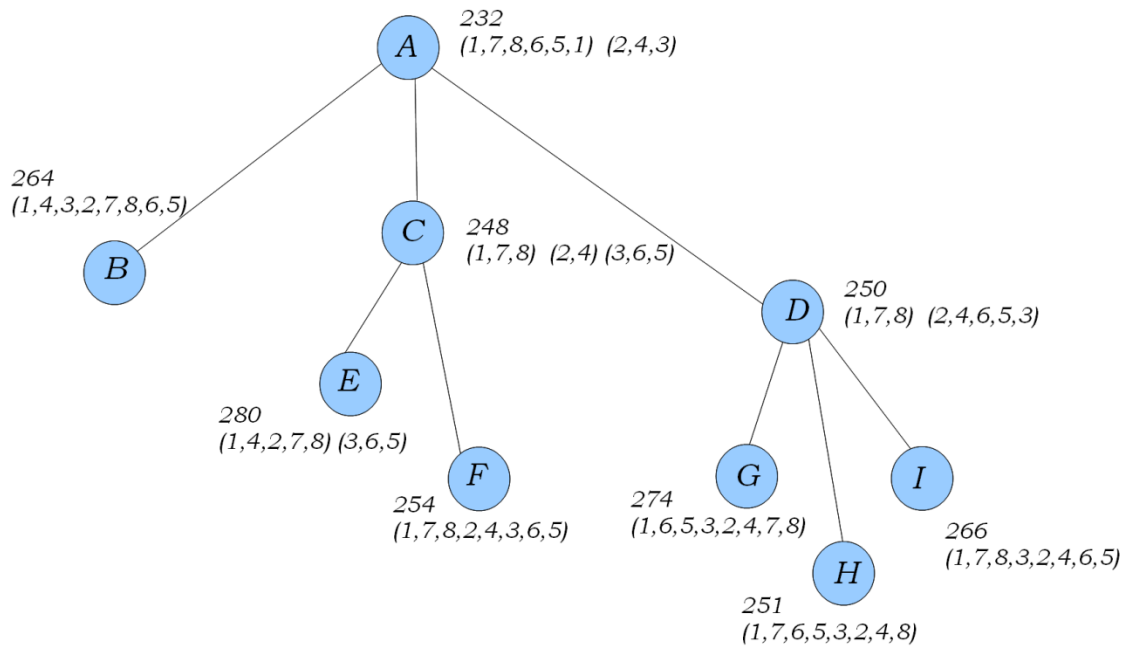
Rešiti problem trgovačkog putnika ako je graf dat matrično:

A	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72	31	29		42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

Rešenje:

Možemo da izdvojimo dva cikla (2,4,3) i (1,7,8,6,5) a cena je 232.

Odgovarajuće drvo odlučivanja je sledeće (pored svakog čvora se nalaze cena potproblema, cikli):



Ako eliminišemo cikli (2,4,3) dobijamo tri potproblema (poddrveta) B, C i D i njihove odgovarajuće matrice su:

B	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42				78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72	31	29		42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

C	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48				53	44	68	61
4	72	31	29		42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

D	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72				42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

Potproblem B je hamiltonova putanja dužine 264 dok problemi C i D to nisu. Trenutno najkraću vrednost ima problem B. Problemi C i D imaju cikle i zato se oni granaju na potprobleme. Posmatramo prvo problem C (ima nižu vrednost,  $\min[248,250] = 248$ ).

U problemu C prvo eliminišemo granu (2,4). Dobijamo dva nova potproblema E i F.

Odgovarajuće matrice su

E	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49		78	52	39	87
3	48				53	44	68	61
4	72	31	29		42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

F	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48				53	44	68	61
4	72		29		42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

A vrednosti potproblema su 280 i 254. Problem F ima Hamiltonovu putanju dužine 254 koja je manja od vrednosti prethodno dobijene Hamiltonove putanje (problem B dužine 264). Sada je problem F problem koji ima najbolju vrednost.

Problemi E i D još uvek nemaju Hamiltonovu putanju, zato rešavamo ta dva problema. Kako problem E ima vrednost 280 (manju od 254 koliko ima problem F) teško da će se dobiti bolje rešenje daljim računom. Rešavamo problem D. Problem D ima vrednost 250 što je manje od trenutno najboljeg rešenja (254) pa je moguće da se tu nalazi i naše optimalno rešenje. Problem D ima cikl (1,7,8) čije ćemo veze prekinuti i posmatrati tri nova problema, G, H i I.

Odgovarajuće matrice su:

G	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42		
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72				42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8	52	58	66	76	41	52	83	

H	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72				42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7		62	93	54	69	38		
8	52	58	66	76	41	52	83	

D	1	2	3	4	5	6	7	8
1		76	43	38	51	42	19	80
2	42		49	26	78	52	39	87
3	48	28		36	53	44	68	61
4	72				42	49	50	38
5	30	52	38	47		64	75	82
6	66	51	83	51	22		37	71
7	77	62	93	54	69	38		26
8		58	66	76	41	52		

Primitićemo da problem H ima Hamiltonovu putanju dužine 251 što je bolje od problema F i zato sada H postaje najbolje rešenje. Kako je H bolje i od rešenja G i I, smatramo da je problem rešen i da je H optimalno rešenje.

Putanja (1,7,6,5,3,2,4,8) je najkraća putanja trgovačkog putnika dužine 251 za zadat problem.